Q
4
E42
v. 27-28
1944
WARE

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN
G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGUSJUNDE ÅRGÅNGEN
1944

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16[4] STOCKHOLM

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1944

Tjugusjunde årgångens innehåll.

1944.

Sid.

Adelsköld, V. Matematiklärarkurs vid Stockholms Högskola 35

Bergkvist, T. Några aromatiska klorhydriner och med dem besläktade ämnen (Ref. av gradualavh.) 239

Bergquist, E. Katodstråleoscillografen 13

Bergquist, E. och Grundström, B. Några exempel på katodstråleoscillografens användning 205

Blom, C. E. Anm. av »The School Science Review» 107

Blom, G. Om anpassning av polynom enligt minsta kvadratmetoden 201

Bodlund, C. Skruvlinjer 143

Bäckström, H. Antireflexbehandling av optiska linser 65

Carlson, V. Anm. av Th. Westling, Övningsexempel i matematik för realskolans högsta klass 47

Comét, S. Logaritmerna på gymnasiet 23

— — Anm. av O. Ingebrigtsen, K. Piene, Oppgaver i matematikk (46), T. Porsander, Räknestickan och dess användning (47), »Tentamensuppgifter i matematik för betyget B» (170), E. Giljam, Lärobok i nomografi (226).

Edqvist, T. Anm. av G. Gamow, Mr. Tompkins i Drømmeland .. 171

Esseen, C.-G. Fourier Analysis of Distribution Functions (Ref. av gradualavh.) 238

Faxén, O. H. Anm. av M. Lien, Övningsuppgifter i mekanik för tekniska läroverk (169), E. S. Wessberg, Mekanikproblem (169).

Funke, G. W. Ett växelströmsproblem 99

— — Apparat för upptagande av ångtryckskurvan för eter 148

— — Anm. av »Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel» 108

Gralén, N. Sedimentation and Diffusion Measurements on Cellulose and Cellulose Derivatives (Ref. av gradualavh.) 109

Grundström, B. Teckenregler vid linsformeln 157

— — Anm. av S. Bruun, Den eksperimentelle fysikkundervisningen i realgymnaset (103), T. Bjerge, Lyslære (170).

Grundström, B. och Bergquist, E. Några exempel på katodstråleoscillografens användning 205

Gustaver, B. Meddelande från Föreningen för matem.-naturv. undervisning: Från årsmötet i Stockholm i jan. 1944 med styrelseberättelse för 1943 och referat av diskussioner över »Realgymnasiets matematikkurs» och »Kemiundervisningen i elementära skolor» 38
— — Statens provningsanstalt 79
Gårding, L. On a Class of Linear Transformations Connected with Group Representations (Ref. av gradualavh.) 235
v. Hámos, L. Nyare metoder för kristallstrukturbestämningar medelst röntgenstrålar 1, 129
Henrikson, H. Anm. av L. Lysgaard, Lufthav, Vejr og Klima .. 101
Hilding, S. H. Om approximation av en funktion i ett oändligt intervall 138
Hjerpe, I. Tre lektioner om atomer och molekyler 92
Ingelstam, E. Få måttenheter behandlas som algebraiska storheter? 151
— — Anm. av »Kurs i mätteknik» 227
Lundquist, O. Anm. av Larsen, Rønne-Nielsen, Thorsen, Fysiske Øvelser 102
Minnhagen, L. The Stark Effect of Certain Multiplets. A Study Based on Calcium und Barium Lines (Ref. av gradualavh.) .. 179
Nilsson, A. Van de Graaffs influensmaskin, några förbättringar .. 12
— — Ett stativ för Whitings fallförsök 77
Nordefeldt, E. Anm. av R. W. Stott, Electronic Theory and Chemical Reactions (173), W. Heisenberg, Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft (173), L. Simonsson, Vatten för tekniska ändamål (173), »Anvisningar för bakteriologiska och fysikalisk-kemiska vattenundersökningar» (174), E. Rancke Madsen, Lærebog i Kemi (231), D. Dickinson, The Chemical Analysis of Waters (231), E. Müller, Elektrochemisches Praktikum (234).
Olerup, H. Järnkloridernas komplexitet i 2-molar överklorsyra (Ref. av gradualavh.) 111
Rinde, H. Kolloidkemi 159
Runquist, K. Kemisk formelskrivning 30
Ryde, N. Anm. av Kosmos bd 21 48
Siegbahn, K. Studies in β-Spectroscopy (Ref. av gradualavh.) 177
Snellman, O. Some Measurements of Magnetic Double Refraction (Ref. av gradualavh.) 175
— — Anm. av »The Svedberg 1884—1944». En festskrift 228
Staffansson, E. Stark-effekt am Schwefelbogenspektrum, eine experimentelle und theoretische Untersuchung (Ref. av gradualavh.) 49

Starck, G. Anm. av A. Widlund och I. Flygare, Giftstadgan (49), P. Nylén, Kemiska synpunkter på målningsmaterial (174), J. Read, A Textbook of Organic Chemistry (232), J. C. Speakman, An Introduction to the Modern Theory of Valency (233).
— — Beriktigande 235
Stenström, O. Anm. av F. Ehrnst, Satser och problem..... 168
Svensson, B. Demonstrationsförsök med glimlampa 215
Tandberg, J. Anm. av »Finsponga bilder» (174), L. Bragg, The History of X-Ray Analysis (231), Bonniers Konversationslexikon, bd VIII och IX (108, 234).
Wahlgren, A. Om ekvationen $t^n+at=b$..... 193
Ödberg, G. Anm. av T. Porsander, Elektriska ackumulatorer, Omlindning och beräkning av småmotorer, Vind-elverk i teori och praktik..... 105

Föredrag under hösten 1943 och våren 1944 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 53, 111
Föreläsningar för lärarkandidater vid provårsläroverken under läsåret 1943—1944 192
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1944: jan. (59), mars—april (117), aug.—sept. (186), nov. (246).
Om uppgift 7 i allmän kurs jan. 1944 58
Om uppgift 6 i allmän kurs nov. 1944 214
Provräkning i realexamen v.t. och h.t. 1944 ..... 123, 253
Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v.t. och h.t. 1944 ..... 124, 254
» » Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v.t. och h.t. 1944 ..... 126, 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 54, 113, 182, 242
Gradualavhandlingar (autoreferat): T. Bergkvist (239), C.-G. Esseen (238), N. Gralén (109), L. Gårding (235), L. Minnhagen (179), H. Olerup (111), K. Siegbahn (177), O. Snellman (175), E. Staffansson (49).
Tidskrifter, innehållsöversikt 51, 116, 128 180, 241, 246
Bokanmälningar: Ingebrigtsen-Piene, Oppgaver i matematikk; Porsander, Räknestickan och dess användning; Westling, Övningsexempel i matematik för realskolans högsta klass; Kosmos bd 21; Widlund-Flygare, Giftstadgan den 26 nov. 1943. 46

Lysgaard, Lufthav, Vejr og Klima; Larsen, Rønne-Nielsen, Thorsen, Fysiske Øvelser; Bruun, Den eksperimentelle fysikkundervisning i realgymnaset; Porsander, Elektriska ackumulatorer, Omlindning och beräkning av småmotorer, Vind-elverket i teori och praktik; The School Science Review; Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel; Bonniers Konversationslexikon, bd VIII 101
Ehrnst, Satser och problem; Lien, Övningsuppgifter i mekanik för tekniska läroverk; Wessberg, Mekanikproblem; Tentamensuppgifter i matematik för betyget B; Bjerge, Lyslære; Gamow, Mr. Tompkins i Drømmeland; Stott, Electronic Theory and Chemical reactions; Heisenberg, Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft; Simonsson, Vatten för tekniska ändamål; Anvisningar för bakteriologiska och fysikalisk-kemiska vattenundersökningar; Nylén, Kemiska synpunkter på målningsmaterial; Finsponga Bilder 168
Giljam, Lärobok i nomografi; Kurs i mätteknik; The Svedberg 1884—1944; Bragg, The History of X-Ray Analysis; Rancke Madsen, Lærebog i Kemi; Dickinson, The Chemical Analysis of Waters; Read, A Textbook of Organic Chemistry; Speakman, An Introduction to the Modern Theory of Valency; Müller, Elektrochemisches Praktikum; Bonniers Konversationslexikon, band IX; Beriktigande 226

Tidskr. utkommer med fyra häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Nyare metoder för kristallstrukturbestämning medelst röntgenstrålar. I.

Av L. v. HÁMOS.

1. Fourier-syntes av kristallstrukturer.

Med v. Laues och medarbetares upptäckt 1912 av röntgenstrålarnas interferens blev teorien om kristallernas periodiska atombyggnad experimentellt bekräftad. Den omständigheten att atomavstånden i kristallerna äro av samma storleksordning som röntgenstrålarnas våglängd, gjorde dessa strålar till det främsta verktyget vid utforskandet av kristallstrukturer.

Undersökningarna begränsades i början till kristaller med relativt enkel byggnad, som t. ex. NaCl. Sedermera underkastades även mera komplicerat byggda kristaller strukturanalys, och för närvarande äga vi en mycket omfattande kännedom om kristallernas byggnad.

Vid mera komplicerade strukturer blev det nödvändigt att införa nya metoder för att avkorta de annars mycket tidsödande beräkningarna. I det följande redogöres för några nyare rön på detta område. Därvid kunna endast några få exempel anföras, som belysa de stora framsteg som fortfarande göras inom röntgenkristallografin.

För att en anknytning till de numera »klassiska» metoderna för finstrukturanalys må erhållas, lämnas först en överblick över röntgenkristallografins grundbegrepp. För ett mera detaljerat studium av dessa hänvisas till »Kurs i röntgenteknik» utgiven av Teknisk Tidskrift 1943.[1]

Atomerna i en kristall äro ordnade i ett s. k. rymdgitter. Den enklaste gittertypen är det i fig. 1 avbildade enkla translationsgittret. Byggnaden kan uppfattas som en tredimensionell upprepning av den s. k. elementarcellen, en parallellepiped med kanterna a, b och c. Vid det enkla translationsgittret finnas atomer endast i elementarcellens hörnpunkter. De mera komplicerat byggda

[1] För grundligt studium rekommenderas exempelvis: Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, Berlin 1936 eller W. H. Bragg and W. L. Bragg, The Crystalline State, London 1933.

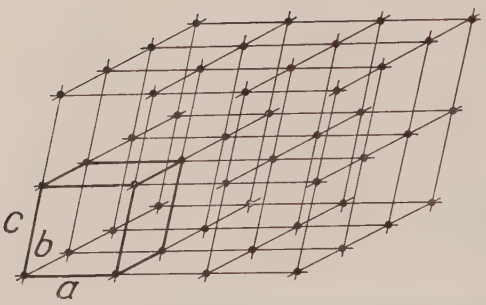


Fig. 1. Tredimensionellt, enkelt translationsgitter med elementarcell.

kristallerna innehålla ett flertal atomer i varje elementarcell. De kunna uppfattas som en överlagring av flera enkla translationsgitter. För att beskriva atomernas läge lägger man ett koordinatsystem med axlarna X, Y, Z parallella med elementarcellens kanter, så att origo (0, 0, 0) sammanfaller med ett hörn, där även en atom antages befinna sig (fig. 2). En punkt P har då koordinaterna x, y, z, vilka uttryckas i bråkdelar av kanterna (axellängderna) a, b och c.

När ett röntgenstrålknippe träffar en kristall, ger den periodiska strukturen upphov till vissa interferensfenomen. Resultatet av dessa interferenser blir ett antal nya röntgenstrålknippen, kallade *reflexer*. De kunna enligt W. L. Bragg enklast beskrivas såsom speglingar av den infallande strålningen på vissa kristallografiskt utmärkta s. k. gitterplan. Exempel på dylika gitterplan äro elementarcellens sidoytor (fig. 1). I allmänhet kännetecknas ett gitterplan av en tripel av hela tal utan gemensam faktor ($h^*k^*l^*$), de s. k. Millerindices. Alla gitterplan med identiska indices bilda en skara av ekvidistanta och parallella plan. Talen $h^*k^*l^*$ ange antalet delar i vilka resp. kanter a, b och c delas av skaran (fig. 3).

För att klassificera alla röntgenreflexer, som kunna uppstå i en kristall, utgår man från de gitterplan vid vilka dessa reflexer uppstå. Vi antaga, att skaran i fråga har Millerindices $h^*k^*l^*$. Kortaste avståndet mellan gitterplanen i skaran betecknas med d. Braggs ekvation lyder då:

$$2d \cdot \sin \vartheta = n\lambda.$$

λ är röntgenstrålarnas våglängd, ϑ är glansvinkeln (= vinkeln mellan infallande strålen och planet) och n reflexens ordning. Till gitterplanet $h^*k^*l^*$ höra således flera reflexer, beroende på ordningstalet n. Man får en entydig beteckning för varje reflex genom att införa talen:

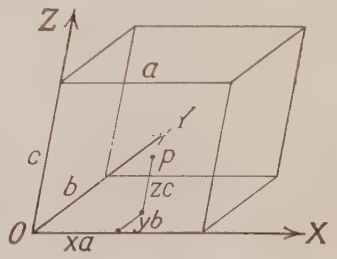


Fig. 2. Koordinatsystem för beskrivning av elementarcellens innehåll.

$$h = nh^*, \quad k = nk^*, \quad l = nl^*.$$

Tripeln (*hkl*) benämnes reflexens Laueindices.

Genom uppmätning av de mot interferensernas lägen svarande glansvinklarna och fastläggande av de tillhörande Laeuindices (indicering) bestämmes elementarcellens form och dimensioner. Någon upplysning beträffande atomernas fördelning inom elementarcellen kan icke erhållas enbart av reflexernas geometriska data.

Strukturanalysen fullbordas genom bestämning av elementarcellens innehåll av atomer och deras placering. Det främsta underlaget därtill bilda vissa relativa *intensitetsmätningar*.

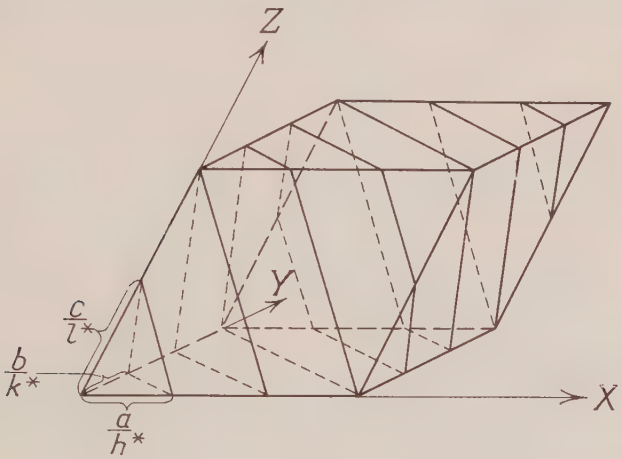


Fig. 3. Skara av gitterplan med Millerindices ($h^* = 3$, $k^* = 3$, $l^* = 2$).

För att inse, hur atomerna i ett sammansatt gitter påverka röntgenreflexernas relativa intensitet, tänker man sig gittret som en överlagring av flera enkla, kongruenta translationsgitter. Dessa äro placerade med en viss relativ fasförskjutning i varandra. På grund därav överlagras de från de skilda enkla gittren reflekterade röntgenstrålarna med en viss fasförskjutning. Den resulterande amplituden och därmed även intensiteten är därför i hög grad beroende av atomfördelningen inom elementarcellen. Strukturens inverkan på intensiteten hos en viss reflex (*hkl*) betecknas med ett matematiskt uttryck $F(hkl)$ kallat *strukturamplitud*. Denna storhet kan lämpligen uppfattas som en vektor. Därmed får man även ett uttryck för de av gitterstrukturen förorsakade fasförskjutningarna. (På liknande sätt behandlas de elektriska storheterna i

en växelströmkrets.) Strukturamplituden kan även skrivas som ett komplext tal:

$$F(hkl) = F'(hkl) + iF''(hkl).$$

Intensiteten hos reflexen (hkl) antages vanligen proportionell mot kvadraten på absoluta värdet för strukturamplituden.

Detta samband leder slutligen till en detaljerad analys av strukturen. Det är dock icke tillräckligt för att ge alla behövliga data. Strukturen måste nämligen mer eller mindre gissningsvis antagas, för att x, y och z för de olika atomerna skola erhållas och därmed strukturamplituden skall kunna beräknas. För den komplexa strukturamplituden gäller:

$$F(hkl) = \sum_{r=1}^{N} f_r e^{2\pi i (hx_r + ky_r + lz_r)}$$

$$= \sum_{r=1}^{N} f_r [\cos 2\pi(hx_r + ky_r + lz_r) + i \sin 2\pi(hx_r + ky_r + lz_r)].$$

I denna formel är N antalet atomer i elementarcellen, r ett löpande nummer för de olika atomerna samt f_r en storhet, som är approximativt proportionell mot antalet elektroner i resp. atomslags hölje, dvs. mot dess ordningsnummer.

Beräkningsresultatet måste sedan jämföras med de observerade intensiteterna. Den antagna strukturen måste sedan ofta justeras för att överensstämmelse skall uppnås. Detta förfarande är mycket tidsödande och har av Bragg icke utan skäl jämförts med lösandet av en korsordsgåta.

I motsats till den ovan skisserade vägen är det emellertid möjligt att på ett mera direkt sätt utföra strukturbestämningen. Förfaringssättet betecknas ofta Fourier-syntes av en gitterstruktur. Det var W. H. Bragg, som först föreslog denna metod (redan 1915). Den grundar sig på användning av Fourier-serier för beskrivning av materiefördelningen inom elementarcellen. Det är i första hand elektronerna, som förorsaka ströstrålningen, varför elektronfördelningen är den struktur man vill bestämma. Lyckas man fastlägga elektrontäthetens variation inom strukturen, får man därmed icke endast en uppfattning om atomernas lägen utan därutöver ofta intressanta upplysningar exempelvis beträffande kemiska bindningar.

Utgångspunkten för Fourier-syntesen är följande framställning av elektrontätheten $\varrho(x, y, z)$ som funktion av koordinaterna x, y, z:

$$\varrho(x, y, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{hkl} \cos 2\pi(hx + ky + lz) +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{hkl} \sin 2\pi(hx + ky + lz).$$

I denna formel summeras teoretiskt över samtliga heltaliga h, k och l. Man antager således, att elektrontätheten är kontinuerligt fördelad inom strukturen. (I praktiken förekommande fall är det endast ett relativt litet antal termer, som komma med vid summeringen.)

En matematisk beräkning visar, att koefficienterna A och B stå i följande relation till strukturamplituden:

$$A_{hkl} = \frac{1}{V} F'(hkl), \quad B_{hkl} = \frac{1}{V} F''(hkl),$$

där V är elementarcellens volym. Med kännedom om ett stort antal F' och F'' är det således möjligt att approximativt beräkna elektrontäthetsfördelningen. Tyvärr ge våra intensitetsmätningar endast absolutvärdet av strukturamplituden:

$$|F(hkl)|^2 = |F'(hkl)|^2 + |F''(hkl)|^2,$$

och vektorns fasvinkel kan aldrig experimentellt bestämmas enbart genom intensitetsmätningar.

I vissa specialfall förenklas dock problemet betydligt tack vare gittrets symmetri. Innehåller nämligen gittret ett *symmetricentrum* gäller, om origo i koordinatsystemet förlägges till detta:

$$\varrho(x, y, z) = \varrho(-x, -y, -z),$$

vilket innebär, att endast cosinustermerna kvarstå i ovanstående Fourier-serie, dvs. alla $F''_{hkl} = 0$. Återstår sedan att avgöra tecknet för $F'_{(hkl)} = \pm \sqrt{|F(hkl)|^2}$. Detta kräver i många fall endast approximativ kännedom om atomfördelningen inom elementarcellen.

W. L. Bragg [1] reducerade ytterligare problemet genom att betrakta cellinnehållets projektion på ett visst gitterplan. De tredimensionella summorna övergå då i tvådimensionella, och de praktiska beräkningarna förenklas betydligt.

Vi antaga med Bragg, att elektrontätheten projiceras pa gitterplanet *hk0*, som innehåller axlarna X och Y. Ytfördelningsfunktionen blir då:

[1] W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 123, 537 (1929).

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{A} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} F'_{(hk0)} \cos 2\pi(hx + ky).$$

A betyder ytinnehållet av elementarparallellogrammen mellan axlarna a och b. Formeln säger, att endast de reflexer bidraga till den projicerade elektrontätheten, som uppstå vid reflexion mot gitterplanen $hk0$. Alla dessa gitterplan äro parallella med Z-axeln och bilda vad man kallar en kristallzon.

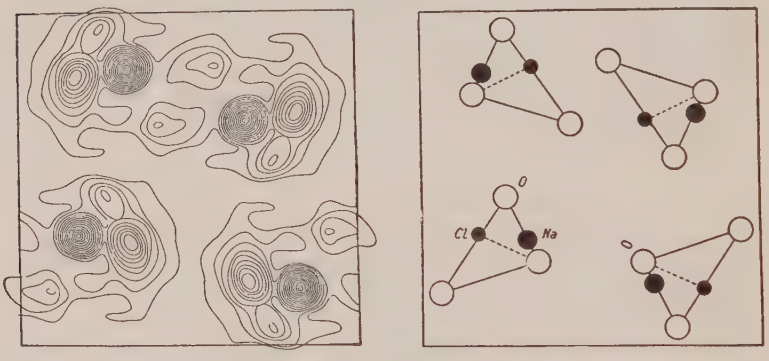


Fig. 4. Natriumkloratets elektrontäthet projicierad på elementarkubens sida. (Efter ZACHARIASEN.)

Enligt denna metod ha talrika beräkningar av elektronfördelningarna genomförts. Som exempel visas i fig. 4 elektrontätheten hos natriumklorat, projicerad på elementarkubens sida. De ritade nivålinjerna förbinda punkter med identisk elektrontäthet. Atomernas lägen framträda liksom bergtoppar på en karta med nivålinjer. Till jämförelse är en schematisk projektion av strukturen i samma skala återgiven.

Denna metod har särskild genom arbeten av BRILL, HERMAN och PETERS[1] utvecklats till fulländning.

På grund av den ovan skisserade matematiska teorin har W. L. BRAGG[2] konstruerat en apparat, som han kallar »X-ray microscope». Denna utför på optisk väg summationen av de ovan nämnda Fourier-serierna. Resultatet framträder som en åskådlig bild av elektrontätheten projicerad på ett gitterplan. Det må särskilt påpekas, att det icke är fråga om någon med elektronmikrosko-

[1] BRILL, HERMANN and PETERS, Ann d. Phys. (5). 41, 37—53, 1942.
[2] W. L. BRAGG, Nature Vol 143 page 678, April 22, 1939.
» » » 149 » 470, » 25, 1942.

Prof. Bragg har haft vänligheten att ställa särtryck av dessa artiklar till tidskriftens förfogande. *(Red.)*

pet analog anordning. Braggs röntgenmikroskop arbetar med synligt ljus och bygger på vissa värden, som äro resultat av röntgenmätningarna. Däremot består, som skall visas nedan, ett nära samband mellan Braggs röntgenmikroskop och Abbes teori för avbildningens gräns hos det vanliga optiska mikroskopet.

Anordningen återges schematiskt i fig. 5. En tunn mässingsplatta 1, som i mitten är försedd med ett system av fina hål, befinner sig mellan två linser 2 och 3 av hög kvalitet med ca 2 m brännvidd. I brännpunkten 4 av linsen 2 är placerad en punktformig monokromatisk ljuskälla 4 (åstadkommes genom en liten bländar-

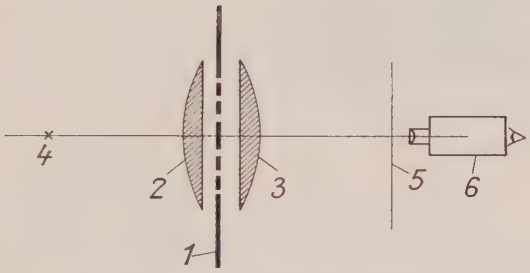


Fig. 5. Schematisk bild av »röntgenmikroskopet» enl. W. L. Bragg.

öppning, som bestrålas av en kvicksilverlampa i förbindelse med filter eller monokromator). Ljuskällan avbildas genom linssystemet i bildplanet 5. Bilden blir icke punktformig beroende på ljusets böjning vid dess gång genom de små hålen i plattan 1. Hålen äro så anordnade, att interferensbilden, som betraktas genom mikroskopet 6, blir identisk med den sökta elektrontäthetsfördelningen. Innan vi ge beviset för detta märkliga samband, skall först några praktiska resultat anföras.

Diopsidens [$CaMg(SiO_3)_2$] strukturanalys i fig. 7 är ett vackert exempel på apparatens prestationsförmåga.

Elementarcellens innehåll tänkes vara projicerat på den kristallografiska ytan *010*. Mönstret för plattans hålsystem visas i fig. 6, 2 ggr förstorat. För konstruktionen av dylika hålsystem redogöres senare.

Röntgenmikroskopet lämnar den i fig. 7 återgivna elektronfördelningen. Som jämförelse visas i fig. 8 en schematisk ritning över diopsidens atomfördelning. De största cirklarna representera Ca och Mg atomer, som i denna projektion ligga över varandra. De mellanstora cirklarna äro kiselatomer och de minsta syreatomer.

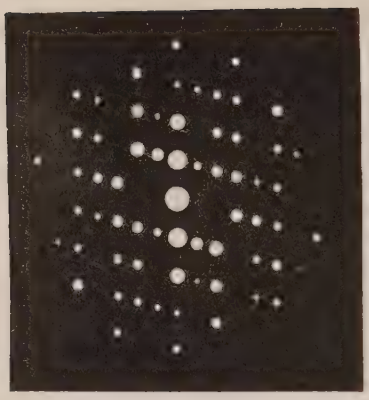


Fig. 6. Hålsystemet för Fouriersyntes av diopsidens struktur.

Några ord må tilläggas beträffande försökets praktiska utförande. Hålen i plattan 1 måste vara gjorda med stor precision, för att de önskade interferenserna skola erhållas. Bragg har därför på senare tid begagnat sig av fotografiskt framställda hålsystem. Därvid kom en ny plåtsort till användning, som efter framkallning är alldeles fri från gelatinhinna på de ställen, där ingen exponering ägt rum. Ljuset kommer således endast att passera genom en optiskt slipad glasplatta.

Sambandet mellan plattans hålsystem och de enligt röntgenförsök gällande data för strukturen är följande. Hålsystemet i fig. 6 är ett enkelt tvådimensionellt translationsgitter, där vissa gitterpunkter saknas. Mot varje röntgenreflex (*hk0*) inom zonen $l = 0$ svarar ett hål med en yta som väljes proportionell mot absolutvärdet av strukturamplituden $F(hk0)$. Hålen äro placerade enligt det till strukturen hörande *reciproka gittret*. Begreppet reciprokt gitter är av fundamental betydelse för hela röntgenkristallografin. I det följande diskutera vi endast ett tvådimensionellt plan i detta gitter. I fig. 9 visas sambandet mellan det ursprungliga gittret (*a*) och dess reciproka gitter (*b*). Det reciproka gittret saknar fysikalisk existens och är endast ett matematiskt begrepp. Definitionerna av detsamma framgår av det följande.

Vi betrakta det specialfallet att *Z*-axeln är vinkelrät mot planet *XY*. Axlarna i det reciproka gittret betecknas med *H*, *K*, *L*. De äro vinkelräta mot resp. ytorna *YZ*, *ZX* *XY*. Identitetsavståndet räknat i riktning *H* är $1/d_{100}$, dvs. reciproka värdet av gitterkonstanten för 100-planen i det ursprungliga gittret. Lika-

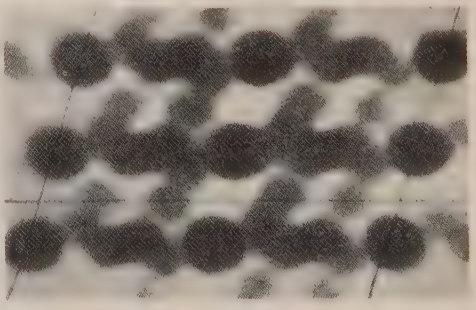


Fig. 7. Röntgenmikroskopisk Fouriersyntes av diopsidstrukturen.

så är identitetsavståndet i riktning K lika med l/d_{010}. Mot varje skara av parallella gitterplan med Millerindices $h^*k^*l^*$ svarar en gitterlinje i det reciproka gittret, som är vinkelrät mot denna skara. Koordinaterna för gitterpunkterna (hkl) äro identiska med Laueindices för de motsvarande röntgenreflexerna. Mot varje röntgenreflex svarar saledes en gitterpunkt i det reciproka gittret. I fig. 9 a och b förekomma indices av typen $hk0$. Vektorn från origo till gitterpunkten $(hk0)$ i fig. 9 b är vinkelrät mot skaran $(hk0)$ av parallella gitterplan (parallella linjer) i fig. 9 a. Vektorns längd är lika med storheten n/d, där n är reflexens ordning och d gitterkonstanten för den reflekterande skaran av gitterplan.

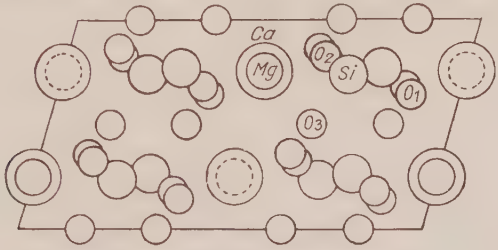


Fig. 8. Schematisk diopsid-struktur.

Med kännedom om detta geometriska samband mellan det ursprungliga gittret och dess reciproka gitter kan följande förklaring för Braggs röntgenmikroskop ges. Som följd av gittrets symmetriegenskap, som även gäller för det reciproka gittret, kunna hålen i plattan 1 (fig. 5) sammanfattas till hålpar med symmetricentrum i origo. Ett dylikt hålpar kännetecknas av koordinaterna $(h, k, 0)$ och $(-h, -k, 0)$. Avståndet mellan hålens centrum är proportionellt mot n/d. När det monokromatiska ljuset passerar detta hålpar, alstras i bildplanet 5 ett system av ljusa och mörka interferensband s. k. Fresnelska strimmor. I interferensbildens centrala del, som betraktas genom mikroskopet, äro dessa strimmor tillnärmelsevis rätliniga och parallella. Deras riktning är vinkelrät mot förbindelselinjen mellan punktparet $(h, k, 0)$ och $(-h, -k, 0)$ i det reciproka gittret, dvs. parallell med de gitterplan, som gavo upphov till reflexen med Laueindices $(h, k, 0)$. Avståndet mellan strimmorna är tillnärmelsevis omvänt proportionellt mot halparets centrumavstånd, dvs. proportionellt mot d/n. Fördelningen av ljusets intensitet vinkelrätt mot strimmorna är sinusforming och amplituden proportionell mot hålens yta, dvs. $F'(hk0)$. Det genom punktparet $(h, k, 0)$ och $(-h, -k, 0)$ alstrade interferenssystemet representerar således termen

$$F'(hk0) \cdot \cos 2\pi \ (hx + ky)$$

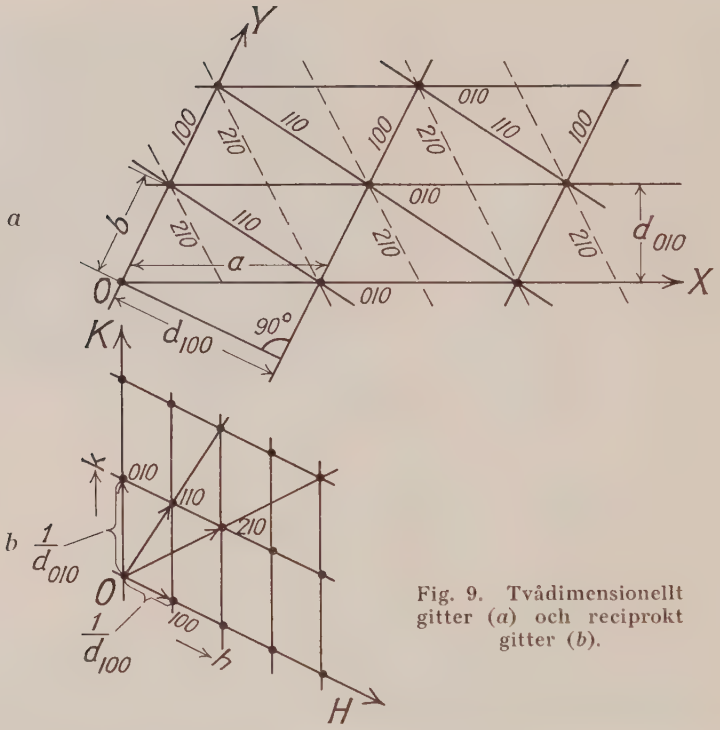


Fig. 9. Tvådimensionellt gitter (*a*) och reciprokt gitter (*b*).

i Braggs ytfördelningsfunktion $\sigma(x, y)$. Genom överlagring av Fresnelska strimmor härrörande från olika hålpar i plattan 1 (fig. 5) uppstår slutligen den eftersträvade Fouriersyntesen av ytfördelningsfunktionen $\sigma(x, y)$.

Givetvis förutsätter denna metod, att alla strukturamplituder $F(hk0)$ ha samma fas. Detta inträffar endast, om elektrontätheten är hög i symmetricentrum. Försök har även gjorts att med hjälp av små glimmerskivor lagda över vissa hålpar åstadkomma interferensstrimmor med en halv våglängds förskjutning för att summera Fourier-serier med koefficienter av växlande tecken.

Som redan ovan nämnts, förefinnes en djupare analogi mellan Braggs »röntgenmikroskop» och Abbes betraktelsesätt av strålgången i ett vanligt mikroskop vid avbildningen av mycket små objekt. I fig. 10 betrakta vi med Abbe avbildningen av ett streckgitter $A_0A_1A_2 \ldots$ i genomfallande monokromatiskt ljus. Objektivets centrum markeras med 0. Strecken i gittret äro vinkelräta mot figurens plan och avbildas genom mikroskopet i $B_0B_1B_2 \ldots$

Gittrets avbildning kan enligt Abbe tänkas försiggå i följande två steg: 1) vid genomlysning av gittret uppstår ett böjningsspektrum, vilket genom objektivet fokusseras till böjningsbilderna $F_0F_1F'_1F_2F'_2$ ... 2) det från dessa böjningsbilder utgående ljuset interfererar ånyo enligt Fresnel och alstrar ett system av mörka och ljusa strimmor i bildplanet. Detta system är identiskt med $B_0B_1B_2$ ... vad avståndet mellan strimmorna beträffar. Avbildningens skärpa är däremot beroende av antalet böjningsmaxima, som träffa objektivet. För att härleda gränsen för mikroskopets upplösningsförmåga betraktar Abbe endast det första böjningsmaximet.

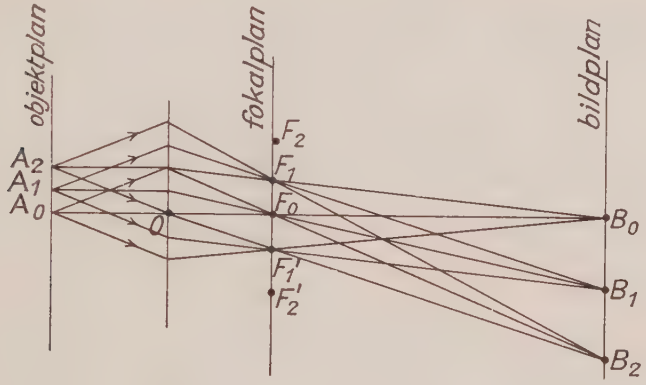


Fig. 10. Strålgång vid mikroskopisk avbildning av ett streckgitter enl. ABBE.

Ersättes i denna betraktelse streckgittret med ett korsgitter, erhålles i fokalplanet likaledes en böjningsbild av korsgitterstrukturen. Denna motsvarar då hålsystemet i plattan 1 (fig. 5) hos Braggs »röntgenmikroskop». Kristallstrukturens uppkomst i detta mikroskop sker analogt med andra steget i Abbes teori.

Till slut kan nämnas att Bragg redan före upptäckten av denna fundamentala analogi begagnat sig av optisk-fotografiska metoder för Fourier-syntes av kristallstrukturer. Systemet av parallella strimmor, som representerar de olika termerna i Fourier-syntesen projicerades genom lämpligt preparerade och placerade diapositiv på fotografiskt papper. De olika termerna summerades således fotografiskt. Braggs ovan skisserade »röntgenmikroskop» överträffar denna tidigare metod både i teoretisk elegans och praktisk användbarhet.

Van de Graaffs influensmaskin — några förbättringar.

Av ALFRED NILSSON.

En influensmaskin enligt Van de Graaff beskrevs i Elementas septemberhäfte 1939, s. 176. På sina håll har man försökt göra en maskin enligt denna tyvärr ofullständiga och numera föråldrade beskrivning men ej alltid lyckats. Det är förhända en dylik erfarenhet, som föranlett det mindre gynnsamma omdömet om influensmaskiner för skolbruk av Van de Graaffs typ, som återfinnes på sid. 138 i en artikel av H. Slätis, Om influenselektricitetsmaskiner och deras arbetssätt, Elementa, *26*: 3, s. 129, 1943.

Några förbättringar av den ursprungliga konstruktionen må omnämnas här.

Konduktorn C mellan de båda remparterna har sålunda borttagits. I stället får en tunn, böjd celluloidskiva helt lätt tangera den undre rempartens undersida vid A ett par mm åt B till. På sträckan AB släpa remparterna mot varandra. Härigenom har remmen blivit föga känslig för luftens fuktighet, och maskinens strömstyrka har fördubblats, så att den nu är 0,03 mA vid 15 cm rembredd vid remmens normala hastighet, som är 4 m/sek. — Eftersom gummi har en begränsad livslängd, kan remmen med fördel göras av brunt omslagspapper med en i V-form klistrad skarv. En dylik rem gick 8 timmar. — Maskinen har gjorts lägre än förut utan minskning av gnistlängden, varigenom störande vajningar hos ebonitstavarna, som ej få vara för smala, ha eliminerats.

Åtskilliga andra detaljer, som förenkla tillverkningen eller bidraga till ett bättre resultat, ha utexperimenterats men måste av utrymmesskäl utelämnas här. En fullständig beskrivning kan mot ersättning för porto, fotografier och stenciler erhållas från förf., Lexegränd 4, Gävle.

Katodstråleoscillografen.

Av E. BERGQUIST.

Katodstråleoscillografen, vilken ursprungligen användes endast som laboratorieinstrument vid fysikaliska undersökningar, har under de senaste åren utvecklats till ett tekniskt hjälpmedel av stor betydelse. Den har blivit ett bekvämt och tillförlitligt instrument, som användes i det dagliga arbetet vid industrier, sjukhus och kraftverk etc. för kontroll av en mängfald olika företeelser såsom elektriska, akustiska, optiska, termiska och mekaniska förlopp upp till de högsta frekvenser. Numera finns det knappast en gren inom tekniken eller industrien, ett laboratorium eller en undervisningsanstalt, där katodstråleoscillografen icke har en viktig uppgift att fylla. Här nedan lämnas en kortfattad redogörelse för dess principiella uppbyggnad och arbetssätt.

1. Katodstråleröret.

Det första enkla katodstråleröret konstruerades 1897 av den tyske fysikern F. Braun och användes av denne för registrering av snabbt växlande magnetfält. Senare har katodstråleröret utvecklats och förbättrats även för andra ändamål, och den modernaste användningen är som televisionsrör för trådlös bildöverföring.

Principen för katodstråleröret framgår av fig. 1. Katoden *K* bringas genom uppvärmning att utsända elektroner, vilka med lämpliga hjälpmedel koncentreras till en fin stråle, som riktas mot en skärm, belagd med ett fluorescerande material. När elektronerna, som accelererats upp till en viss hastighet, träffa skärmen, omsättes deras rörelseenergi till ljus och en lysande bild erhålles på fluorescensskärmen.

Det finns två typer av katodstrålerör, gasfyllda rör och högvakuumrör. Gasen i det gasfyllda röret har till uppgift att koncentrera elektronstrålen, vilket sker genom att elektronerna på sin väg mot skärmen bombardera gasmolekylerna, varvid dessa joniseras och spaltas i en positiv jon och en eller flera elektroner. Då jonerna på grund av sin i förhållande till elektronerna stora massa ha betydligt större tröghet än de senare, bliva de förra

längre stående i elektronstrålens bana och bilda en positiv, trådformig kärna, vilken attraherar de negativt laddade elektronerna och koncentrerar dem till en fin stråle. Gasen kan bestå av vätgas, kvicksilverånga, neon eller argon och har ett tryck av ca 0,005 mm.

Gasfyllningen i röret begränsar emellertid elektronhastigheten och därmed skrivhastigheten, varför de gasfyllda rören numera undanträngts av de långt viktigare högvakuumrören, vilka kunna arbeta även med de stora skrivhastigheter, som erfordras för åskådliggörande av högfrekventa förlopp och alstrande av televisonsbilder etc. I högvakuumrör blir katodstrålens tröghet märkbar först vid frekvenser om 10^8 p/s. Dessa rör äro konstruerade

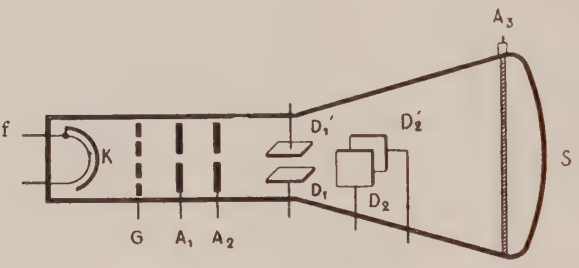


Fig. 1. Principschema för ett högvakuumrör: f = glödtråd, K = katod, G = galler, A_1, A_2 och A_3 = anoder, D_1D_1' och D_2D_2' = avböjningsanordning, S = fluorescensskärm.

på samma sätt som de gasfyllda rören, men då någon gas ej är närvarande, måste särskilda anordningar vidtagas för åstadkommande av erforderlig koncentration av elektronstrålen.

Katoden K består av volfram och är belagd med ett oxidskikt av något ämne, som lätt emitterar elektroner vid uppvärmning, exempelvis torium; den upphettas indirekt av glödtråden f. Runt katoden uppstår ett moln av elektroner, som attraheras av de starkt positiva anoderna A_1 och A_2, varigenom elektronerna sättas i rörelse i riktning mot skärmen, passerar genom styrgallret G samt genom anoderna och slungas mot skärmen. Katodens utförande avviker helt från det i radiorör vanliga; vid katodstrålerör söker man koncentrera emissionen från katodytan så mycket som möjligt till en enda punkt, emedan fluorescensfläckens skärpa i hög grad är beroende härav.

Styrgallret G. Elektronstrålens styrka måste ofta ändras relativt snabbt. Detta kan ej ske genom reglering av katodens glödström, emedan den härigenom åstadkomna ändringen av glödtrådens tem-

peratur och därmed även av emissionsströmstyrkan skulle ske alltför långsamt. Även en mekanisk anordning för reglering av elektronströmmen (t. ex. en ställbar bländare) skulle ha alltför stor tröghet. Man reglerar därför i stället strömstyrkan på elektrisk väg genom att omedelbart framför katoden placera ett styrgaller *G*, på vilket man lägger en spänning, som är negativ i förhållande till katoden. På grund av att gallret är negativt, kommer detta att stöta bort de negativt laddade elektronerna och tvinga dessa tillbaka mot katoden. Styrgallret i ett katodstrålerör fyller alltså samma funktion som styrgallret i ett radiorör. Ökar man gallrets negativa spänning, minskar elektronströmmen och omvänt. Vid

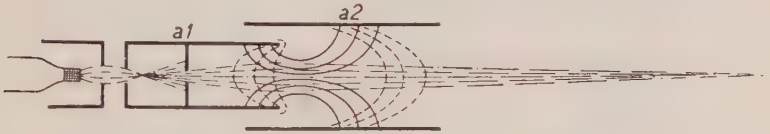


Fig. 2. Principschema över elektrodsystemets praktiska utförande i ett högvakuumrör.

starkt negativ spänning på gallret undertryckes elektronstrålen helt och försvinner. På detta sätt kan man alltså reglera fluorescensbildens ljusstyrka.

Gallret brukar ha formen av en framtill sluten cylinder, vilken omsluter katoden. Framsidan ligger tätt framför den emitterande katodytan och har i mitten en liten öppning (se fig. 2).

Anoderna A_1 och A_2. Dessa ha till uppgift dels att påskynda elektronernas rörelse genom katodstråleröret i riktning mot skärmen, dels att koncentrera elektronstrålen till en enda punkt på skärmen. Lägger man en hög positiv spänning på anoden A_2, komma elektronerna på grund av sin negativa laddning att attraheras med våldsam hastighet mot anoden, och en del kommer att passera genom denna och träffa skärmen. Om man även ger anoden A_1 en positiv spänning, som till storleken endast är ca $^1/_5$ av spänningen på A_2, uppstår ett elektrostatiskt kraftfält mellan dessa anoder i enlighet med fig. 2, och elektronstrålen kommer att brytas och koncentreras på samma sätt som ljusstrålen i ett optiskt linssystem. Man kallar därför även dessa anodsystem elektronlinser, elektronobjektiv osv. I fig. 2 ha de elektriska kraftlinjerna ritats heldragna och ekvipotentiallinjerna streckade. Varje par ekvipotentialytor bryter elektronernas bana, och resultatet av de på varandra följande brytningarna blir en kontinuerlig ändring av strålriktningen, så att elektronerna kon-

centreras i en enda brännpunkt. Genom att reglera »lins»-spänningen samt intensiteten med hjälp av gallerförspänningen kan man erhålla en ljuspunkt av endast 0,2 mm i diameter. Spänningen på A_2 brukar i regel ligga mellan 1 000—2 000 volt.

Om man anbringar en extra accelerationsanod A_3 i omedeblar närhet av skärmen (se fig. 1) och på denna lägger en spänning av 4 000—5 000 volt, kan man erhålla mycket stor ljusintensitet och till och med projiciera bilden på en biografduk med hjälp av en lämplig projektionslins. Denna extra accelerationsanod är även till stor nytta vid registrering och fotografering av mycket snabba förlopp, emedan skrivhastigheten härigenom avsevärt höjes.

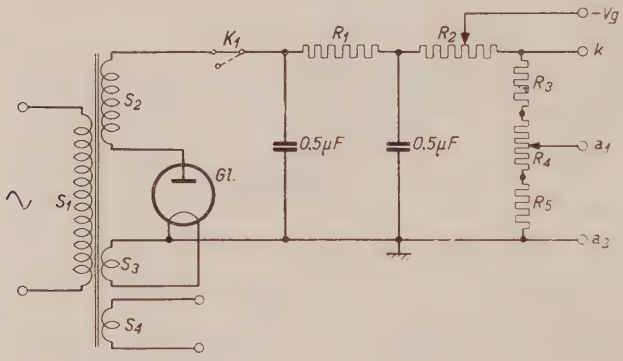


Fig. 3. Nätdelen i en katodstråleoscillograf för växelström.

Förutom elektriska system kan man även använda magnetiska för koncentrering av elektronstrålen. Man anbringar ett homogent magnetfält i elektronstrålens riktning. Härvid beskriva elektronerna långsträckta skruvlinjer, vars axlar ha samma riktning som magnetfältet.

2. Matningen.

Fig. 3 visar ett kopplingsschema för växelströmsmatning. Ett tvåpoligt likriktarrör *Gl* omformar växelströmmen till likström. För strömkurvans avflackning räcka i regel två kondensatorer om 0,5 uF, tillsammans med ett motstånd på t. ex. 100 000 ohm. Den tillåtna övertonshalten hos kurvan är beroende av rörets användning; i allmänhet får vågigheten ej överstiga 1 %. Otillräcklig glättning ger sig till känna genom att röret blinkar, genom avbrott i bilden eller genom mindre god strålkoncentration. Dessa fenomen äro en följd av spänningsvariationer på gallret. Även anodspänningsänd-

ringar kunna förorsaka förvrängning av bilden. Det magnetiska ströfältet från transformatorn kan även ge anledning till oskärpa.

Den negativa förspänningen till gallret samt anodspänningen erhåller man genom att sända katodstralerörets anodström genom en potentiometer (R_2—R_3—R_4—R_5); den negativa förspänningen uttages från R_2.— Transformatorns lindning S_4 måste ha en isolation som kan tåla maximala anodspänningen.

3. Avböjningsanordningen.

När elektronerna passerat anoderna, slungas de med stor hastighet mot fluorescensskärmen *S*. På sin väg mot skärmen passera de

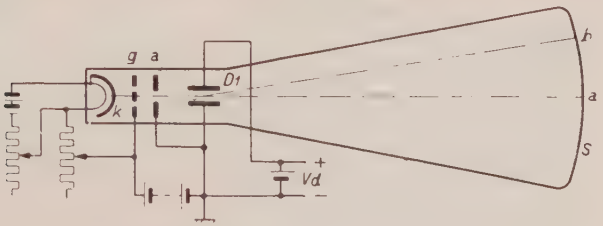


Fig. 4. Kopplingsschema för avböjningsanordningen i ett högvakuumrör.

även tvenne plattpar, ett vertikalt D_1D_1' och ett horisontellt D_2D_2'. Lägger man en spänning på något av dessa plattpar, kommer elektronstrålen att avböjas ur sin ursprungliga bana. Fig. 4 visar ett förenklat schema av ett katodstrålerör, där för enkelhetens skull endast ett plattpar D_1 inritats. Kortslutas och jordas de båda plattorna, komma elektronerna att röra sig fritt i rörets längdriktning och träffa skärmen i punkt *a*. Lägger man en likspänning mellan de båda plattorna, kommer elektronstrålen att attraheras av den positiva plattan och träffa skärmen i punkt *b*.

Utslaget per volt av den spänning, som lägges på plattorna, kallas rörets känslighet. Känsligheten hos ett högvakuumrör är av storleksordningen 0,2—0,5 mm per volt.

Om spänningen, som lägges på plattorna, är en växelspänning med en frekvens av t. ex. 50 p/s, kommer elektronstrålen att röra sig mycket snabbt upp och ned på skärmen. På grund av ögats tröghet kan man ej följa elektronstrålens rörelse utan uppfattar densamma som en heldragen, lysande linje. Det periodiska förloppet kan på vanligt sätt studeras med hjälp av en roterande spegel. Lägger man en varierande spänning även på det andra plattparet D_2D_2', som står vinkelrätt mot det första, kommer elek-

tronstrålen att avböjas även i den andra riktningen, och man erhåller olika karakteristiska figurer (Lissajoufigurer), av vilka man på känt sätt kan utläsa de båda spänningarnas amplitud- och fasförhållande.

Avböjningsplattorna måste ha ungefär samma potential som anoden A_2, emedan annars elektronernas hastighet skulle ändras och bilden bli förvrängd. Ansluter man den ena av plattorna till jord, kommer denna alltid att ligga på samma potential som A_2 (se fig. 5). Ansluter man nu den spänning, som skall undersökas, till klämmorna x, kommer emellertid den andra plattan på grund av den asymmetriska kopplingen att ligga på antingen en högre

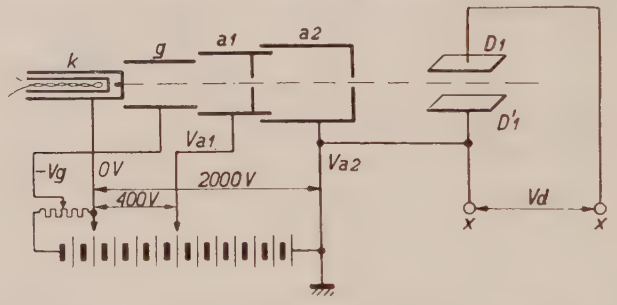


Fig. 5. Matning av de olika elektroderna i ett katodstrålrör med asymmetrisk avböjningsanordning. Den spänning som skall undersökas anslutes till klämmorna x.

eller också en lägre potential än andra anoden (a_2), och man erhåller en viss förvrängning av oscillogrammet. För att eliminera detta fel brukar man koppla avböjningsplattorna symmetriskt med avseende på denna anod genom att inkoppla ett motstånd mellan klämmorna x och förbinda dess mittpunkt med a_2. Numera kan man dock genom att ge plattorna i det första plattparet en särskild utformning eliminera den förvrängning av bilden, som erhålles vid asymmetrisk anordning, och i praktiken användes vanligtvis denna koppling, då den förenklar och förbilligar konstruktionen.

4. Fluorescensskärmen S.

Denna utsänder ljus från de ställen, där den träffas av elektronstrålen. Ljusets färg bestämmes av det fluorescerande material som användes; detta kan t. ex. väljas så, att ljuset i största möjliga grad blir synligt för ögat. Man väljer då ett grönlysande material

(zinksilikat eller zinkfosfat), emedan ögats maximala känslighet ligger inom det gröna ljusets spektralområde. För fotografering väljer man ett blålysande skärmmaterial, bestående av ett kadmium- eller kalciumsalt. — För speciella ändamål finnas även rör med skärm som ger efterlysning, upp till några sekunder.

Elektronerna, som bombardera skärmen, avge till denna en negativ laddning. Denna laddning växer dock icke obegränsat, emedan skärmen genom bombardemanget emitterar sekundära elektroner, varigenom en sekundär ström uppstår. Härigenom erhålles ett jämviktstillstånd mellan de elektroner, som träffa skärmen, och dem som emitteras. I detta jämviktstillstånd är skärmens spänning med avseende på anoden av storleksordningen 100 volt negativt.

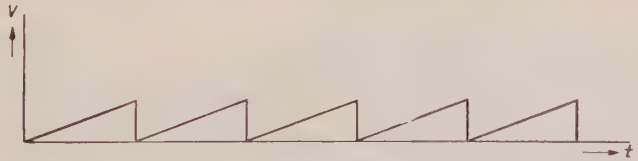


Fig. 6. Förloppet av kippspänningen mellan avböjningsplattorna i ett katodstrålerör.

5. Tidsaxelanordningen.

Ofta önskar man se hur ett visst förlopp ändrar sig med tiden. Härför erfordras en tidsaxel, som åstadkommes med hjälp av en spänning, som växer linjärt med tiden och avböjer elektronstrålen i horisontell riktning. För att t. ex. åskådliggöra formen hos en växelspänningskurva kan man till det horisontella plattparet D_2D_2' ansluta växelspänningen, medan man till det horisontella plattparet D_1D_1' ansluter den horisontella avböjningsspänningen. Man låter den senare spänningen växa till ett visst värde, varefter den får falla mycket snabbt till noll (se fig. 6). Om detta sker synkront med en eller flera perioder av det växelströmsförlopp, som skall undersökas, erhåller man en stillastående bild, som visar växelspänningskurvans form. För varje period beskriver nämligen katodstrålen samma väg på skärmen, och då en överlagring på så sätt sker, får man intrycket av en varaktig, stillastående bild.

Spänningsförloppet mellan plattorna D_1D_1' måste alltså ha den form, som fig. 6 visar. En sådan spänning kallar man kippspänning eller »sågtandspänning», och den apparat varmed den alstras benämnes kippspännings- eller tidsaxelaggregat.

Principen för ett kippspänningsaggregat är, att en kondensator uppladdas och sedan plötsligt urladdas över t. ex. en glimlampa.

Vanligtvis användes en gastriod, emedan glimlampan har den nackdelen, att tändspänningen ofta inte är tillräckligt hög samt att tiden mellan tändspänning och släckspänning ej är konstant, varför röret blir mindre tillförlitligt. Gastriodens arbetssätt är följande:

Vid negativ spänning på gallret flyter ej någon ström genom röret, förrän anodspänningen har uppnått ett värde, som t. ex. är n gånger så stort som gallerspänningen. Denna faktor n är konstant för röret; fördubblar man t. ex. den negativa gallerspänningen, blir även tändspänningen dubbelt så stor. Genom inställning av den negativa gallerspänningen kan man alltså ge tändspänningen vilket värde som helst intill de gränser, vilka betingas av rörkonstruk-

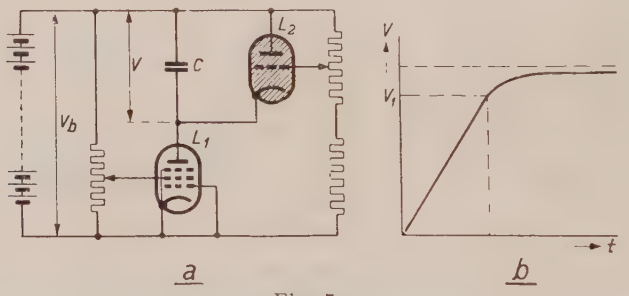


Fig. 7.

Fig. 7 a. Koppling för en kippspänningsapparat med en pentod som uppladdningsrör och ett gasfyllt urladdningsrör.

Fig. 7 b. Spänningskurvan för en kondensator som uppladdas över en pentod.

tionen. Faktorn n skulle man kunna kalla rörets regleringsförhållande. Så snart en ström uppstar, joniseras gasen och de positiva jonerna upphäva gallrets negativa spänning. Röret förhåller sig då, som om gallret över huvud taget icke funnes, och urladdningen kan endast upphöra därigenom att anodspänningen sjunker under släckspänningen (ca 20 volt).

Man inställer alltså tändspänningen på det önskade värdet med den negativa gallerspänningen; är detta t. ex. 200 volt och rörets regleringsförhållande 25, måste gallret göras 8 volt negativt. Förloppet i övrigt är exakt detsamma som vid en glimlampa.

Då kippspänningen måste stiga fullständigt linjärt med tiden, för att ej någon förvrängning av bilden skall uppstå, måste man sörja för att kondensatorns uppladdningsström hålles konstant oberoende av spänningen. Detta sker enklast genom att man an-

vänder en pentod som uppladdningsrör. Fig. 7 a visar ett kopplingsschema för ett kippaggregat, där uppladdningen sker över en pentod och urladdningen över en gastriod. Vid kondensatorns uppladdning erhalles då det i fig. 7 b visade spänningsförloppet. Spänningen stiger som synes linjärt nästan ända till sitt maximalvärde. Vid vissa speciella undersökningar, t. ex. vid undersökningar av förbränningsmotorer, ångmaskiner o. dyl., kan man även i stället för en kippspänningsapparat använda en mekanisk impulsgivare för att åstadkomma den horisontella avböjningen. I detta fall uppladdas en kondensator över ett motstånd, och i samma ögonblick som någon av motor- eller ångmaskinens rörliga delar påverka en kontakt, kortslutes kondensatorn och urladdas.

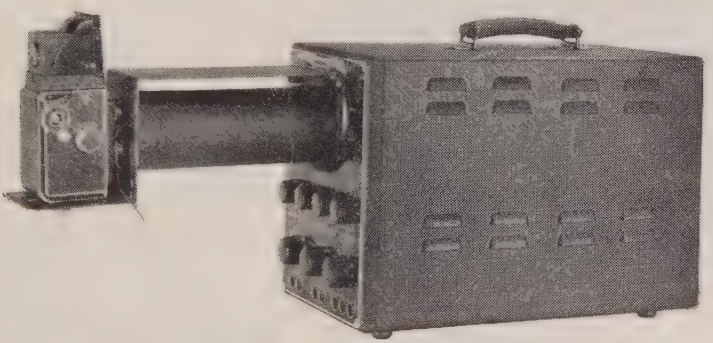


Fig. 8. Komplett katodstråleoscillograf med fotoförsats och kamera.

6. Oscillogrammets avläsning.

Vanligen räcker det med en subjektiv bedömning av kurvan på katodstrålerörets skärm, och fotografering av oscillogrammet är oftast överflödig. Iakttagande av engangsförlopp, alltså icke periodiska förlopp, underlättas därigenom att ett ämne med efterlysande egenskaper användes som luminiscerande skärmmaterial. Efterlysningens varaktighet är beroende av den ursprungliga intensiteten och avtager med stigande skrivhastighet. Då man på experimentell väg kunnat konstatera, att man för bedömande av ett oscillogram behöver en iakttagelsetid av ca 1 sek., blir den maximala skrivhastigheten ca 1,5 km/sek. Om kurvans totallängd i oscillogrammet är t. ex. 2 cm, betyder detta en total skrivtid av $1{,}3 \cdot 10^{-5}$ sek. Vill man upptaga förlopp av ännu kortare varaktighet, måste man fotografera oscillogrammet. Härför finnas speciella stativ, s. k. fotoförsatser, avsedda att anbringas på oscillografen. Dessa avskärma

dagsljuset samt underlätta kamerans inställning (se fig. 8). Vid grönlysande skärm kan man vid fotografering lämpligen använda pankromatisk film, som är känsligast för det gulgröna ljuset.

Förutom av kameran och den fotografiska emulsionen är den skrivhastighet, som kan uppnås, även beroende av katodstrålens strömstyrka. Man kan arbeta normalt även vid stor ljusstyrka. Dessutom kan man reglera gallrets negativa spänning med hjälp av ett till apparatens baksida separat anslutet batteri med strömbrytare. En större katodstråleström och därmed större ljusstyrka har dock den nackdelen, att kurvlinjen blir grövre, varigenom detaljer i bilden framträda mindre skarpt. I praktiken kan man vid en linsöppning av 1 : 2 och en bildkänslighet av $\frac{18°}{10}$ DIN uppnå en skrivhastighet av 2,5 km/sek. och därmed upptaga engångsförlopp med ca 10^{-5} sek. varaktighet.

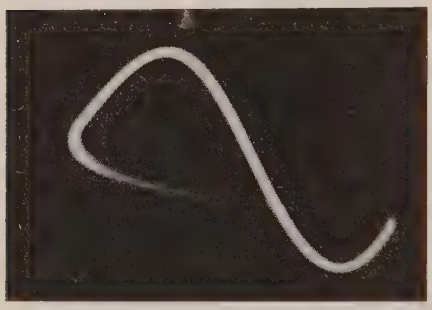


Fig. 9. Fotografisk upptagning av en sinussvängning.

Fig. 9 visar en fotografisk upptagning av en sinussvängning. Kurvans toppar, som genomlöpas långsammare, äro lika ljusstarka som de stigande och fallande delarna på kurvan, vilka genomlöpas hastigare. Som synes kan man knappast uppfatta återgångslinjen från höger till vänster i oscillogrammet på grund av den snabbhet, varmed urladdningen av kippspänningskondensatorn äger rum.

I ett följande nummer av denna tidskrift komma att ges några exempel på katodstråleoscillografens användning (med enklare kopplingsschema) för åskådliggörande av bl. a. fasförskjutning, hysteresiskurvor, rörkarakteristiker, rörlikriktning, induktionsfenomen osv.

Litteratur:

1. Fritz Vilbig, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. Akad. Verlagsges. Leipzig, 1937.
2. H. Busch und E. Brüche, Beitrage zur Elektronenoptik. Leipzig 1937.
3. Heinz Richter und John F. Rider, Die Katodenstrahlröhre. Stuttgart 1938.
4. M. v. Ardenne, Die Kathodenstrahlröhre. Berlin 1933.

Logaritmerna på gymnasiet.

Av STIG COMÉT.

Redan år 1907 kritiserar FELIX KLEIN[1] den allmänt använda metoden att införa logaritmer. Han påvisar bl. a. betänkliga luckor däri, som endast skulle kunna överbryggas med hjälpmedel olämpliga för skolstadiet. Efter en historisk återblick kommer han fram till den metod, som enligt hans mening vore den riktiga för införande av logaritmer, nämligen medelst kvadratur av funktionskurvan $y = \frac{1}{x}$. Dock ansåg han sig ej våga föreslå metoden i den undervisningsplan, i vars utarbetande han deltog. I vårt land har idén upptagits av H. OLDENBURG,[2] som för fjärde realringen utarbetat en metod med integraler, samt G. HÖSSJER,[3] vars metod bygger på en geometrisk egenskap hos kurvan $y = \frac{1}{x}$. Det ligger i sakens natur, att man vid dessa tillvägagångssätt först kommer fram till de naturliga logaritmerna (med e till bas) och därefter genom division med $^e\log 10$ till de briggska.

Nu är det ju så, att man i det fyraåriga realgymnasiets ring II önskar komma fram till logaritmbegreppet så tidigt som möjligt med tanke på de numeriska beräkningar, som äro nödvändiga inom planimetrien och fysiken. Vid Bromma läroverk (och även annorstädes, förmodar jag) påbörjas därför läran om rötter, potenser och logaritmer omedelbart efter rotekvationer och grafisk lösning av algebraiska ekvationer, så att eleverna kunna använda logaritmer före jullovet. Med den använda (vanliga) lärogången komma dock logaritmerna alltför sent, emedan lång tid åtgår till genomgång av rot- och potenslagar och övningsräkning på dessa områden. Det vore önskvärt, att de eftertraktade logaritmerna behandlades först, medan den utförligare behandlingen av rötter och potenser kunde anstå.

[1] F. KLEIN, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, I (*Grundlehren d. math. Wissensch.* XIV), Berlin (1924), s. 155 ff.
[2] Denna tidskr., *12* (1928), s. 4.
[3] Denna tidskr., *15* (1932), s. 140.

Oldenburg antyder ett sätt att kringgå det generella potensbegreppet i ring II; jag är dock rädd, att elevernas uppfattning om logaritmer kan bli oklar på det sättet. Beträffande Hössjers metod får jag endast anmäla betänkligheter mot de geometriska betraktelserna, vilka torde vara svåra på ifrågavarande stadium; som jämförelse kan jag påminna om vilka svårigheter åskådliggörandet av yttre arbetet i ett *pv*-diagram erbjuder (i samma klass), *om* man går in på detta i fysiken. — Ett radikalt sätt vore att helt oförmedlat införa logaritmer, ungefär så här: Varje positivt tal har en logaritm; logaritmer ha egenskaperna: $\log ab = \log a + \log b$, osv. Detta sätt går säkert att använda [1] och kan ju varieras på olika sätt. Man kan låta eleverna »upptäcka» logaritmlagarna ur en logaritmtabell, t. ex. Då kvarstår dock den olustiga frågan, hur tabellen är åstadkommen. Visserligen kan man ange olika elementära metoder för beräkning av logaritmer, men de flesta av dem ha aldrig i verkligheten använts vid beräkning av en tabell.

Här skall jag nu redogöra för en variant [2] av denna metod, som jag under innevarande läsår använt i ring R II[4]a vid Bromma läroverk. Eleverna förutsättas ha stiftat bekantskap med funktionsbegreppet och med grafisk framställning i rätvinkliga koordinater samt helst även med definitionen på $\sqrt[n]{a}$. Dessutom böra de under den tid, som närmast föregår införandet av logaritmer, ha träffat på några uppgifter, i vilka multiplikation och division av mångsiffriga tal måst utföras för hand (grafisk ekvationslösning, planimetri och fysik giva tillfälle härtill), så att verkligen behovet av ett bekvämt hjälpmedel blir aktuellt.

Logaritmer och potenser i R II[4].

Vi önska närmast utföra multiplikation på bekvämare sätt. Ett dylikt erbjuder sig för multiplikation av *vissa* tal, om man gör upp en tabell över digniteter av t. ex. talet 2 (tabell I). I andra kolumnen stå de exponenter, till vilka 2 upphöjts.

Uppgiften: »Hitta på något sätt att med hjälp av denna tabell bestämma $32 \cdot 128$ utan att multiplicera» löses lätt av eleverna. Multi-

[1] Se t. ex. Jensen-Torsting, Matematik for Begyndere, København (1942); rec. i denna tidskr., *26*, s. 172.

[2] Lektor A. Wahlgren har haft vänligheten att låta mig ta del av konceptet till det föredrag, *Ett empiriskt införande av logaritmer*, som han alltsedan h. t. 1935 flera gånger hållit för lärarkandidater. Däri utvecklas en annan variant av metoden, som utgår från samma inledande synpunkter som den som här skall beskrivas. Utformningen är dock helt olika.

plikationen har sålunda, medelst tabellen, ersatts av en addition. Då addition är det bekvämare räknesättet, föranledas vi härav att söka åstadkomma en tabell, som förvandlar varje multiplikation till en addition, en s. k. logaritmtabell. Vår nyss uppskrivna tabell är just en sådan av mycket ofullständigt slag. Varje tal i den andra kolumnen kan kallas logaritmen för det bredvid stående talet. Den nyss gjorda uträkningen kan då uttryckas på följande sätt: $\log (32 \cdot 128) = \log 32 + \log 128$. Vår uppgift är nu att förfärdiga en tabell, så att denna

Grundregel I: $\log ab = \log a + \log b$

blir användbar, vilka siffervärden man än ger åt a och b.

2^n	n
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13

Tabell I.

Nackdelen med vår tabell I är ju, att talen 2, 4, 8, osv. ligga för glest. Hur skall man kunna göra en tabell, där talen ligga tätare? Frågan besvaras omedelbart av eleverna: Man skall beräkna digniteterna av ett mindre tal än 2 (1,5; 1,1; 1,000005 föreslogos!). Här påpekas, att ju närmare 1 det valda talets värde ligger, desto tätare ligga dess digniteters värden; dessa kunna i själva verket fås att ligga hur tätt som helst.

Detta var just den metod, som användes av dem, som första gången uträknade en logaritmtabell: skotten Napier använde 1—0,0000001 (Edinburgh 1614) och schweizaren Bürgi 1,0001 (Prag 1620) som första tal i tabellen. För att få en uppfattning om logaritmtabellens konstruktion ämna vi använda samma metod. Då vi emellertid ej eftersträva någon hög noggrannhet (sedermera ha vi ju de tryckta tabellerna att tillgå), nöja vi oss med att välja 1,1 som utgångspunkt. — Här anmärkes, att man med hjälp av »högre matematik» kan uppnå stor noggrannhet utan alltför tidsödande räkningar.

De exponenter, som anges i tabellen, kunna väljas till logaritmer för de motsvarande talen. I stället för exponenterna skulle man dock därtill kunna välja exponenterna, alla multiplicerade med ett och samma men f. ö. godtyckliga tal k. Grundregel I satisfieras nämligen av k, $2k$, $3k$, ... lika väl som av 1, 2, 3, ... Detta tal kan man, som vi strax skola se, välja så att något lämpligt tal får särskilt enkelt värde på sin logaritm. Vi avtala att välja k så, att följande regel blir uppfylld:

Grundregel II: $\log 10 = 1$.

Att detta är en för praktisk räkning lämplig regel framgår, om den kombineras med grundregel I: $\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a$.

Talen a och $10a$ (samt $100a$ osv.), som bestå av samma siffror i samma ordning endast med decimalkommat på olika plats, få på så sätt logaritmer, där endast heltalssiffran är olika, medan de ha samma decimaler. Logaritmer, erhållna genom att k valts så, att grundregel II uppfylles, kallas efter sin uppfinnare briggska logaritmer (engelsmannen Briggs, 1617).

För att slutligen kunna (approximativt) finna logaritmerna även för sådana tal, som ligga mellan de i tabellen upptagna, införa vi följande:

Grundregel III: Om $a > b$, så skall $\log a > \log b$.

Denna regel innebär, att interpolation kan tillåtas.

Nu uträkna vi vår logaritmtabell (se tabell II). Därvid observeras, att $1{,}1^{n+1} = (1 + 0{,}1) \cdot 1{,}1^n = 1{,}1^n + 0{,}1 \cdot 1{,}1^n$, vilket gör beräkningen enkel, om digniteterna uträknas i tur och ordning ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Kolumnen $a = 1{,}1^n$ bör kunna vara uträknad inom 10 minuter. Fyra decimaler medtagas. Därpå skall $k = \log 1{,}1$ bestämmas. Av tabellen framgår, att enligt grundreglerna II och III skall $24k < 1$ men $25k > 1$. Genom grafisk interpolation (bekant från grafisk ekvationslösning) finner man, att $24{,}15k = 1$, varav $k = 0{,}04140$ (division för hand, för sista gången). Nu kan kolumnen $\log a\ (= nk)$ ifyllas, vilket också går snabbt, då man för varje steg endast har att addera 0,0414. För att få anknytning till den tryckta tabellen bestämmes slutligen $\log a$ för $a = 2, 3, \ldots, 9$ (eller åtminstone för några av dessa a-värden) genom grafisk interpolation. Resultaten överensstämma med 3-ställig noggrannhet med den tryckta tabellens värden, d. v. s. $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ osv. Vid lämpligt tillfälle bör framhållas, att det endast kan bli fråga om att räkna med närmevärden.

Beträffande återstoden av lärogången kan jag fatta mig kortare. Av grundregel I följer: $\log abc = \log ab + \log c = \log a + \log b + \log c$ och liknande för godtyckligt antal faktorer. Speciellt $\log a^n = n \log a$ för n heltal. Vidare: $\log a = \log (a \cdot 1) = \log a + \log 1$; alltså måste $\log 1 = 0$. Härav följer, om så önskas: $0 = \log 1 = \log \left(a \cdot \frac{1}{a} \right) = \log a + \log \frac{1}{a}$, alltså $\log \frac{1}{a} = -\log a$.

Av $\log a = \log \left(b \cdot \frac{a}{b} \right) = \log b + \log \frac{a}{b}$ följer: $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$,

och av $\log a = \log (\sqrt[n]{a})^n = n \log \sqrt[n]{a}$ följer: $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$.

Då formeln för $\log \frac{1}{a}$ $\left(\text{eller } \log \frac{a}{b} \right)$ ger oss möjlighet att uträkna

nk	$a = 1{,}1^n$	log a	nk	$a = 1{,}1^n$	log a
k	1,1	0,0414	$14k$	3,7978	0,5796
	11	414		3798	414
$2k$	1,21	0828	$15k$	4,1776	6210
	121	414		4178	414
$3k$	1,331	1242	$16k$	4,5954	6624
	1331	414		4595	414
$4k$	1,4641	1656	$17k$	5,0549	7038
	1464	414		5055	414
$5k$	1,6105	2070	$18k$	5,5604	7452
	1611	414		5560	414
$6k$	1,7716	2484	$19k$	6,1164	7866
	1772	414		6116	414
$7k$	1,9488	2898	$20k$	6,7280	8280
	1949	414		6728	414
$8k$	2,1437	3312	$21k$	7,4008	8694
	2144	414		7401	414
$9k$	2,3581	3726	$22k$	8,1409	9108
	2358	414		8141	414
$10k$	2,5939	4140	$23k$	8,9550	9522
	2594	414		8955	414
$11k$	2,8533	4554	$24k$	9,8505	9936
	2853	414		9851	414
$12k$	3,1386	4968	$25k$	10,8356	1,0350
	3139	414			
$13k$	3,4525	5382			
	3453	414			

Tabell II. Med petitstil angivas de siffror, som skola adderas, för att man från ett tal i tabellen skall komma till det närmast nedanför stående.

logaritmerna även för tal mellan 0 och 1, ha vi därmed funnit, att *grundreglerna I, II, III definiera logaritmerna för alla positiva tal.*

Det hittills beskrivna medhinnes på 3 lektionstimmar, varefter logaritmernas praktiska handhavande kan genomgås. Först sedan detta ordentligt inlärts, kommer teoriens fortsättning.

Närmast är det då potensbegreppet, det gäller. I själva verket erbjuder detta nu inga svårigheter. Eleverna äro vid den tidpunkten vanda vid att det motsvarande talet till $n \cdot \log a$ är a^n. Ger man dem ett (några) sifferexempel med bråk eller negativt tal i stället för n, t. ex. $0{,}3 \cdot \log 7$, låter dem uträkna detta och bestämma motsvarande tal samt frågar dem efter en lämplig beteckning härpå med användning av de givna talen 0,3 och 7, så torde svaret säkert bli $7^{0{,}3}$. Därmed har man fått anledning till att defi-

niera a^x såsom det motsvarande talet till $x \cdot \log a$ för godtyckliga x, varav $\log a^x = x \cdot \log a$. För $a = 10$ ger denna definition, att 10^x är det motsvarande talet till $x \cdot \log 10 = x$.

Här kan man, om så önskas, ingå på logaritmer med annan bas än 10. De definieras på vanligt sätt: Om $B^x = a$, kallas x för ${}^B\log a$. Beräkningen av dem blir den vanliga: Av $B^x = a$ följer $x \cdot \log B = \log a$, varur $(B \neq 1)$ $x = \dfrac{\log a}{\log B}$ (varvid log betecknar briggska logaritmer). Logaritmlagarna bevisas efter mönstret:

$${}^B\log ab = \frac{\log ab}{\log B} = \frac{\log a + \log b}{\log B} = \frac{\log a}{\log B} + \frac{\log b}{\log B} = {}^B\log a + {}^B\log b.$$

Grundreglerna II och III kunna givas en generellare form:

Grundregel II′: ${}^B\log B = 1$.

Grundregel III′: ${}^B\log x$ är en monoton funktion av x.

Oberoende av logaritmer med godtycklig bas står läran om potenser, som blir mycket enkel. Multiplikationslagen $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (x och y godtyckliga) bevisas genom logaritmering. Man har $\log (a^x \cdot a^y) = \log a^x + \log a^y = x \cdot \log a + y \cdot \log a = (x + y) \cdot \log a = \log a^{x+y}$. Emedan logaritmerna äro lika, maste talen vara lika, vilket bevisar satsen. Övriga potenslagar bevisas analogt. Särskilt påminnes om att $a^0 = 1$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ och $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ nu äro bevisbara satser.

Beträffande räkning med högre rötter torde det vara mest praktiskt att låta eleverna konsekvent använda potenser. Sådana problem som att skriva $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ såsom en enda rot få då sin naturliga lösning. En viktig sak, som ej får glömmas bort, är att potenser endast definierats, då basen är positiv, medan däremot radikanden kan vara negativ, om rotindex är udda. Innan en rot skrives i potensform, måste man alltså genom utsättande av minustecken på lämpliga ställen sörja för att *potensens bas blir positiv*. Enligt min mening kommer detta villkor ingalunda att utgöra någon komplikation utan snarare, genom sin undantagslöshet, en hjälp. Förenkla exempelvis $\sqrt[6]{x^2}$. Om $x \geqq 0$, är utan vidare $\sqrt[6]{x^2} = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Om $x < 0$, få icke potenser av x förekomma, men väl av $-x$, som är > 0. Detta åstadkommes så här: $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{(-x)^2} = (-x)^{\frac{2}{6}} = (-x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$. En annan synpunkt: $\sqrt[6]{x^2}$ kan alltid skrivas $= (x^2)^{\frac{1}{6}}$, men detta $= x^{\frac{2}{6}}$ endast om $x \geqq 0$, men $= (-x)^{\frac{2}{6}}$, om $x < 0$.

Kommentar.

Den angivna metoden att införa logaritmer torde närmast böra rubriceras som empirisk. Logaritmerna definieras ju såsom tal, uppfyllande de tre grundreglerna. Det empiriska draget har jag dock sökt mildra dels genom att lämna ganska utförliga motiveringar till grundreglerna (under lektionen blir framställningen givetvis ännu bredare), dels genom att låta eleverna få möjlighet att själva uträkna ett stycke av en logaritmtabell. En lucka, vars existens jag är väl medveten om, består däri, att man ingenstädes visar definitionens entydighet, t. ex. att man erhåller approximativt samma värde på $\log x$, vare sig man vid beräkningen använder potenser av 1,001 eller 1,0001. För att fylla luckan skulle strängt taget erfordras en limesövergång för uttrycket $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ eller också kontinuitetsbetraktelser ekvivalenta med dem, som leda över från a^x med rationellt x till a^x med irrationellt x. Således i varje fall en sak, som ej tillhör andra ringen. Det konkreta tillvägagångssätt, som användes vid tabellberäkningen, gör emellertid, att bristen på stränghet knappast gör sig påmint. Mot denna brist må ställas såsom förtjänst hos metoden den självklarhet, med vilken det framgår, att endast positiva tal böra tilldelas logaritmer (och att basen i en generaliserad potens skall vara positiv). Beträffande detta, se Klein (*loc. cit.*). Sammanfattningsvis torde nog metoden få anses såsom lämplig för det första införandet av logaritmer, framförallt enär den mycket snabbt för till det huvudsakliga målet: numerisk räkning med dessa.

När det längre fram, antingen det nu blir i skolan (enligt en framtida undervisningsplan?) eller vid universitetet, gäller att studera logaritmfunktionen såsom sådan, lär det väl knappast råda någon tvekan om att den skall *definieras* med hjälp av kvadratur av kurvan $y=\frac{1}{x}$, såsom Klein framhållit. Man har sedan blott att visa, att den så definierade funktionen uppfyller de tre grundreglerna (II och III generaliserade), för att sammanhanget skall bli klart. Den nyss omnämnda luckan blir naturligtvis då automatiskt fylld.

Kemisk formelskrivning.

av **KJELL RUNQUIST.**

Berzelius' dualistiska system vid skrivning av kemiska formler representerade naturligtvis ett för sin tid betydande framsteg, och ingen bestrider, att det under decennier haft en stor uppgift att fylla. Men efter den moderna atomforskningens genombrott vet man, att det Berzelianska skrivsättet, även om det formellt kan ge vissa resultat av värde, föga svarar mot den egentliga reaktionsmekanismen i de kemiska förloppen. Man vet sålunda numera, att den kemiska reaktionen, i den mån den höjer sig över de rena jonbytenas nivå, betingas av en överflyttning av elektroner från en atom till en annan. Kemisten får icke av traditionella hänsyn hindras att draga konsekvenserna av den ändrade uppfattningen. Det dualistiska skrivsättet har i ljuset av den nyare forskningens resultat förlorat sitt existensberättigande, och tiden synes nu vara mogen för dess likviderande.

Vid läroverkens kemiundervisning torde det dualistiska skrivsättet fortfarande användas i rätt stor utsträckning. Orsaken härtill är givetvis, att man icke gärna överger ett gammalt beprövat system, som visat sig användbart, innan man erhållit garanti för att det nya, som sättes i stället, är fullvärdigt. Säkert torde emellertid vara, att det förhandenvarande sakläget känts som en börda för många kemilärare. Från åtskilliga håll ha också försök gjorts att vid skrivning av oxidations- och reduktionsformler tillämpa modernare idéer. Dessa tendenser torde också i princip accepteras av ett mycket stort antal lärare. Av vikt är emellertid att de nya metoderna givas en lika fast utformning som de hittillsvarande. Följande system, som utarbetats av rektor T. Rosenberg vid Uddevalla läroverk, har många företräden. Det har av honom och av undertecknad under flera år prövats vid läroverket och har ständigt fungerat tillfredsställande. Metoden klarlägges bäst genom exempel.

Exempel 1. *Reaktionsformeln för oxidation av ferrosulfat med kaliumpermanganat i svavelsur lösning.*

I sur lösning reduceras permanganatet till manganoförening. Ferrojonen oxideras till ferrijon. Som en första början till reak-

tionsformel uppskriva vi följande:

$$\overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + \overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+II}{Mn}^{+2} + \overset{+III}{Fe}^{+3}.$$

I formeln ha tillsvidare endast uppförts de joner, vilkas atomer deltaga i elektronutbytet. Atomer, vilkas valens icke ändras, ha för ögonblicket mindre intresse och utelämnas. Varje medtagen jon har erhållit en dubbel numrering. *Atomvalenserna* anges med romerska siffror, *jonvalenserna* med arabiska. I båda fallen skola valenserna räknas med tecken. Så snart det är fråga om elementära joner överensstämma de båda sifferbeteckningarna helt.

Manganatomens valens faller från +VII till +II, vilket i realiteten innebär, att atomen uppfångar 5 elektroner. Järnatomens valens stiger från +II till +III, den avger sålunda endast en elektron. Varje manganatom måste alltså mottaga elektroner från 5 järnatomer. Eftersom antalet avgivna och mottagna elektroner måste vara detsamma, är det nödvändigt att i den påbörjade reaktionsformeln ovan femdubbla antalet ferro- och ferrijoner. Vi få alltså

$$\overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + 5\overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+II}{Mn}^{+2} + 5\overset{+III}{Fe}^{+3}.$$

Den princip, som nu utnyttjats, kunna vi benämna *lagen om elektronernas oförstörbarhet*. Det resonemang, som ledde till koefficienternas utsättande, kan fastläggas i följande formel:

$$1 \cdot (VII - II) = 5 \cdot (III - II),$$

eller med annat skrivsätt:

$$1 \cdot VII + 5 \cdot II = 1 \cdot II + 5 \cdot III.$$

I själva verket är det karakteristiskt för en kemisk reaktionsformel, som reglerats med hänsyn till lagen om elektronernas oförstörbarhet, att summan av produkterna av koefficienter och atomvalenser i båda membra äro lika. I den sista formuleringen, som givits valensrelationen, är analogin med hävstångslagen mycket påtaglig.

Vi skola nu undersöka, om valensrelationen är giltig även för jonvalenserna. Deras summa är i vänstra ledet

$$1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 9;$$

i högra ledet

$$1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 17.$$

Vi iakttaga här en bristande överensstämmelse, i det vänstra ledet har värdet 9, högra ledet 17. Avvikelsen har sin grund däri, att vi hittills försummat vätejonernas inverkan. Den försvinner

helt om vi öka vänstra ledet med 8. Vi få då likheten

$$8 - 1 + 10 = 2 + 15.$$

I reaktionsformeln svarar förfarandet mot, att vänstra ledet ökas med $8\,H^{+1}$.

$$8H^{+1} + \overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + 5\overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+II}{Mn}^{+2} + 5\overset{+III}{Fe}^{+3}.$$

Den princip, som vi nu byggt på, kan benämnas *lagen om lösningens elektroneutralitet.*

Allt väsentligt i den sökta formeln är nu skrivet. Det återstår endast att tillägga de oväsentliga beståndsdelarna, vilket inte möter den ringaste svårighet. Resultatet blir

$$4\,H_2SO_4 + KMnO_4 + 5\,FeSO_4 \rightarrow MnSO_4 + 2{,}5\,Fe_2(SO_4)_3 + \\ + 0{,}5\,K_2SO_4 + 4\,H_2O.$$

Slutligen böra samtliga koefficienter fördubblas med tanke på bråkdelarna i talen 2,5 och 0,5.

Den studerade reaktionen kan endast gå för sig i sur lösning. Vi se, att denna synpunkt framkommer såsom en direkt konsekvens av metoden.

Av utrymmesskäl är det nödvändigt, att behandlingen av de påföljande exemplen blir i möjligaste mån kortfattad. Lagen om elektronernas oförstörbarhet benämna vi sålunda *M-regeln* (massregeln) och lagen om lösningens elektroneutralitet *N-regeln* (neutralitetsregeln). Även i andra avseenden kommer största möjliga koncentration att eftersträvas.

Exempel 2. *Samma ex. som nr 1, men neutral lösning i stället för sur.*

I neutral lösning reduceras permanganatet till mangandioxid. Vi få

$$\overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + \overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+IV}{Mn}O_2^{0} + \overset{+III}{Fe}^{+3}.$$

Då brunsten är olöslig i vatten, räkna vi icke med någon jonisering av detta ämne. Vi uppfatta därför MnO_2 som nollvärd jon. Koefficienterna bildas enligt schemat

$$1 \cdot (VII - IV) = 3 \cdot (III - II).$$

$$\overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + 3\overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+IV}{Mn}O_2^{0} + 3\overset{+III}{Fe}^{+3}.$$

N-regeln ger

$$-1 + 6 = 0 + 9 - 4,$$

där termen -1 tillfogats i högra ledet för att åstadkomma likhet.

Korrektionen kan i detta fall inte vidtagas med vänstra ledet, då inga vätejoner stå till förfogande. Talet — 1 svarar mot laddningen hos 4 nybildade hydroxyljoner. Vi få

$$\overset{+VII}{Mn}O_4^{-1} + 3\overset{+II}{Fe}^{+2} \rightarrow \overset{+IV}{Mn}O_2^{0} + 3\overset{+III}{Fe}^{+3} + 4OH^{-1}.$$

Den fullständiga reaktionsformeln blir

$$KMnO_4 + 3\,FeSO_4 + 2\,H_2O = MnO_2 + Fe_2(SO_4)_3 + KOH + Fe(OH)_3.$$

Principiellt oväsentligt är, om i högra ledet mangandioxiden ersättes med något hydrat, motsvarande valensstadiet IV.

Den här tillämpade metoden sätter ingalunda de kemiska kunskaperna ur spelet, en nödvändig förutsättning för att man skall kunna lösa uppgiften är att man vet, att manganens valens i detta fall sjunker till värdet IV.

Exempel 3. *Reaktionsformel för koppars upplösning i salpetersyra under förutsättning att NO bildas.*

$$\overset{0}{Cu}^0 + \overset{+V}{N}O_3^{-1} \rightarrow \overset{+II}{Cu}^{+2} + \overset{+II}{NO}^0;$$

$$3 \cdot (II - 0) = 2 \cdot (V - II); \qquad \text{(M-regeln).}$$

$$3\overset{0}{Cu}^0 + 2\overset{+V}{N}O_3^{-1} \rightarrow 3\overset{+II}{Cu}^{+2} + 2\overset{+II}{NO}^0;$$

$$8 + 0 - 2 = 6 + 0; \qquad \text{(N-regeln).}$$

Termen 8 har tillsatts i vänstra ledet.

$$8\overset{+1}{H} + 3\overset{0}{Cu}^0 + 2\overset{+V}{N}O_3^{-1} \rightarrow 3\overset{+II}{Cu}^{+2} + 2\overset{+II}{NO}^0;$$

$$3Cu + 8HNO_3 = 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O.$$

Intressant är att se, att de $6\,NO_3^{-1}$, som inte undergå någon förändring genom reaktionen, inte komma fram såsom en följd av den använda metoden, utan måste senare tillfogas i vartdera ledet. Metoden tar endast befattning med väsentliga fenomen.

Exempel 4. *Klorgas reagerar i köld med kaliumhydroxid. Därefter uppvärmes lösningen.*

Att klorgasen har molekylformeln Cl_2 är av sekundär betydelse.[1] Vi få i första fallet

$$\overset{0}{Cl}^0 + \overset{0}{Cl}^0 \rightarrow \overset{-I}{Cl}^{-1} + \overset{+I}{ClO}^{-1};$$

$$1 \cdot [0 - (-I)] = 1 \cdot (I - 0); \qquad \text{(M-regeln).}$$

$$-2 + 0 + 0 = -1 - 1. \qquad \text{(N-regeln).}$$

[1] Jämför tillägget till ex. 6, där dylika fall närmare diskuteras.

I vänstra ledet har termen —2 tillfogats, svarande mot $2\,OH^{-1}$ i reaktionsformeln.

$$2OH^{-1} + \overset{0}{Cl^0} + \overset{0}{Cl^0} \rightarrow \overset{-I}{Cl^{-1}} + \overset{+I}{ClO^{-1}};$$

$$2KOH + Cl_2 \rightarrow KCl + KClO + H_2O.$$

I det nu behandlade fallet, liksom i det närmast följande, är det fråga om autoxidation. Vi få i det senare fallet

$$\overset{+I}{ClO^{-1}} + \overset{+I}{ClO^{-1}} \rightarrow \overset{-I}{Cl^{-1}} + \overset{+V}{ClO_3^{-1}};$$

$$2 \cdot [I - (-I)] = 1 \cdot (V - I); \qquad \text{M-regeln.}$$

$$\overset{+I}{2ClO^{-1}} + \overset{+I}{ClO^{-1}} \rightarrow \overset{-I}{2Cl^{-1}} + \overset{+V}{ClO_3^{-1}};$$

$$-2 - 1 = -2 - 1; \qquad \text{(N-regeln).}$$

$$2KClO + KClO \rightarrow 2KCl + KClO_3, \text{ etc.}$$

Exempel 5. *En lösning av kaliumманganat utspädes med vatten, varvid lösningens färg övergår från grön till violett.*

Manganatet övergår till permanganat och mangandioxid.

$$\overset{+VI}{MnO_4^{-2}} + \overset{+VI}{MnO_4^{-2}} \rightarrow \overset{+VII}{MnO_4^{-1}} + \overset{+IV}{MnO_2^0};$$

$$2 \cdot (VII - VI) = (VI - IV); \qquad \text{(M-regeln).}$$

$$\overset{+VI}{2MnO_4^{-2}} + \overset{+VI}{MnO_4^{-2}} \rightarrow \overset{+VII}{2MnO_4^{-1}} + \overset{+VI}{MnO_2^0};$$

$$-4 - 2 = -2 + 0 - 4; \quad \text{(N-regeln).}$$

Tillägget —4 i högra ledet svarar mot $4\,OH^{-1}$. Vi få

$$3\,K_2MnO_4 + 2\,H_2O \rightarrow 2\,KMnO_4 + MnO_2 + 4\,KOH.$$

Exempel 6. *Oxalsyra reducerar ferriklorid till ferroklorid.*

Svårigheten i detta exempel är, att oxalsyrans strukturformel inte följer det vanliga, för de oorganiska föreningarna gällande schemat. De två kolatomerna i oxalsyrans molekyl binda varandra. Då denna bindning upplöses, frigöras två elektroner, och denna omständighet skulle i detta och i liknande fall kunna tagas till utgångspunkt för den teoretiska behandlingen. Till ett riktigt resultat kommer man ävenledes genom fiktionen, att kolet i oxalsyran har valensen III. I själva verket förbrukas en valens genom den inbördes bindningen kolatomerna emellan, varför endast tre valenser från varje kolatom verka utåt.

$$\overset{+III}{C_2O_4^{-2}} + \overset{+III}{Fe^{+3}} \rightarrow 2\overset{+IV}{CO_2^{0}} + \overset{+II}{Fe^{+2}};$$

$$2 \cdot (IV - III) = 2 \cdot (III - II); \quad \text{(M-regeln).}$$

$$\overset{+III}{C_2O_4^{-2}} + 2\overset{+III}{Fe^{+3}} \rightarrow 2\overset{+IV}{CO_2^{0}} + 2\overset{+II}{Fe^{+2}};$$

$$-2 + 6 = 0 + 4; \quad \text{(N-regeln).}$$

$$H_2C_2O_4 + 2FeCl_3 \rightarrow 2CO_2 + 2FeCl_2 + 2HCl.$$

På liknande sätt kunna ämnen sådana som C_2H_4, H_2O_2, ja t. o. m. Cl_2 etc. behandlas. För den, som till äventyrs stötes av det i denna lösning gjorda antagandet, stå andra vägar till buds. Utrymmet förbjuder mig dock, att ingående dryfta andra förslag till vilkas utformning jag inbjuder den intresserade läsaren.

Det är min förhoppning, att rektor Rosenbergs metod skall prövas och accepteras av ett stort antal kemilärare, då den står i god samklang med modern uppfattning av redoxprocesserna och även i övrigt erbjuder stora fördelar.

Matematiklärarkurs vid Stockholms högskola.

Under tiden 24 januari—11 februari i år anordnades vid högskolan en s. k. magisterkurs av Studentkårens studieråd och föreningen Kursverksamheten. Första veckan ägnades åt en allmän pedagogisk del, medan återstoden av tiden upptog en speciell del omfattande ämnena matematik och tyska. Avsikten med dessa kurser var bl. a. att pröva vissa delar av ett av studierådet till 1943 års studentkonferens framlagt förslag till nya former för lärarutbildningen.

Det väsentliga i förslaget är, att de nuvarande fordringarna i fil. ämbetsexamen i stort sett bibehållas, medan den utbildning, som är speciellt erforderlig för blivande ämneslärare, ges i ett sammanhang omedelbart efter de teoretiska studiernas avslutande, innan den första lärartjänstgöringen påbörjas. Läraraspiranten skulle enligt förslaget genomgå en magisterkurs, under vilken varje skolämne, som ingår i hans examen, skulle behandlas under en tid av ca två veckor. Dessa kurser skulle förläggas till universiteten och ledas av läroverkslärare.

Den nu avhållna kursen i matematik, i vilken ett 30-tal studenter och yngre lärare deltogo, stod under ledning av ett presidium, bestående av bl. a. undervisningsrådet K. Kärre (ordförande) och undervisningsrådet R. Lundblad, rektor A. Björkeson jämte undertecknad som kursledare.

På grund av nödvändigheten att begränsa tiden måste man välja mellan att genomgå något avsnitt grundligt eller att mera ytligt behandla alla kursmoment. I detta fall beslöt man att följa det förra alternativet, varvid större delen av tiden skulle ägnas åt geometriundervisningen. Det måste anses önskvärt, att lärareaspiranten besitter nödiga insikter även i den syntetiska geometrien, vilket moment emellertid ej ingår i kursfordringarna för ämbetsexamen. Med tanke härpå kom kursen till stor del att omfatta en analys av geometriens grunder och dessas tillrättaläggande för skolstadiet samt i samband därmed metodiska synpunkter och råd rörande de olika kursmomenten av geometriundervisningen.

I en serie på 18 föreläsningar behandlade lektor R. Nyhlén, Göteborg, följande huvudmoment:

1. Empirisk-deduktiv framställning av kongruens- och parallellteorien.

2. Ett enkelt axiomsystem som grund vid geometriens uppbyggnad. Existenssatsernas roll och bevisets natur.

3. Satser om ordning av punkter och strålar. Sträck- och vinkelräkning och i samband därmed de s. k. storhetsaxiomen ifråga om sträckor och vinklar. Snittpunktsproblemen.

4. Jämförelseteorier för sträckor, vinklar och ytor och i samband därmed införande av mätetal. Geometriens aritmetisering.

Ifråga om den syntetiska geometrien framhöll N. speciellt, att undervisningen borde uppdelas i tre stadier. I det första stadiet är metoden empirisk, d. v. s. eleverna få formulera satser på grundval av experiment. För att enkelt kunna utföra dessa experiment inför man sträck- och vinkeltransportör. Så småningom övergår man till att ur satser, som erhållits på experimentell väg, härleda nya satser. Bevismetoden innebär då endast, att man stöder sig på förut utförda experiment. Först sedan eleverna blivit förtrogna med bevismetoden, påpekas möjligheten att med hjälp av vissa satser bevisa de övriga. Steget är sedan icke långt till att välja dessa som utgångspunkter, d. v. s. övergå till deduktiv framställning. Vidare framhöll N., att varje framställning av den syntetiska geometrien på skolstadiet givetvis måste utgöra en mer eller mindre stark förenkling av en i logiskt avseende korrekt teori. Väsentligt är dock, att denna förenkling genomföres efter lämpliga principer. De största svårigheterna gruppera sig omkring satserna om ord-

ning av punkter och strålar, snittpunkter och entydighet. I lämplig utsträckning bör därför dessa satser uteslutas.

Lektor N. visade också, hur man på olika stadier kan införa mätetal för sträckor och vinklar med utgångspunkt från de införda axiomen. Vidare genomfördes en jämförelseteori för ytor utan användande av speciella axiom om ytor. Med denna framställning som bakgrund kan man direkt aritmetisera teorien för ytor. Genom att endast upptaga ytteorien i aritmetiserad form erhåller man en för skolstadiet avpassad framställning. Med utgångspunkt från teorien för mätetal för sträckor och vinklar behandlades även övergången från syntetisk geometri till likformighetslära, trigonometri och analytisk geometri.

Adjunkt S. Comét berörde i en serie på fyra föreläsningar metodiska synpunkter på geometriundervisningen i anslutning till ett par av de vanligaste skolböckerna. Härvid behandlades bl. a. stoffurvalet, varvid C. framhöll vilka satser, som böra läsas noggrant och vilka, som lämpligen kunna uteslutas. Vidare genomgick C. geometrilektionens uppläggning och speciellt metodiken vid förhör av läxor.

Kursen omfattade även följande föreläsningar. Undervisningsrådet R. Lundblad talade om »Matematikens ställning i våra skolor» och gav därvid en framställning av matematikkursernas förändring under årens lopp samt den förskjutning i målet för matematikundervisningen, som ägt rum. Lektor A. Uhler behandlade de matematiska skrivningarna, vad de ha för uppgift, hur de skola anordnas, rättas och bedömas. Slutligen redogjorde rektor S. Åstrand för »Matematiken i folkbildningsarbetet», vilket föredrag åtföljdes av diskussion.

Volrath Adelsköld.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.[1]

Årsmötet den 7—8 jan. 1944.

Årsmötet ägde rum på Tekniska högskolans hörsal för fysik i Stockholm. Ordföranden, rektor Torsten Wetterblad, hälsade de närvarande välkomna och erinrade om att det i år är jämnt 10 år sedan föreningen bildades. Styrelse- och revisionsberättelserna föredrogs, och skattmästaren och den avgående styrelsen beviljades ansvarsfrihet. Till ordförande för år 1944 omvaldes rektor Wetterblad. Övriga medlemmar i styrelsen omvaldes utom lektor Starck och rektor Söderborg, som undanbett sig återval. I deras ställe invaldes lektor F. Kiessling, Göteborg, och lektor E. Nordefeldt, Stockholm. Förutvarande revisorer — rektor M. Kolmodin och inspektör E. Hedfors — omvaldes, likaså revisorssuppleanterna adjunkterna V. Carlsson och S. Comét.

Efter årsmötesförhandlingarna höll amanuensen, fil. lic. N. Löfgren föredrag över »Elektronteoriens tillämpningar på kemien». Föredragshållaren redogjorde först för ett par äldre valensteorier och påvisade vilket oerhört framsteg elektronteorien utgör, därigenom att den kunnat sprida klarhet över den kemiska reaktionsmekanismen. Den kemiska bindningen blir med elektronteorien naturlig och begriplig, och sådana dunkla begrepp som huvud- och bivalenser, restaffinitet o. dyl. har blivit överflödiga. Efter en kort och originell översikt över det periodiska systemet lämnades därefter en detaljerad redogörelse för reaktionsförloppen vid några olika typer av reaktioner.

Efter lunch på Tekniska högskolans kårhusrestaurang avlades besök dels vid Vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik vid Frescati, som förevisades av professor M. Siegbahn och dennes assistenter, dels vid Statens provningsanstalt. Anstaltens chef, överdirektör Otto Forsman, lämnade en redogörelse för provningsanstaltens tillkomst och arbetsuppgifter, varefter en rundvandring vidtog med avdelningsföreståndarna som ciceroner. För att bereda alla som så önskade, tillfälle att deltaga i båda besöken, upprepades dessa följande dag på morgonen.

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnes i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45 och 113, 1939; *23*, 41 och 234, 1940; *24*, 38 och 89, 1941; *25*; 38 och 153, 1942; *26*, 39, 94 och 220, 1943.

En närmare redogörelse för arbetet vid provningsanstalten kommer senare att införas i Elementa. Beträffande forskningsinstitutet för fysik hänvisas till redogörelsen för besöket i april 1943 (Elementa *26:* sid. 94).

På eftermiddagen samlades mötesdeltagarna på Stockholms Byggnadsförening, där lektor Agne Wahlgren inledde en diskussion över ämnet

Realgymnasiets matematikkurser.

Talaren erinrade om, att matematikens timantal minskats från sammanlagt 28 + 20 veckotimmar (vtr) år 1878 i de 4 högsta klasserna (gymnasiet) + de närmast föregående 4 klasserna (realskolan) till nuvarande 21 vtr på gymnasiet + 14,5 vtr i realskolans klasser 1—4. Frågan är, om minskningen i timantalet kompenserats av en motsvarande nedskärning av kurserna. En lättnad vanns, då år 1905 den särskilda geometriska skrivningen i studentexamen togs bort, men den nedskärning av realskolans geometrikurs som gjordes år 1933, betydde en försämring. Det har blivit nödvändigt att ägna mera tid åt geometrin på gymnasiet, och ändå måste man räkna med ett mindre gott resultat än före år 1933. Vad algebran beträffar, föreskriver de metodiska anvisningarna, att sysslandet med ekvationssystem av högre grad skall begränsas, men denna lättnad har blivit illusorisk på grund av de till detta kapitel hörande problem som givits i studentskrivningarna. Det vore önskvärt, att indeterminerade problem definitivt uteslöts ur kursen; talteoretiska uppgifter bör däremot bibehållas.

Den allmänna kursens analytiska geometri har från anvisningarnas anspråkslösa planläggning svällt ut till betydande omfång. Detta medför visserligen en avlastning från specialkursen och borde ur den synpunkten kunna accepteras. Men specialkursen bör dock hellre minskas dels genom uteslutning av ortsproblemen dels genom överföring till den allmänna kursen av ytterligare en del av kapitlet om derivator.

Talaren anmärkte vidare på tendensen i läroböckerna att skjuta över vissa moment från texten till problemen. Så länge fordringarna hålls uppe genom svåra problem, skall man inte inbilla sig att kurserna minskas, därför att texten görs knapphändigare. Det behövs en ryggrad i texten, för att inte de genom problemen förvärvade kunskaperna skall flyta sönder. Som exempel anfördes, att de båda tangentsatserna i trigonometrien bör behandlas i texten. Denna bör även innehålla bestämda anvisningar om behandlingen av de fyra olika fall som förekommer, då av en triangels sidor

och vinklar tre element är givna och man söker de övriga. Även de trigonometriska ekvationerna bör ges en överskådlig gruppering i olika typer.

Till sist framkastade talaren tanken på en radikal omläggning av problemvalet, så att större vikt lades på sakliga och intresseväckande uppgifter. Så t. ex. borde geodetiska uppgifter i trigonometrien ej endast förekomma som ett eller annat tillfälligt exempel utan ges en markerad fast plats i kursen. I rymdgeometrien kunde de enklaste kartprojektionerna genomgås och skalorna beräknas vid olika polarkartor. Projektioner av himlavalvet eller jorden i två mot varandra vinkelräta plan kunde utnyttjas för enkla astronomiska problem. Man bör ej i studentproblemen lägga an på att pröva examinandernas fyndighet utan nöja sig med att undersöka deras kunskaper. Man bör vidare undvika sådana problem, där en elev genom att använda en fullt korrekt och naturlig metod tvingas in i hopplöst vidlyftiga räkningar eller rent av måste köra fast, och inte ser, att det finns en bättre men speciell metod, som leder till målet.

I den efterföljande diskussionen yttrade sig först rektor B. Wahlström. Det råder intet tvivel om — talaren hade mångårig erfarenhet av saken från utgivandet av samlingar av studentuppgifter — att studentproblemens svårighetsgrad stegrats med åren. Nya moment och »träningsområden» har kommit till, större krav har ställts på fyndigheten, och en hel del problem kräver ett mycket tidsödande arbete, om de skall behandlas fullständigt, vilket ej sällan krävs i de från S. Ö-n emanerande anvisningarna för skrivningarnas bedömning. Talaren underströk vidare inledarens uttalande, att en hel del uppgifter hämtas från områden som ligger utanför de av S. Ö-n fastställda metodiska anvisningarna. Bl. a. påpekades den bristande överensstämmelsen mellan anvisningarna och exemplen på geometriska serier, där svårare sådana på oändliga serier blivit rätt vanliga, under det att anvisningarna föreskriver, att »oändliga serier böra ej helt förbigås».

Fordringarna har skärpts, trots att matematikens timplan beskurits, och talet om »matematikterror» är därför inte alldeles obefogat. De ökade kraven i gymnasiet har även återverkat på realskolan. Talaren hade för sin del mer och mer måst öka ut realskolekursen i algebra, vilket egentligen är ganska meningslöst, om man ej hinner med problemlösningen, t. ex. rörelse- och andra liknande problem, där algebra kan komma till användning.

Talaren ville till sist framhålla, att fyllnadsprövningsskrivningarna ej sällan haft en skarpare karaktär än framför allt vårens studentskrivningar, vilket knappast kan anses vara riktigt.

Studenter som förut ej har betyg i ämnet, misslyckas därför ofta i dessa skrivningar, om de endast studerar den föreskrivna kursen.

Lektor F. Ehrnst ville ej gå in på frågan om skillnaden mellan allmän kurs och specialkurs, eftersom skolutredningens förslag sannolikt går i sådan riktning, att en diskussion om detta spörsmål blir tämligen meningslös. Talaren önskade, att S. Ö-n ville rikta en kraftig appell till matematiklärarna att vid bedömningen av examensskrivningen taga större hänsyn till den formella behandlingen och utförandet av teckningar, liksom fallet är i fråga om det skriftliga arbetet i fysik. Det är fel, att det skall anses förtjänstfullt och som en matematisk finess att göra texten vid problemlösningen knapphändig. Textbehandlingen skall vara utförlig och svaret fylligt. Betyget bör ej endast bero på antalet nöjaktigt behandlade uppgifter utan även på det sätt, varpå de behandlats. Fem uppgifter rätt behandlade bör sålunda kunna bedömas med betyget B men även med AB eller a. Skrivningen måste innehalla svara problem för dem som aspirerar på betyget A. Kompletteringsskrivningarna bör därför vara svåra.

Rektor Wahlström ville ställa den frågan, om det verkligen är värt att ägna så mycken tid åt de tre andragradskurvorna som nu är fallet. Eleverna får visserligen en god träning i formellt avseende, men något större värde för deras fortsatta studier har området knappast. Däremot för utvecklingen inom andra ämnen, t. ex. fysik och kemi, med sig krav på matematiska kunskaper av annat slag, som det är skolans uppgift att ge.

Lektor G. Funke ville instämma med rektor Wahlström i hans senaste yttrande. Han hade fått sin uppfattning bestyrkt under sin lärarverksamhet vid tekniskt gymnasium. Vår kultur är så rik och utvecklad, att skolan ej bör ha tid att syssla med matematiska problem som ej har intresse från naturvetenskaplig och teknisk synpunkt. Det bör finnas möjligheter att minska på behandlingen av andragradskurvorna. Det är svårt att säga, vad man skall taga bort, men det är möjligt att förenkla framställningen. I stället borde andra områden tagas upp, som är värdefullare. Kan man vinna tid från den analytiska geometrien, borde man utvidga differentialkalkylen och även införa något integralkalkyl. Integraler påträffas då och då, även i annan än matematisk facklitteratur, t. ex. i medicinsk. Därför borde begreppet integral klargöras i skolan. Talaren betonade dock, att detta inte var ett absolut krav utan endast en önskan under förutsättning, att det gick att åstadkomma balans mellan ämnets timantal och omfattning. Integralkalkyl är inte svårare än differentialkalkyl. På de tekniska gymnasierna har dock eleverna många tillfällen till tillämpningar och övning

på tekniska uppgifter, vilket inte är fallet i läroverken. Det vore önskvärt att även läroverken kunde bjuda sina elever tillfällen till praktisk inlevelse i integralbegreppet.

Talaren påpekade vidare, att kursmomentet sammansatt ränta inte intresserar de tekniska gymnasierna. Man kunde tänka sig, att dylika problem visserligen behandlas i gymnasiekursen men inte tas upp i examensskrivningen. Därigenom spar man tid.

Adjunkt Lew Larsson ansåg, att man kunde vinna tid genom att sänka fordringarna på noggrannhet vid uträkningarna, så att det i de flesta fall kunde räcka med att ange tre värdesiffror i resultatet i stället för fyra. I praktiken användes numera inte manuella uträkningsmetoder utan räknemaskiner, varför vana vid interpolering och vidlyftiga sifferuträkningar för hand inte är av samma betydelse som förr.[1]

Kemien hade en framträdande plats vid årsmötet. Utom det ovan nämnda föredraget av lic. Löfgren förekom under fredagen ett referat av lektor B. Gustaver av en uppsats i Svensk Kemisk Tidskrift nr 3 för år 1943 om en enhetlig kemisk nomenklatur. Lördagen ägnades helt åt kemien. I Kungsholmens kommunala flickskola förevisade lektor Gustaver försök till realskolans kemikurs, och dr. phil. H. Willstaedt demonstrerade ett antal föreläsnings- och laborationsförsök på fysiologisk kemi. Tillsammans med Biologilärarnas förening samlades man kl. 14 till en diskussion över ämnet

Kemiundervisningen i elementära skolor.

Inledare var e. o. adjunkt G. Ödqvist, som talade om »Metodiska synpunkter på första årskursens kemiundervisning i realskolan». Talaren angav först några allmänna synpunkter: 1) en fast grund skall läggas för gymnasiets kemiundervisning, 2) stoffurvalet bör ske med hänsyn till vad som ur det dagliga livets synpunkt är av särskilt intresse, 3) undervisningen skall syfta till att uppöva elevernas förmåga att göra iakttagelser och att draga slutsatser. Den vid laborationerna använda apparaturen skall vara så enkel, att huvudsaken inte skymmes av detaljerna. Talaren betonade, att stoffet måste begränsas, så att ej den fasta grunden äventyras. Läroboken betecknades som ett nödvändigt ont. Boken måste vara fullständig och så utförlig, att den kan användas till självstudium samt av elever, som av någon anledning kommer efter. Enligt

[1] Lektor Wahlgrens m. fl. här anförda synpunkter ha givit anledning till en fortsatt diskussion i TfSL med inlägg av undervisningsrådet C. E. Sjöstedt (nr 2 och 4) och lektor Wahlgren (nr 3), årg. 1944. *(Red.)*

talarens mening är läroboken till skada för elevernas upptäckaranda. Talaren skisserade sedan en lärogång, som tillämpas vid högre allmänna läroverket å Kungsholmen. Det är av vikt, att eleverna från början varnas för sådana försök som medför risker, t. ex. försök med kaliumklorat. Talaren utdelade en »skräcklista», som han brukade läsa upp för eleverna.

Lektor B. Gustaver framhöll med skärpa, att kemien var alltför knappt tillgodosedd i de elementära skolorna. Kemien fordrar ett annat studiesätt än andra kunskapsämnen. Man lär sig inte träslöjd genom att se läraren demonstrera hur det går till att hyvla och såga utan genom att själv arbeta i slöjdsalen. Likaså skall kemi studeras genom individuella laborationer på kemilaboratoriet och inte läras in genom demonstrationsförsök och den vanliga pluggmetoden med läxor och läxförhör. Klassavdelningarna måste vara så små, att det blir möjligt att ordna individuella laborationer. Det laborativa studiesättet tarvar längre tid, och antingen måste tiden ökas eller också måste kursen minskas. Därmed är man inne på frågan om kemiundervisningens mål. Enligt talaren är detta främst att ge en kemisk allmänbildning och därnäst att ge de kunskaper i kemi som fordras för studiet av andra ämnen (biologi, födoämneslära, gymnasiestudier). Kemiens allmänbildningsvärde är mycket stort, men den kemiska allmänbildningen är beklagligt liten. Med tanke på kemiens betydelse för vårt dagliga arbete är en ökad kemisk allmänbildning önskvärd, ja nödvändig. Vad beträffar kemistudiernas betydelse för andra ämnen är en samordning av kursplanerna för kemi samt ämnena biologi och hushållsarbete nödvändig. Talaren önskade en saklig utredning av kemiens ställning i de elementära skolorna och framkastade även tanken på en naturvetenskaplig försöksskola.

Adjunkt K.-E. Fylking gillade metoden att undervisa i kemi utan lärobok. Han hade prövat den med gott resultat men delvis måst överge den, då det visade sig att den krävde alltför mycket hemarbete av eleverna. Den hevristiska undervisningsmetoden bör användas med försiktighet. Man måste studera naturen kritiskt och inte genom oriktiga slutledningar förleda sig själv och eleverna till övertro på experimentens bevisvärde. En sådan övertro ansåg talaren ofta förefinnas och belyste detta med ett exempel ur inledningsanförandet.

I en elementär framställning finns det ingen anledning att skilja strängt på organisk och oorganisk kemi. Den elementära kursen bör endast behandla sådana frågor som eleverna har verklig praktisk nytta av, då ju de flesta slutar sina studier efter genomgång av realskolan.

Rektor M. Kolmodin instämde i en önskan om en saklig utredning av kemiens problem och ställde sig sympatisk mot tanken på ett naturvetenskapligt läroverk. Han ville även understryka de synpunkter som framförts av adjunkt Fylking och kunde meddela, att man troligen kommer att till realskolans första årskurs i kemi förlägga ej endast grunderna av den oorganiska kemien utan även elementen av den organiska kemien. Skälet till denna ändring av den nuvarande kursfördelningen är, att kemi sannolikt inte kan läsas på alla gymnasielinjer, och att den organiska kemien har så stort allmänbildningsvärde, att alla elever som från realskolan övergår till gymnasiet, bör ha läst organisk kemi.

Lektor Nordefeldt framhöll vikten av att realskolans kemiundervisning är praktisk. Lärostoff och laborationer måste väljas så att de intresserar eleverna, och på detta åldersstadium är elevernas intresse större för praktiska uppgifter än för teoretiska frågor. Den teoretiska behandlingen måste anstå till gymnasiet. Talaren kritiserade de av inledaren föreslagna laborationerna, som syftar till att bestämma ekvivalentvikter. Begreppet ekvivalentvikt bör ej behandlas i realskolan. Talaren nämnde en rad exempel på praktiska kemiska problem, som är väl lämpade för experimentell behandling på realskolans stadium.

Årsmötet hade lockat ett osedvanligt stort antal deltagare, och allt som allt torde närmare 200 av föreningens medlemmar ha varit närvarande. En gemensam middag på fredagen hade samlat 70 deltagare. Vid denna framförde ordföranden föreningens tack till professor Siegbahn, överdirektör Forsman och samtliga cicerone vid besöken på provningsanstalten och forskningsinstitutet för fysik samt till föredragshållarna. Å gästernas vägnar talade professor Siegbahn, och undervisningsrådet Lundblad tolkade deltagarnas tacksamhet till styrelsen och de vid årsmötet medverkande. Efter middagen följde samkväm, varvid bl. a. rektor B. Wahlström sjöng till luta.

Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1943.

Styrelsen har under året bestått av 21 personer, av vilka följande 5 även tillhört arbetsutskottet: rektor T. Wetterblad, ordförande, lektor A. Uhler, v. ordf., lektor B. Gustaver, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. Sandén och rektor S. Åstrand. Övriga medlemmar i styrelsen ha varit: rektor A. Björkeson, Stockholm, fil. lic. I. Bolin, Stockholm, professor K. Dahr, Göteborg, lektor G. Funke,

Stockholm, lektor E. Hjalmar, Stockholm, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, lektor Eva Ramstedt, Stockholm, lektor G. Starck, Stockholm, lektor B. Svensson, Jönköping, rektor B. Söderborg, Stockholm, rektor M. Söderman, Luleå, rektor Lilly Tengnér, Stockholm, rektor B. Wahlström, Stockholm.

Föreningens ordinarie årsmöte 1943 hölls i Göteborg den 7—8 januari. Redogörelse för årsmötet finns införd i Elementa 26: 1 1943, och särtryck därav har tillställts föreningens medlemmar. Den 22 april 1943 hölls ett varsammanträde på Institutet för organisk-kemisk forskning i Stockholm. Redogörelse över sammanträdet är införd i Elementa 26: 2 1943, varav särtryck tillställts medlemmarna. Under hösten ha två studiebesök anordnats för föreningens medlemmar i Stockholm, dels den 18 september, då föreningen av Ingenjörsvetenskapsakademien inbjudits att bese utställningen »Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel», dels den 19 oktober, då AB Stockholms Spårvägar visade sina garage och verkstäder vid Hornsberg. Redogörelser över dessa besök finnas i Elementa 26: 4 1943, och särtryck ha utsänts till medlemmarna.

Den 2—14 augusti 1943 ägde en fortbildningskurs i fysik (elektricitetslära) rum i Stockholm efter i huvudsak samma program som kursen 1942. Till denna kurs hade föreningens styrelse anslagit 500 kronor. Redogörelse för kursen är införd i Elementa 26: 4 1943.

Liksom föregående år har styrelsen sänt ut PM från undervisningsråden R. Lundblad och C. E. Sjöstedt till ledning vid rättningen av vårens studentskrivningar i fysik och matematik samt de matematiska uppgifterna i realexamen.

Några visningar av planetariet ha i år ej kunnat komma till stånd. Som bekant kommer planetariet att flyttas till Göteborg.

Ingen ny del av föreningens pedagogiska skriftserie har utkommit under året, men styrelsen förbereder utgivandet av en sådan under år 1944.

Under året har styrelsen haft 3 och arbetsutskottet 1 sammanträde.

Medlemsantalet är vid årsskiftet 1943—1944 616. Under året ha 16 medlemmar avgått ur föreningen och 30 nya medlemmar tillkommit.

Stockholm den 31 december 1943.

Torsten Wetterblad
Ordförande

Bror Gustaver
Sekreterare

Bokanmälningar.

Olaf Ingebrigtsen, Kay Piene, *Oppgaver i matematikk.* For gymnasets språklinjer og begynnertrinnet på reallinjen (Regning og matematikk for høgre skoler V). J. W. Cappelens forlag, Oslo 1944. 143 s., häft.

En bok, som kommer från främmande land, har numera en alldeles speciell innebörd. Den vittnar, eller kan åtminstone göra det, om andens livskraft. Ett nytt bevis härpå utgör den härovan angivna matematiska exempelsamlingen, tillkommen under betingelser, säkerligen fjärran från begreppet arbetsro.

Det kan här ej bli fråga om någon detaljgranskning av det stora antalet uppgifter (1301 st.), men ganska snart märker man bokens förnämliga halt. Mest iögonenfallande äro de mera originella och roande exemplen. Det är dock ej dessa, som göra boken så värdefull, utan det är de mera vanliga problemen; de utgöra som sig bör huvudmassan. Vid närmare granskning finner man emellertid, att de icke äro så helt vanliga. Där begäres ej blott att man skall lösa en ekvation, utan även att man skall diskutera resultatet. Om endast ena roten i en andragradsekvation duger, så begäres det att man skall formulera om uppgiften, så att det i stället blir den andra roten som kommer att duga. Den inledande funktionsläran omfattar många väl valda och väl utnyttjade problem, däribland praktiska, t. ex. produktionskostnader vid en fabrik, kolproduktionen vid en gruva som funktion av antalet arbetare per skift. Bland de geometriska problemen, som till stor del äro av planimetrisk art, finnas många vackra kombinationer, ex. 580 om hjulen på ett lokomotiv, ex. 734 med en vacker konstruktion av två sträckors medelproportional, för att endast välja ett par. Överallt spårar man ett hängivet pedagogiskt intresse.

Boken är alldeles fri från slentrian. Stilen är frisk, och ett oförbränneligt gott humör lyser fram då och då. Tillåt mig citera några rader ur ex. 336: »Denne oppgaven handler om fru Olsen og barna hennes. Hør godt etter, for det er fru Olsen selv som har fortalt dette. (Sedan kommer fru O:s långa tirad.) ... Fru Olsen sa en hel del mer som hun hadde merket seg, men dette får være nok. Nå spørres: Hvor gamle er fru Olsen og barna hennes i år. Fru Olsen vet det, men hun vil ikke si det.»

Stig Comét.

Tore Porsander, *Räknestickan och dess användning.* Tekniska Förlags AB:s handböcker nr 1. 3:e uppl. Stockholm 1943. 32 s., kr. 1: 50.

Enligt förordet är detta »en enkel handledning i konsten att hantera en räknesticka ... på grundvalen av den matematikkunskap, som inhämtats i folkskolan». Först beskrivas tiologaritmerna, och de viktigaste lagarna illustreras empiriskt. Logaritmernas användning belyses med några exempel. En för bokens syfte lämplig detalj är, att även positiva karakteristikor skrivas efter mantissan. Addition och subtraktion med tillhjälp av skalor följer sedan, framställt på ett mycket instruktivt sätt. Efter ett avsnitt om avläsningsfel följer slutligen den mera mekaniska handledningen i beräkningar med tillhjälp av räknestickan. Huruvida en läsare utan andra förkunskaper än de mest elementära kan tillgodogöra sig denna mekaniska handledning utan att först åtminstone ha försökt inhämta den föregående framställningen, är svårt att bedöma. Det förefaller, som om orden logaritm, mantissa och karakteristika borde irritera honom. Å andra sidan bör han nog utan alltför stort besvär kunna inhämta tillräckligt härom i det första kapitlet, som således *icke* bör överhoppas.

Några önskemål till en kommande ny upplaga: En beskrivning av graderingens täthet i olika delar av skalan vore lämplig (en betydelsefull svårighet). I exemplen s. 13—14 borde logaritmerna uppställas *under* varandra vid uträkningen. I fig. 8, som borde omfatta en större del av stickan, måste ABCD utsättas, för att hänvisningen s. 21 skall ha något värde.

Att boken fyller ett behov är ovedersägligt.

Stig Comét.

Thor Westling, *Övningsexempel i matematik för realskolans högsta klass.* Svenska bokförlaget (Norstedt). Stockholm 1943, 21 s., kr. 0: 90.

Något direkt behov av denna eller liknande exempelsamlingar för realskolans sista årskurs föreligger knappast. Läroböckernas övningsexempel jämte de uppgifter, som givits i realexamen, erbjuda mer än behövligt material för träningen. Mot ovanstående exempelsamling finns eljest, så vitt jag kan se, inte något särskilt att anmärka. Många av uppgifterna i den äro bra. Den, som anser sig behöva ytterligare hjälpmedel utöver redan förefintliga, kan därför använda denna bok.

Verner Carlson.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 21, 1943, 221 s. I bokhandeln kr. 10:—. Medlemskap, årsavg. kr. 10:—, medför rätt till bundet exemplar. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.

Till följd av kristidsförhållandena har under de senaste åren en eftersläpning i utgivandet av Kosmos inträtt, i det att varje årgång utkommit först påföljande år. Med berömvärt nit har redaktören nu med bd 21 lyckats avlägsna denna olägenhet, och bd 21 är därför det andra bandet av Kosmos, som utkommit under 1943.

Antalet uppsatser är denna gång endast fem, men då flera av uppsatserna äro omfattande, har bandet ändock fatt sedvanligt omfång. I två av uppsatserna beskrivas de experimentella utrustningarna för åstadkommande av snabba partiklar för kärnsprängningsförsök. I den ena av dem, som författats av fil. dr A. E. Sandström, behandlas den metod för partikelacceleration, som grundar sig på möjligheten att alstra extremt höga spänningar med elektrostatiska högspänningsapparater av van de Graaffs typ, varvid huvudvikten lagts på de försök, som under senare tid gjorts att genom att omge högspänningsmaskinerna med tryckkamrar förbättra isolationen och möjliggöra upprätthållandet av högre spänningar. Den andra uppsatsen, som är författad av fil. mag. H. Atterling, behandlar cyklotronen, där höga partikelhastigheter uppnås genom multipel acceleration med relativt låga spänningar. Artikeln avser väsentligen att skildra den vid Forskningsinstitutet för fysik i Stockholm byggda cyklotronen, och man hälsar med glädje att en skildring av detta förnämliga instrument nu framlagts för svensk publik.

Bandet innehåller ytterligare en uppsats av rent fysikaliskt innehåll, nämligen en av doc. P. Ohlin författad beskrivning av nyare bestämningar av förhallandet mellan de båda universella storheterna Plancks konstant och elektronladdningen (h/e) enligt den metod, som går ut på uppmätning av den kortvägiga gränsen för det kontinuerliga röntgenspektrum, som emitteras, då snabba elektroner träffa antikatoden i ett röntgenrör. För studiet av denna metod har författaren själv utfört värdefulla undersökningar.

Två uppsatser äro ägnade studiet av atmosfärens fysikaliska tillstånd. I en brett upplagd framställning skildrar doc. O. Rydbeck resultaten av den experimentella och teoretiska utforskningen av det jorden omgivande elektriskt laddade skikt, som fått namnet jonosfären. På detta område har författaren själv varit framgångsrikt verksam, och artikelns syfte synes vara att väcka intresse för dessa frågor. Bandet avslutas med en artikel av prof. Väisälä, vari skildras författarens mångåriga försök att konstruera och förbättra

en radiosond för meteorologiska studier av atmosfären inom de områden, som kunna nås med obemannade ballonger. Denna metod för studium av atmosfären, vid vilken angivelserna hos av ballongen burna meteorologiska instrument per radio meddelas till en på jorden stationerad mottagare, torde få alltmera växande betydelse inom meteorologien.

Nils Ryde.

Giftstadgan den 26 november 1943, med kommentarer och register utgiven av A. Widlund och I. Flygare. P. A. Norstedt & Söner, Stockholm 1944, 91 s., linneband kr. 3: 25.

Den starka utvecklingen av den kemiska industrien och av handeln med kemikalier har nödvändiggjort en moderniserad giftstadga, som tar hänsyn till alla de nya preparat, som framställts och de erfarenheter rörande gifter, som vunnits sedan utgivandet för snart 40 år sedan av den gamla stadgan. Två av medicinalstyrelsens medarbetare, som handhaft denna uppgift, ha nu utgivit stadgan med kommentarer och register och därmed gjort den till en nyttig, ja nödvändig och i hög grad lärorik lektyr icke blott för handlande och industrimän, utan även för alla kemilärare. Editionen borde ingå i varje kemisk institutions bibliotek.

G. Starck.

Gradualavhandling.[1]

Eve Staffansson, *Stark-Effekt am Schwefelbogenspektrum, eine experimentelle und theoretische Untersuchung.* Lund 1943, 127 s. Disp. vid Lunds universitet den 14 dec. 1943. Opponenter: docent B. Svensson och amanuens K. Lidén.

Arbetet kan anses utgöra en fortsättning av den rad av starkeffektundersökningar, som under de sista 19 åren utgått från lundainstitutionen.

Inledningsvis behandlas svavelatomens bågspektrum. Därvid lämnas först en kort sammanfattande framställning över äldre svavelundersökningar och de resultat dessa lämnat till svavelspektrets systematik, varefter följer en mera detaljerad redogörelse för spektrets byggnad och de termtyper man enligt atomfysikens lagar har att vänta. Slutligen diskuteras i detta avsnitt även de nyare experimentella termvärdesbestämningarna.

Efter en kortfattad återblick på teoretiska undersökningar över starkeffekten och de resultat i kvalitativt och kvantitativt hänseende dessa lämnat följer som en inledning till den teoretiska

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

behandlingen av föreliggande problem härledningen av störningsteoriens sekularekvation med utgångspunkt från den orelativistiska formen av Schrödinger-ekvationen för ett en-elektronproblem, i stort sett följande den Slaterska problemställningen. För en kvantitativ beräkning av förskjutningarna av linjernas starkeffektkomponenter erfordras, att de i störningsmatrisen ingående elementen äro numeriskt kända; härvid ha vid andra grundämnen med större eller mindre framgång stundom vätematriselement använts, ett förfaringssätt, som vid vätelikt termschema kan anses väl approximera de verkliga förhållandena; vid svavelatomer ger emellertid ett sådant beräkningssätt ingen överensstämmelse med de experimentella resultaten, approximationen med väteelement är för grov. För att ernå bättre överensstämmelse har en numerisk beräkning av den radiella delen av egenfunktionerna i svavel genomförts under följande förutsättningar: problemet betraktas som ett en-elektronproblem (Hartree), atomfältet betraktas som ett centralfält med laddningen + 1 (en fullt godtagbar approximation för den följande beräkningen av den radiella delen av matriselementet, dipolmomentet). För den numeriska integrationen av den radiella delen av Schrödinger-ekvationen har ett av Störmer angivet numeriskt integrationsförfarande tillämpats, sedan som egenvärde insatts det experimentellt bestämda termvärdet, omräknat i Hartree-enheter. Ett analogt förfaringssätt har med framgång använts i syre. På detta sätt ha ca 25 egenfunktioner bestämts, och efter beräkning av dipolmomenten har efter insättning av dessa i sekularekvationen starkeffektens uppspaltningsbild beräknats.

Vid det experimentella arbetet har katodskikt-metoden kommit till användning, Lo-Surdo-metoden. För att excitera spektret till svavel har författaren låtit detta ämne ingå som beståndsdel i en gasformig förening och efter olika undersökningar funnit svaveldioxiden och svaveltrioxiden som den ändamalsenligaste. Undersökningen har omfattat i det närmaste alla identifierade linjer inom det synliga området och sträckt sig från en fältstyrka på 40 kV/cm upp till ung. 200 kV/cm med spänningar mellan katod och anod från 5 kV upp till 26 kV.

I det följande kapitlet diskuteras spektrogrammens utseende och därvid särskilt vissa karakteristiska drag, de för D-termerna uppträdande vid lägre fältstyrkor symmetriska uppspaltningsbilderna med såväl röd- som violettförskjutna komponenter, förekomsten av »vändande» linjekomponenter, alltså sådana som här först erhålla violettförskjutning och vid högre fältstyrkor rödförskjutning och slutligen uppträdandet av vissa »förbjudna» energiövergångar av typen *p-p*.

Efter dessa avsnitt följer slutligen en jämförelse mellan teoretiskt beräknade och experimentellt vunna resultat. Härvid har i allmänhet god överensstämmelse visat sig vara för handen; de i några fall uppträdande diskrepanserna ha fått sina förklaringar; så har t. ex. vissa tidigare experimentellt bestämda termvärden ej visat sig vara korrekta och ha sålunda korrigerats, dessutom har undersökningen givit några nya tidigare ej experimentellt bestämda termvärden, och slutligen har författaren med stöd av sina undersökningar påvisat störningar i några av svavelspektrets termserier.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1943: 11—12, 1944: 1.

Ur innehållet: K. Myrbäck und L.-G. Sillén, Zweigmoleküle II, III; H. Olerup, Beräkning av jämviktskonstanter ur ljusabsorptionsmätningar; C. Brosset and Ulla Wahlberg, On the Conditions for the Precipitation of Some Complex Aluminium Fluorides; B. Sjögren, R. Dahlbom och T. Ekstrand, Tritylsubstituerade sulfanilamider och experimentell tuberkulos; H. Erdtman, Die phenolischen Inhaltsstoffe des Kieferkernholzes V; K. H. Gustavson, Bestämning av basiska kromsalters komplexbildning medelst organoliter; O. Cyrén, Oscar Fredrik Carlson — ett hundraårsminne.

IVA, 1943: 6.

Ur innehållet: Bestämning av hårdheten i mycket mjukt vatten; Forsknings- och industrilaboratorier; Forskarens miljö förr och nu; Allmänna synpunkter på laboratorier för kemi och biokemi; Några principer för planlösning av forskningslaboratorier; Laboratorieinredning samt dess utformning i IVA:s försöksstationer; Om forskningsarbetet i halvstor skala och anordningar härför; Utrustningar för svagströmslaboratorier.

ERA, 1943: 11—12, 1944: 1.

Ur innehållet: Induktionsvärme; Hojum, den nya Trollhättestationens elektriska utrustning; Ljusmått och färgvärde, Den nya utrustningen vid Tekniska högskolans belysningstekniska laboratorium; Ljuskopiering.

Populär radio, 1943: 11—12, 1944: 1—2.

Ur innehållet: En felsökningsmetod för superheteorodyner; Likriktarrör och likriktare; Impedansmätbrygga; Förstärkarteknik och ljudåtergivning; Provning av nätapparater.

Teknik för alla, 1943: 48—52, 1944: 1—5.

Ur innehållet: Radioavskärmade motorfordon; Stratosfärmotorn; »Stadsgasens» historia; Ackumulering av energi; Värmebehandling av kolstål och snabbstål; Turbinlokomotivets utveckling; Underjordisk förgasning av kol, ny energikälla; Universums gränser; Tekniken hos Thalia; Kirurgen lagar benbrott; Det svenska järnets världsrykte; Inhemska motorbränslen.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1943: 4.

Ur innehållet: E. STRÖMGREN, Den 26 000-aarige Præcessionsperiode i Jens Olsens astronomiske Kunstur; K. A. THERNØE, Mekanisk Regning og Regnemaskiner; J. OHLSSON, Isaac Newton och hans »Naturvetenskapens matematiska principer», XVI; J. P. MØLLER, Kometene; Litteratur.

Fysisk Tidsskrift, København 1943: 6.

Ur innehållet: J. L. MANSA, Nye Veje til Frembringelse af Varme; H. HANSEN, Reaktionshastighed; A. ØSTERGAARD, Syre og Base; E. GJEDE, Et Induktionsforsøg; E. GJEDE, Tørveanalyse i Gymnasiet.

Naturens Verden, København 1943: 9—10, 1944: 1.

Ur innehållet: D. PRYTZ, Om maaling av blodtrycket hos mennesker; B. BAK, Nogle fysiske Metoder til Bestemmelse af Molekylernes Bygning.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, Årg. 5, 1943: 1—2.

Ur innehållet: E. A. HYLLERAAS, Nobelpristagere i fysikk: H. A. Becquerel, P. Curie, Marie Curie, Lord Rayleigh, Ph. Lenard, J. J. Thomson; O. NETTELAND, En elektrostatisk høispenningslinse; J. WASIUTYŃSKI, Kopernikus og hans arbeid med den nye verdensmodell; O. LINDSTAD, Strømstøt og spenningsstøt; BJ. BJERKE, Rullende og glidende friksjon ved hjul, Rullende cylindre på et skråplan; E. A. HYLLERAAS, Dr. Axel Aubert, In memoriam; B. TRUMPY, Nye isomere kjerner; H. ALFVÉN, En teori för norrsken och magnetiska stormar; R. KREKLING, Om kraften i et hammerslag; Eksamensopgaver i fysikk.

Naturen, Bergen 1943: 11—12, 1944: 1.

Ur innehållet: TH. HESSELBERG, Klimavariasjoner i Norge i vår tid; H. SÆTREN, »Levende molekyler»; C. L. GODSKE, Prinsipper og metoder i moderne værvarsling.

Uppsatser av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll i följande tidskrifter under 1943.

Folkskollärarnas tidning. O. E. JOHNSON, Lustbetonad geometriundervisning (nr 14); S. LINDGREN, Kombinerad apparat för optik (nr 15); H. ANDERSSON, Att räkna division (nr 17—18); Y. ÅSTRÖM, Fysikundervisningen i B-skolan (nr 40); C. G. HELLSTEN, Förenklingar i räkneundervisningen (nr 50).

Skola och hem, Helsingfors 1943 (årg. VI): 1—4. A. HÖGLANDER, Passare och linjal; R. MEINANDER, Matematisk begåvning hos gossar och flickor (se referat i Elementa 1943, s. 168); G. TEGENGREN, Proven i matematik vid studentexamen våren 1943.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja, Helsingfors 1943 (årg. 7): 1—4. Uppsatser på svenska: R. MEINANDER, Kondensation och sublimation i atmosfären; H. SLÄTIS, Elektrostatiska högspänningsgeneratorer; G. TEGENGREN, Proven i matematik vid studentexamen våren 1943; B. GUSTAVER, Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Sverige.

Syn og Segn, Oslo 1943 (49. Årg.): 1—10. H. VIKSJØ, Kraftspelet i naturen og lenger ute; A. GJELSVIK, Isaac Newton; H. VIKSJØ, Kan vi lita heilt ut på lengdemålet vårt?

Föredrag under hösten 1943 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. B. Holmberg.

Föredrag: fil. mag. B. Holmberg, Ur teorien för krökta ytor, illustrerat med modeller ur den matematiska instrumentsamlingen (23/9); docent Å. Pleijel, Oändliga serier, en historisk tillbakablick (27/10); Dr. phil. W. Fenchel, Om fullkomliga optiska instrument (26/11); prof. H. Bohr, Köpenhamn, Om uendlige Recker indenfor Talteorien (3/12).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. fil. mag. Stig Sunner.

Föredrag: fil. dr. G. Holst, Några synpunkter på cellulosaindustriens kemiska utveckling (21/9); prof. E. Widmark, Studier över födovalet (29/10); prof. K. Myrbäck, Stärkelsemolekylens byggnad (6/12).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Hilding.

Föredrag: prof. H. Bohr, Om några funktionsrum (30/11).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. fil. lic. N. Svartholm.

Föredrag: observator Y. Öhman, Fotoelektrisk fotometrik vid Stockholms observatorium (27/9); docent O. Rydbeck, Göteborg, Något om jonosfärens fysik (8/10); fil. lic. C. Walén, Bidrag till solfläckarnas teori (25/10); fil. dr. S. Rozenthal, Atomkärnkrafterna och betastrålningen (8/11); f. d. bergmästare Th. Dahlblom, Äro den fysikaliska kemiens hypoteser från förra århundradet behövliga? Kan ej kunskapen helt grundas på experimentella resultat? (22/11).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén.

Föredrag: Prof. O. Hahn, Dahlem, Künstliche Umwandlung der Atomkerne. Die Aufspaltung des Urans. (7/10); docent Dr. B. Skarzynski, Om cancerogena substanser (17/12).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. docent S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: fil. mag. A. Broman, Om konvergens på randen; fil. lic. C.-G. Esseen, Fouriertransformer av singulära funktioner (14/10); prof. H. Bohr, Om nogle Problemstillinger og Resultater fra de næstenperiodiske Funktioners Teori (28/10).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent S. v. Friesen, v. ordf. docent P. Ohlin.

Föredrag: docent B. Edlén, Termoströmningarna i ädelgasernas bågspektra (16/11); fil. dr J. Tandberg, Rost och rostning (1/12).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. I. Jullander.

Föredrag: prof. T. Teorell, Kvantitativa synpunkter på antigen-antikroppsreaktionerna (1/10); prof. E. C. Jahn, Syracuse University, U. S. A., The Formation of Cellulose Compounds (22/10); fil. mag. S. Wideqvist, Över cyansubstituerade karbonsyror (7/12).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1316) *I vilka serier är* $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + \ldots + t_n^3 = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n)^2$ *för alla positiva heltalsvärden på n?* *X.*

1317) *Huru stora äro toppvinklarna i en regelbunden n-sidig pyramid, om en sfär, som tangerar alla kanterna och a) den omskrivna sfären, b) en sfär, som tangerar alla ytorna, ha samma medelpunkt?* *N. J.*

1318) *I triangeln ABC är* $a = \sqrt{5} - 1$, $h_a = 1$ *och vinkeln* $A = 63°$. *Beräkna exakta värdet på vinklarna B och C.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1319) Summan av de n första termerna i en viss serie kan uttryckas genom formeln $s_n = \frac{n}{n^2 + 1260}$. Hur många termer skola medtagas för att summan skall bli så stor som möjligt?

Svar: 35 eller 36 termer.

1320) Kan en geometrisk serie med ett udda antal termer vara så beskaffad, att summan av alla termer med udda ordningsnummer blir lika med summan av alla termer med jämnt ordningsnummer?

Svar: Nej. Räkningen leder endast till de oanvändbara värdena $k = \pm 1$.

1321) Lös ekvationen $2 \sin x - \sin 2x = 3 \sin \frac{x}{2}$.

Svar: $n \cdot 360°$; $\pm 120° + n \cdot 720°$; $\pm 98°{,}70 + n \cdot 720°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1319—1322, 1329—1330 äro insända av *T. Edqvist*, 1323 av *P.*, 1324—1328 av *N. J.*

1322) I $\triangle ABC$ är $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm och $BC = 21$ cm. Beräkna det exakta värdet på radien i den cirkel, som tangerar triangelns inskrivna cirkel samt sidorna AC och BC.

Svar: $\frac{7}{16}(9 - \sqrt{17})$ cm

1323) I en romb är en vinkel α. Den vinkel, varunder en sida synes från motstående sidas mittpunkt, är v. Visa, att $\sin \alpha = 0{,}75 \operatorname{tg} v$.

1324) En fyrsidings sidor ha längderna a, b, c och d. Sök längderna av de gemensamma, yttre (mellan tangeringspunkterna räknade) tangenterna till de utanför motstående sidorna vidskrivna cirklarna.

Svar: $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

1325) Visa, att summan av $\frac{2}{3}$ av den i enhetscirkeln inskrivna regelbundna n-hörningens omkrets och $\frac{1}{3}$ av den kring samma cirkel omskrivna regelbundna n-hörningens omkrets ger en bättre approximation för 2π än någondera omkretsen.

1326) Två lika stora cirklar tangera varandra. Hur förhålla sig sidorna i den rätvinkliga triangel, där hörnen utgöras av tangeringspunkten, den ena cirkelns centrum samt centrum för den cirkel, som tangerar båda cirklarna och en gemensam yttre tangent?

Svar: 3 : 4 : 5.

1327) Tre lika sfärer tangera varandra två och två. a) Visa, att den triangel, där hörnen utgöras av ett centrum och centra i de sfärer, som tangera de givna sfärerna och vart och ett av deras gemensamma tangentplan, är liksidig. b) Vad är förhållandet mellan axel, basradie och sida i den kon, som har centrum i en av de sistnämnda sfärerna till topp och en storcirkel på en av de förstnämnda till bas?

Svar: 4 : 3 : 5.

1328) Bestäm ordinatan för skärningspunkten mellan linjen genom (3; 5) och (−5; −2) och linjen genom (1; 3) och (8; −5).

Svar: $3\frac{16}{113} = \pi + 0{,}0000001$.

1329) En likbent triangel ABC har vinkeln $A = 105°$. Koordinaterna för A äro (0; −2) och för B (2; 0). Beräkna de exakta värdena på koordinaterna för punkten C.

Svar: $(-\sqrt{6}; -2 + \sqrt{2})$ eller $(\sqrt{2}; -2 - \sqrt{6})$.

1330) Beräkna halva storaxeln i en ellips med den givna ytan S, för vilken produkten av parametern och excentriciteten är ett maximum.

Svar: $\sqrt[4]{\frac{5S^2}{3\pi^2}}$.

Lösn. till uppg. 1288—1290.

1288) *Vad är villkoret för att de nio punkter, som givit niopunktscirkeln dess namn, ligga på en regelbunden månghörning?* *N. J.*

I den likställighet, som har centrum i höjdernas skärningspunkt, motsvaras niopunktscirkelns karakteristiska punkter av följande punkter på triangelns omskrivna cirkel: hörnen A, B, C, deras diametralt motsatta punkter A_1, B_1, C_1 samt dessa punkters spegelbilder A_2, B_2, C_2 i mittpunktsnormalerna till resp. BC, CA, AB. Nödvändigt villkor är alltså, att A, B, C äro hörn i en regelbunden polygon P_n, d. v. s. att *vinklarna A, B, C ha rationella gradtal.* Men detta räcker också. Ty om man, ifall n är udda, utökar P_n till en P_{2n}, är det evident, att då även A_1, B_1, C_1 och A_2, B_2, C_2 äro hörn i samma reg. polygon som A, B, C. *X.*

1289) *Tio av kanterna i en allmän hexaeder äro a. Vilka värden skola de två återstående kanterna ha, för att a) ytan b) volymen skall bli så stor som möjligt?* *N. J.*

De tio lika kantlinjerna ha vardera längden a. De två återstående, vilkas längder tills vidare äro obestämda, dock $\neq a$, ligga antingen i samma sidoyta eller i två närliggande. Man finner vid en mönstring av de olika möjligheterna, att det i alla fall utom ett, som behandlas nedan, finnes två angränsande sidoytor AA_1B_1B och BB_1C_1C som bägge äro romber med sidan a. Hexaedern är ett parallellt avskuret prisma, i vilket basytorna äro fyrhörningar med tre (icke fyra) sidor $= a$; sidokanterna ha alla längden a. Eftersom $AA_1 // BB_1 // CC_1$, är nämligen även DD_1 parallell med dessa och, då $AB // A_1B_1$, $BC // B_1C_1$, är planet $ABCD //$ pl. $A_1B_1C_1D_1$. *Största möjliga volym* har tydligen ett sådant prisma, då det är rakt och basytorna äro halva regelbundna sexhörningar. Maximivolymen är $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. *Största ytan* erhålles, då prismat är rakt samt basytorna och den icke kvadratiska sidoytan tillsammans utgöra en regelbunden åttahörning. Maximiytan är $(5 + 2\sqrt{2})a^2$.

Något nytt erhålles ej i ovannämnda undantagsfall. Då äro

$ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ romber med sidan a, $BB_1 = DD_1 = a$ men AA_1, $CC_1 \neq a$. Det kan nu visas, att $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ äro varandras spegelbilder i ett plan. Man vet nämligen, att $AB // CD$, $A_1B_1 // C_1D_1$ och alltså planet $ABB_1A_1 // CDD_1C_1$. På samma sätt inses, att planet $BCC_1B_1 // ADD_1A_1$, så att dessa fyra plan bilda ett prismatiskt rör. Vidare ligga symmetriaxlarna i de likbenta parallelltrapetsen AA_1B_1B o. s. v. uppenbarligen i samma plan, som är gemensamt mittnormalplan till sidokanterna AA_1, BB_1, CC_1 och DD_1. Man kan tillägga, att det prismatiska rörets tvärsnitt är en romb och att $AA_1 + CC_1 = 2a$. Om man sedan i en sådan hexaeder genom B_1D_1 lägger ett plan parallellt med $ABCD$, avgränsar detta plan jämte $ABCD$ och röret en parallellepiped med samtliga kantlinjer $= a$, som har samma volym och samma totala yta som hexaedern. Om AA_1 och CC_1 äro olika, kan parallellepipeden ej vara en kub. Maximivolym och maximiyta förekommer således ej i detta fall för vår hexaeder. Tolkar man lydelsen så, att åtminstone 10 kanter äro $= a$, tillkomma kuber med kanten a, som ha maximivolym och maximiyta bland hexaedrar med mer än 10 kanter $= a$. *X.*

1290) *Konstruera den största ellips, som kan inskrivas i ett symmetriskt segment av ett kägelsnitt. Ellipsen och segmentet ha gemensam symmetriaxel.* *X.*

Med E betecknas en ellips, som tangerar x-axeln i origo O och har sin ena axel OP på positiva y-axeln. Utdrages OP till Q, så att $OP : OQ = 2 : 3$, så halverar polaren till punkten Q sträckan OQ och omvänt. Om polaren skär E i R och R_1 och tangenterna i R och R_1 skära x-axeln i S och S_1, så är $QR = RS$. Ellipsens andra axel blir $2RR_1 : \sqrt{3}$ och $\triangle OQS = 3A\sqrt{3} : 2\pi$, om ytan av E är A. Detta inses omedelbart, om (medelst skalförändring av ordinatorna) ellipsen och $\triangle QSS_1$ överföras i en cirkel och en omskriven liksidig triangel.

Enligt en bekant hyperbelsats sluter man sedan, att enveloppen för ellipser E med konstant yta A utgöres av de i 1:a och 2:a kvadranterna liggande grenarna av hyperbelparet $H : xy = \pm\frac{3A\sqrt{3}}{4\pi}$. Placera nu det givna segmentets korda LL_1 på x-axeln med mittpunkten i O och (den slutna) bågen (k) i övre halvplanet. För tillräckligt stora A nå hyperblerna icke fram till bågen. Inga E med så stor yta kunna inskrivas i segmentet. Tydligen svarar A_{max} mot det fall, då E och H tangera bågen (och varandra) i samma punkt $R(R_1)$. Om den gemensamma tangenten i R skär axlarna i Q och S och $QR = RS$, så har Q samma polar RR_1 med avseende på såväl E som på det av ellipsens tangenter i O och P bildade

linjeparet och det kägelsnitt, varav bågen (k) är en del. Därav följer, att den punkt X, i vilken LQ skär k för andra gången, ligger på E:s topptangent i P. Då $XP = LO : 3$, kan X lätt konstrueras (bågen k behandlas för enkelhets skull som en cirkelbåge i fråga om skärning med en rät linje) och därmed äro RR_1 och ellipsens axlar kända enl. den inledande utredningen (XL_1 och X_1L råkas f. ö. på RR_1).

Anm. Uppgiften avsåg endast sådana inskrivna ellipser, som ha en symmetriaxel gemensam med segmentet, ehuru detta ej klart framgår av formuleringen. *X.*

Not om uppg. 7 i allm. kurs jan. 1944.

Denna uppgift är synnerligen instruktiv och bör utnyttjas vid undervisningen. Sedan man på vanligt sätt sökt max. genom derivering, kan det vara av intresse att visa, hur uppgiften kan lösas med enkla geometriska medel.

Fyrhörningen $ABDC$ är tydligen en rektangel med konstant diagonal $BC = \sqrt{d^2 + h^2}$, där $d = 2r$, d. v. s. triangeln ABC (= halva fyrhörningen) är en rätvinklig triangel med konstant hypotenusa BC. Den största triangeln är den, vars höjd mot hypotenusan är störst.

Slå upp en halvcirkel på $BC = \sqrt{d^2 + h^2}$, och inskriv en triangel BA_1C, där $A_1B = d$ och $A_1C = h$. Enligt problemet gälla villkoren $AB \leqq d$ och $AC \geqq h$. Hörnpunkten A måste alltså falla på bågen A_1B. Om $d \leqq h$ är ytan störst, då A faller i A_1. Fyrhörningens yta är då $= d \cdot h$. Om $d \geqq h$, ligger vid max. hörnpunkten A i bågen BC:s mittpunkt. Fyrhörningen är då en kvadrat med ytan $\frac{d^2 + h^2}{2}$.

C. E. B.

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1944.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en rätvinklig triangel är hypotenusan 25 cm och höjden mot densamma 6,72 cm. Beräkna kateternas längder.
2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan lika med kvadraten på första termen, och fjärde termen är $^{13}/_{9}$ mindre än den första. Vilken är serien?
3. Två kordor AB och CD i en cirkel skära varandra inom cirkeln i en punkt E, så att $AE = 1$ cm, $BE = 8$ cm, $CE = 3$ cm och vinkeln $AEC = 60°$. Beräkna radien i den cirkel, som kan omskrivas kring triangeln BED.
4. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Hörnet A och cirkelns medelpunkt ligga på var sin sida om diagonalen BD, som är 6 dm. Vidare är $AD = 4$ dm, vinkeln $ABD = 36°{,}2$ och vinkeln $CBD = 63°{,}1$. Beräkna diagonalen AC.
5. I en cirkel dragas två parallella kordor på samma sida om medelpunkten. Den ena, AB, är lika lång som sidan i den i cirkeln inskrivna kvadraten. Den andra, CD, avskär $^{1}/_{3}$ av den mot kordorna vinkelräta radien, från medelpunkten räknat. Från punkten A, vilken ligger på samma sida om den nämnda radien som C, drages normalen AE mot kordan CD. Därigenom uppkommer en trehörnig figur ACE, begränsad av två räta linjer och en cirkelbåge. Beräkna denna figurs yta, om cirkelns radie är 6 cm.
6. Bestäm storheten a, så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ y = 2x + 6 \end{cases}$$

satisfieras av två värdesystem, i vilka det enas y-värde är dubbelt så stort som det andras.

7. I en triangel ABC, där $AB = 20$ cm, $BC = 21$ cm och $CA = 13$ cm, dragas höjden från A och bissektrisen från B. Dessa linjer skära varandra i F och råka BC i D respektive CA i E. Beräkna vinklar och sidor i triangeln AEF.
8. I en triangel ABC är sidan BC 4,5 cm och vinkeln A 37°,9. Sidan BC tages till diameter i en cirkel, som skär de övriga sidorna i D och E. Bestäm längden av sträckan DE.

Resultat: **1.** 24 cm och 7 cm. **2.** $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$. ... **3.** $\frac{8\sqrt{21}}{9} = 4{,}073$ cm. **4.** 6,685 dm; uppgifterna om BD:s längd och läge äro överflödiga. **5.** 1,848 cm². **6.** $a = 7{,}4$. **7.** $\angle EAF = 22°{,}62$; $\angle AFE = 71°{,}56$; $\angle AEF = 85°{,}82$; $EF = 2{,}571$ cm; $AE = 6\frac{14}{41}$ cm; $AF = 6\frac{2}{3}$ cm. **8.** $4{,}5 \cdot \cos 37°{,}9 = 3{,}551$ cm.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. I ekvationen $ax^2 - a^2x = 1$ är a en positiv konstant. Visa, att ekvationens rötter äro reella. Beräkna det värde på a, för vilket summan av rötterna och deras inverterade värden blir så stor som möjligt.
2. I triangeln ABC är vinkeln A 66°,7. Mittpunktsnormalen till sidan BC träffar sidan AB i punkten D, så att $AD : DB = 1 : 2$. Beräkna vinklarna B och C.
3. Bevisa, att om a, b, c och d i nämnd ordning äro termer i en geometrisk serie, så är

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2.$$

4. I en regelbunden tetraeder $OABC$ är M mittpunkten på AB och N mittpunkten på AC. Beräkna den spetsiga vinkel, som bildas av riktningarna för linjerna OM och BN.
5. Lös utan att använda tabell ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \cos 56° + y \cos 26° = \cos 116° \\ x \sin 56° + y \sin 26° = \sin 116° \end{cases}$$

och angiv de exakta värdena för x och y i enklaste form.

6. Ekvationen för en sida i en triangel är $2y = x$, ekvationen för medianen till en annan sida $y = 2x$ och ekvationen för höjden mot den tredje sidan $2x - 3y - 4 = 0$. Sök ekvationerna för triangelns båda sistnämnda sidor.
7. En rät cirkulär cylinders basradie är r och höjd h. Genom axelns mittpunkt drages en rät linje parallellt med cylinderns basytor, och genom denna linje lägges ett plan, som skär basytorna längs kordorna AB och CD. Vilket är det största värde, som ytan av fyrhörningen $ABDC$ kan antaga?
8. Bestäm den funktion $y = f(x)$ av andra graden, vars motsvarande kurva tangerar linjerna $y = 4$, $y = x + 2$ och $y = -2x + 12$.

Resultat: **1.** $a = \frac{1}{2}$. **2.** $\angle B = 42°,98$; $\angle C = 70°,32$ (Drag CD). **4.** 80°,41. **5.** $x = 2$; $y = -\sqrt{3}$. **6.** $3x + 2y = 0$ och $x + 10y - 48 = 0$. **7.** Om $h \leqq 2r$, är den största fyrhörningen en kvadrat med ytan $\frac{1}{2}(h^2 + 4r^2)$. Om $h \geqq 2r$, ger ett plan genom axeln den största ytan $= 2rh$; se även detta häfte sid. 58. **8.** $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2x + \frac{4}{3}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. I ett rätvinkligt koordinatsystem ligger en punkt P i första kvadranten. Q är fotpunkten för normalen från P mot x-axeln, O är origo, T är tyngdpunkten i triangeln OPQ. Ytan av triangeln OPT är $\frac{1}{2}$ ytenhet. Sök och konstruera orten för punkten P.
2. Visa, att funktionen $y = \frac{(x-a)^2 - 1}{x - a}$ för alla värden på konstanten a satisfierar ekvationen
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (y^2 - 4)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = 0.$$
3. En cirkel med radien a är uppritad i ett plan L. Genom en diameter AB i cirkeln lägges ett plan M, som bildar vinkeln v med planet L. P är en godtycklig punkt på cirkeln, Q är projektionen av P i planet M. Visa, att orten för Q blir en ellips. Bestäm dess ekvation, och undersök, hur dess excentricitet beror av vinkeln v.
4. En cirkel tangerar en given hyperbels transversalaxel i dess mittpunkt och hyperbeln i ena ändpunkten av en parameter. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.
5. Undersök funktionen $y = \sqrt{1 + 2x + 2x^2} - x$ med avseende på maxima och minima, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.
6. I samband med undersökningen av en växelströms effekt ledes man till att betrakta funktioner av typen
$$y = 180 \cdot \sin\frac{2\pi x}{0{,}02} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{0{,}02} - \frac{\pi}{3}\right),$$
där vinklarna äro uttryckta i radianer. Angiv funktionens eventuella nollställen (d. v. s. de x-värden, för vilka y blir $= 0$), maximi- och minimipunkter samt inflexionspunkter. Representera därefter funktionen grafiskt. Enheterna på axlarna kunna väljas så, att avståndet från origo till punkten (0,01; 0) blir 6 cm och avståndet från origo till punkten (0; 90) likaså 6 cm.
7. En cirkel tangerar en ellips i storaxelns ändpunkter. På ellipsen är P en godtycklig punkt. En parabel har sin brännpunkt i

P och går genom ellipsens brännpunkter. Visa, att parabelns styrlinje tangerar den nämnda cirkeln.

Resultat: **1.** $xy = 3$. **2.** Sätt $y = x - a - \frac{1}{x-a} = t - \frac{1}{t}$.

3. $x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 v} = a^2$; $e = \sin v$. **4.** 76°,35. **5.** $y_{\min} = 1$ för $x = 0$; en hyperbelgren. **6.** Skärningspunkter med x-axeln: $\left(\frac{n}{100}; 0\right)$ och $\left(\frac{3n+1}{300}; 0\right)$. Max. $= 135$ för $x = \frac{3n+2}{300}$; min. $= -45$ för $x = \frac{6n+1}{600}$. Inflexionspunkter: $\left(\frac{6n+5}{1200}; 45\right)$. **7.** Styrlinje när den gemensamma tangenten till cirklar med centra i brännpunkterna, F och F_1, samt med radierna PF och PF_1. Tangentens avstånd från origo är $\frac{1}{2}(PF + PF_1) = a$, där a är halva storaxeln.

Uppgifter i fysik

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1—3 och 5—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Taket på ett hus lutar 30° mot horisontalplanet. Takåsen ligger 10 m och takfoten 6,5 m över marken. En snömassa, som väger 15 kg, rutschar utför taket. Beräkna med hjälp av energiprincipen eller på annat sätt den rörelseenergi snömassan har, när den träffar marken. Den antages vid rörelsens början befinna sig mitt emellan takåsen och takfoten. Friktionskoefficienten mellan snön och taket antages vara 0,1. Luftmotståndet lämnas ur räkningen.
2. En rät cirkulär öppen kon med vertikal axel vänder öppningen uppåt. Dess toppvinkel 2α är $> 90°$. Konen är lagrad så, att den kan sättas i rotation kring sin axel. Medan anordningen är i vila, placerar man en liten kropp, som får behandlas som punktformig, på konens insida. Friktionskoefficienten μ antages vara så stor, att kroppen ligger kvar. Därpå bringar man försiktigt konen att rotera med omloppstiden T sek. Huruvida kroppen då kommer i glidning eller ej, beror av dess avstånd r cm från axeln. Sök det största värde på r, för vilket kroppen ligger kvar, uttryckt som funktion av α, μ och T. Accelerationen vid fritt fall antages vara g cm/sek^2.
3. Genom en med kärna av mjukt järn försedd spole ledes ström från en växelströmsgenerator. Framför kärnans ena ända är fästad en tunn mjuk järnskiva, vars plan är vinkelrätt mot kärnans axel. Till följd av de periodiska växlingarna i attraktionen mellan kärnan och skivan råkar skivan i svängningar

och utsänder en ton. För att bestämma tonhöjden spänner man en 600 mm lang monokordsträng så, att svängningstalet för dess grundton blir 220. Om den svängande delen av strängen vid oförändrad spänning avgränsas till 550 mm, befinnes strängen ge samma ton som skivan. Beräkna växelströmmens periodtal.

4. En strömmande luftmassa, som är mättad med fuktighet, tvingas i höjden av en bergskedja. När den befinner sig vid bergskedjans fot, är dess tryck 760 mm och dess temperatur + 10° C. Under rörelsen uppefter fjällsidan sjunker trycket till 570 mm och temperaturen till — 3° C. Hur mycket vatten utfaller därvid per m^3 av den ursprungliga luftmassan? Vattenångans mättningstryck är vid + 10° C 9,2 mm kvicksilver och vid — 3° C 3,6 mm. Vattenångans täthet är $^5/_8$ av luftens täthet vid samma tryck och temperatur. Vid beräkningen av den expanderande luftmassans volym kan volymsändringen på grund av vattenångans kondensation, om så önskas, lämnas utan avseende.

5. Man ville bestämma specifika värmet för bly vid en mycket låg temperatur. I ett blystycke gjordes för ändamålet en cylindrisk urborrning. Inuti denna fästes en obetydligt smalare blycylinder, kring vilken en isolerad platinatråd var upplindad. Elektrisk ström kunde tillföras platinatråden genom två koppartrådar, vilkas motstånd kunde försummas. Blystycket var upphängt i en behållare, genom vars övre del tilledningstrådarna gingo ut. Behållaren var i sin tur nedsänkt i ett bad av flytande luft. Sedan blystyckena antagit badets temperatur, utpumpades luften ur behållaren. Därefter sändes under 240 sek en ström av 0,144 A genom platinatråden. Genom att några ögonblick ansluta tilledningstrådarna till en Wheatstones brygga fann man, att platinatrådens motstand under strömgenomgången stigit från 10,85 Ω till 11,26 Ω; vid beräkningen av värmeutvecklingen kan man använda medelvärdet av dessa tal. Allt blyet vägde 396 g, och man hade i förväg utrönt, att platinatrådens motstånd vid dessa temperaturer växte 0,33 Ω för varje grads temperaturförhöjning. Beräkna blyets specifika värme under de valda försöksbetingelserna. Värmeledningen i metallmassorna är så god, att blystyckena och platinatråden kunna anses ha samma temperatur. Den del av strömvärmet, som avflyter genom koppartrådarna, lämnas ur räkningen, likaså de värmemängder, som åtgå för uppvärmning av platinatråden och dess isolering.

6. Två sinsemellan lika glasprismer med brytande vinkeln 30° placeras på ett bord, så att prismernas brytande kanter bliva parallella och två baskanter beröra varandra. En ljusstråle faller in mot ena prismat, vinkelrätt mot dess yttre sidoyta, brytes i prismats

inre sidoyta och träffar därefter den inre sidoytan i det andra prismat. Hur stor skall vinkeln mellan sistnämnda båda ytor vara, för att strålen efter brytningen skall lämna det andra prismats yttre sidoyta längs en normal till denna?

7. Styrkan (dioptritalet) av en positiv lins bestämdes på följande sätt. På en optisk bänk uppställdes i ordning en liten elektrisk glödlampa, en positiv hjälplins, vars styrka var 10 dioptrier, och en skärm. Skärmen inställdes så, att en skarp bild av lampans glödtråd erhölls på skärmen. Därpå insattes den lins, vars styrka söktes, mellan glödlampan och hjälplinsen, på ett avstånd från hjälplinsen, som var lika med dennas brännvidd. Glödtrådsbilden blev då oskarp, men om skärmen försköts 3,0 cm i riktning mot hjälplinsen, blev bilden åter skarp. Beräkna linsens dioptrital. Linserna antagas tunna, deras huvudaxlar sammanfallande och de avbildande strålarna centrala.

8. För att bestämma det inre motståndet hos en vridspolampèremeter förfor man på följande sätt. Med hänsyn till ampèremeterns känslighet avshuntades instrumentet med en proppreostat P_1. Förgreningspunkterna förbundos med en ledning, innehållande en blyackumulator och en därmed seriekopplad proppreostat P_2. Då den förra proppreostaten innehöll 0,1 Ω och den senare 20 Ω, visade ampèremetern ett utslag av 30,9 skaldelar. Försöket upprepades, varvid ett motstånd om 10 Ω inkopplades i serie med ampèremeterns vridspole, medan samtidigt motståndet i reostaten P_1 ökades till 0,2 Ω och motståndet i reostaten P_2 minskades till 10 Ω. Denna gång avlästes å ampèremetern ett utslag av 61,8 skaldelar. Beräkna ampèremeterns inre motstånd. Ackumulatorns inre motstånd lämnas ur räkningen.

Resultat: **1.** 119,2 kgm. **2.** Maximivärdet är $r = \frac{gT^2}{4\pi^2} \cot(\alpha - \beta)$, där $\operatorname{tg} \beta = \mu$. Villkoret för att ett dylikt skall finnas är $\alpha > \beta$. Om $\alpha \leq \beta$, ligger kroppen kvar varhelst den placeras. — Diskussion av denna uppgift i dess allmänna avfattning måste anses vara för svår för skolstadiet och kräves naturligtvis inte. Göres inskränkningen $\mu < 1$, finnes alltid ett maximalt r-värde. Man kan då utesluta villkoret $2\alpha > 90°$, som inte är så lätt att komma underfund med; det har betydelse endast för specialfallet $\mu = 1$. **3.** 120 p/s. **4.** 4,5(4) g; med den tillåtna avvikelsen från gaslagarna, som ej innebär någon räknevinst och vars lämplighet kan ifrågasättas, erhålles 4,5(2) g. **5.** 0,0268 cal/g. **6.** 97°,18. **7.** 3 dioptrier. Är hjälplinsens brännvidd f och förflyttningen är d, blir den sökta brännvidden $\frac{f^2}{d}$. **8.** 10,3 ohm.

Antireflexbehandling av optiska linser.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Den enkla linsens avbildande förmåga är som bekant långt ifrån fullkomlig. Tvärtom finnes det en lång serie av »linsfel», som på olika sätt bidraga att försämra den optiska bildens kvalitet. Genom kombinationer av flera linser av olika form och olika glastyp har man sökt att i största möjliga grad hålla de olika felen tillbaka och nå fram till allt förstklassigare objektivtyper. Fotografiens framkomst 1839 utgjorde ett kraftigt incitament för ett sådant framåtskridande. Den optiska industriens utveckling sedan dess karakteriseras också till mycket stor del av den hårda kampen mot dessa linsfel, som man någorlunda lyckats komma till rätta med, det ena efter det andra. Ett modernt fotografiskt objektiv av högre kvalitet är sålunda, trots att det samtidigt skall besitta hög ljusstyrka (stort »öppningsförhållande»), i hög grad befriat från sadana fel som t. ex. sfärisk och kromatisk aberration, astigmatism, bildfältkrökning, koma och distorsion, varjämte i vissa fall även särskilda åtgärder kunna ha vidtagits för att minska det skadliga inflytandet av dess »normala ljusavfall». Bakom ett modernt objektivs tillkomst ligger därför ett ofantligt tidsödande räknearbete från konstruktörens och hans medarbetares sida samt ett skickligt precisionsarbete från arbetspersonalen, enär toleransen ifråga om de skilda dellinsernas krökningsradier och avstånd ofta är vida mindre än 0,01 mm. Det är på grund av detta förhållande ej underligt, att ett dylikt objektiv måste bliva mycket dyrbart.

Emellertid är det ganska uppenbart, att vissa »fel» i det längsta blivit försummade, trots att deras skadeverkningar varit väl kända och visat sig mycket ödesdigra. Detta gäller i första hand de *fel, som ha sin grund i ljusets reflexion* mot de skilda linsytorna i objektivet.

Vid gränsytan mellan två medier med brytningsindex resp. n_1 och n_2 kommer ju en del av det infallande ljuset att reflekteras (andelen R), medan resten passerar in genom ytan och brytes. Om vi begränsa oss till vinkelrätt eller nära vinkelrätt infallande strålar, kan reflexionsförmågan R beräknas enligt den gamla välkända *Fresnelska formeln*:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2. \qquad (1)$$

Vid gränsen mellan luft ($n_1 = 1$) och glas ($n_2 = 1{,}5 - 1{,}7$) blir reflexionsförmågan 4—7 %; däremot är den reflekterade ljusandelen mycket obetydlig vid gränsytan mellan två sammankittade glaslinser med något olika brytningsindex.

Dessa förhållanden medföra nu närmast en rätt betydande *ljusförlust* i objektivet, i det att *en gång* reflekterat ljus återkastas framåt och alltså ej kommer i tillfälle att deltaga i bildens uppbyggnad. Medan denna ljusförlust vid en enkel lins med två fria linsytor begränsas till ca 10 %, växer den ganska raskt med linsernas (och därmed linsytornas) antal. Mätningar visa t. ex., att fabriksfärska moderna kinoobjektiv pläga ha ljusförluster genom reflexion från de skilda ytorna på sammanlagt 40—60 %. Att märka är även att ju bättre objektivet i övrigt gjorts genom anhopning av fler och fler omsorgsfullt beräknade dellinser, desto större blir det nämnda felet. Har objektivet använts någon tid, växa ljusförlusterna ytterligare, dels på grund av diffus reflexion genom polityrens försämring, dels på grund av ljusabsorption i det gulnande kittmedlet etc. I stort sett kan man säga, att ljusreflexionen vid ett finare objektiv orsakar ungefär samma ljusminskning som en avbländning på 1—1 ½ bländarsteg, och det skulle därför vara synnerligen värdefullt, om man kunde befria sig från detta fel.

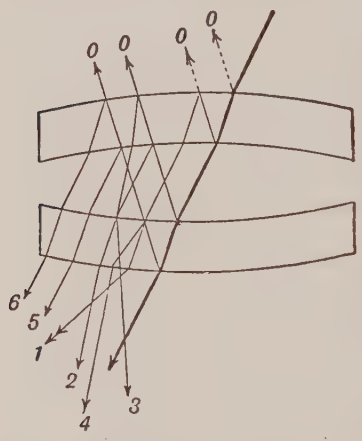


Fig 1. Reflexer av första och andra ordningen i ett tvålinsigt objektiv.

I själva verket har man dock tidigare knappast bekymrat sig om dessa förhållanden. Man har betraktat reflexionsförlusterna som oundvikliga och i stället sökt öka ljusstyrkan hos objektivet genom att öka objektivets öppning. Och härvid har man under de senaste decennierna kommit synnerligen långt, ja så långt att man väl slutligen nått ungefär till gränsen för det möjliga. Man behöver dock i praktiken mera sällan utnyttja optikens ljusstyrka till det yttersta.[1]

[1] Detta förekommer mest vid s. k. röntgenfilmning, då fluorescensskärmens skuggbilder filmas, samt vid olika typer av ultrarapidexponeringar.

Vida svårare verkningar av ljusreflexionen vid linser utgöra de s. k. *spegelfläckarna* samt vissa typer av *slöjbildning*. Dessa fel alstras av ljus, som två gånger reflekterats inuti objektivet mellan dess skilda ytor, och som därefter slutligen hamnar på bildytan (fig. 1). Om detta ljus sprides någorlunda jämnt över bildytan, uppkommer slöja, vilken minskar kontrasterna hos bilden och därför försvårar iakttagandet av detaljer i denna.[1] Ofta samlas emellertid reflexljuset till vissa mer eller mindre klart begränsade partier av bildytan, och man talar då om spegelfläckar. Vid fotografering på sådant sätt att en stark ljuskälla (exempelvis solen, en gatlykta e. d. kommer med i motivet, ge dessa dubbla reflexer anledning till upprepade bilder av ljuskällan i fråga, och dessa spegelbilder kunna ofta vara vida ljusstarkare än bilden av det omgivande landskapet. På grund härav kunna dylika spegelfläckar totalt ruinera bilden (fig. 2).

Fig. 2. Spegelfläckar av solen i en motljusbild.

Principiellt kan man säga, att spegelfläckar och reflexslöja uppträda i desto högre grad, desto förnämligare korrigerat objektivet är mot övriga fel; desto sämre lämpar sig alltså objektivet för exempelvis motljusfotografering. Spegelfläckarnas antal ökar nämligen raskt med antalet fria glasytor. Består ett objektiv av n st. fria linser, blir

$$\text{reflexbildernas antal} = n \cdot (2n-1) \qquad (2)$$

Betydelsen härav framgår av följande tabell:

Antal linser resp. glasskivor ..	1	2	3	4	5	6
Antal reflexbilder	1	6	15	28	45	66

[1] Medan ett fotografiskt motiv stundom kan besitta mycket stor kontrast — vid ett landskap med solen närvarande i synfältet är densammas intensitet kanske 1 000 000 gånger större än landskapets — kan ett vanligt objektiv icke återge större kontraster än cirka 100 : 1 på grund av slöjan. Dessa förhållanden ha särskilt studerats av tysken

Då moderna objektiv i allmänhet bestå av fyra fria linser, bli reflexbildernas antal 28. Därtill kommer emellertid, att moderna fotografer ofta måste begagna försättslinser och i ännu högre grad färgfilter (= färgade glasskivor, som släppa igenom mindre ljus inom vissa våglängdsområden än inom de övriga); varje sådan tillsats har samma verkan i reflexhänseende som objektivets ordinarie linser: reflexbildernas antal stiger alltså till 45 resp. 66 och detta på ett av objektivkonstruktören ej förutsett sätt. Objektivkonstruktörerna ha f. ö. hittills i huvudsak resignerat då det gäller reflexljusets skadliga inverkningar. De ha tydligen betraktat ljusreflexionen som oundviklig och därför som regel inskränkt sina åtgärder till att kontrollera att reflexbilderna i största möjliga grad komma att falla långt ifrån det egentliga bildplanet, så att deras skärpa i detta blir mycket liten. Dessutom bör reflexbilden också utfalla mycket stor, så att dess ljus sprides över en stor yta (större än den egentliga bildytan) och intensiteten hos densamma blir liten. Huvudsaken har för dem varit, att skarpa reflexbilder undvikas och ersättas av slöja.

Under de senaste 5—10 åren har emellertid frågan kommit i helt nytt läge. Även om äldre ansatser gjorts, var det först 1934—35 som en rad forskare föreslogo olika arbetsmetoder för att i största möjliga grad minska reflexljuset vid optiska linser genom att överdraga deras ytor med ett genomskinligt skikt av lämplig brytningsindex och tjocklek. Avsikten skulle vara, att reflexljus från detta skikts båda ytor skulle utsläckas genom inbördes interferens. I början av 1939 offentliggjordes en hel del lyckade resultat, och sedan dess utövas förfarandet praktiskt litet varstädes i världen. Här i Sverige torde optik med *antireflexskikt* mest vara känd under benämningen *T-optik*, som begagnas av tyska firman Zeiss för den ytbelagda optik, som saluföres av detta berömda företag.

I fig. 3 åskådliggöres schematiskt förloppet, då en ljusstråle 1 träffar ett antireflexskikt i punkten *A*. En del av den infallande strålens ljus reflekteras i form av stråle 2, medan resten (stråle 3) går in i skiktet och vid punkt *B* av dettas nästa yta dels reflekteras (stråle 4), dels går in i den där innanför belägna linsen (stråle 5). Stråle 4 uppdelas sedan återigen vid punkt *C* i en utgående stråle (6) och en reflekterad stråle (7), etc.

Av fig. 4 framgår, att den vid *A* reflekterade strålen 2 kommer att sammanfalla med strålen 6′ från den vid *A′* infallande strålen 1′, vilken först två gånger passerat skiktet (strålbanan *A′B′A*) samt dessutom med strålen 10″, vilken härleder sig från den primära

E. Goldberg i hans värdefulla arbete »Der Aufbau des photographischen Bildes», 1922. Andra uppl. 1925.

strålen 1″, o. s. v. Dessa strålar kunna alltså interferera. I stort sett kan man härvid försumma strålarna 10″, 14‴ etc., vilka reflekterats många gånger genom skiktet, på grund av deras ytterst obetydliga intensitet; detta framgår omedelbart av formlerna (10). Om sålunda reflexljuset skall utsläckas, fordras först och främst, att strålarna 2 och 6′ i varje punkt skola hava motsatt fas samt dessutom att de skola ha *samma amplitud* (= *samma intensitet*).

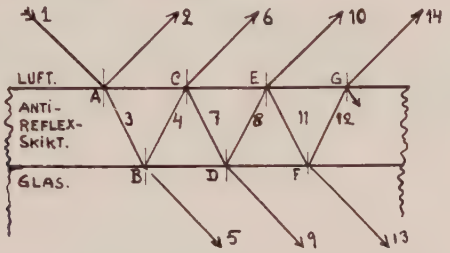


Fig. 3. Den mot antireflexskiktet på linsens yta infallande strålen 1 uppdelas i en rad olika stråldelar (jämför texten).

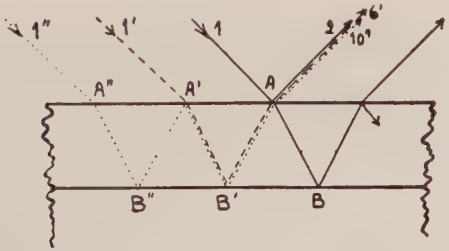


Fig. 4. Till förklaringen av interferensverkningarna i antireflexskiktet (jämför texten).

Låt oss först granska det senare villkoret. Vi antaga därvid, att samtliga infallande strålar (1, 1′, 1″ etc.) ha intensiteten I_0, samt att reflexionsförmågan vid antireflexskiktets ytteryta är R_1 och vid dess inre yta R_2. I så fall måste ju intensiteten hos stråle 2 vara $R_1 I_0$, hos stråle 3 $(1 - R_1)I_0$, hos stråle 4 $R_2(1 - R_1)I_0$ och hos stråle 6 $R_2(1 - R_1)^2 I_0$. Villkoret för att stråle 2 och 4 skola helt kunna utsläcka varandra kan alltså skrivas:

$$R_1 I_0 = R_2(1 - R_1)^2 I_0 \qquad (3a)$$

Nu är emellertid att märka, att reflexionsförmågans (R_1 resp. R_2) siffervärde alltid är några få hundradelar, vilket redan påpekats i

samband med (1). Värdet på storheten $(1 - R_1)$ måste alltså vara i det närmaste 1. (3a) ger oss alltså villkoret

$$R_1 = R_2 \tag{3b}$$

Hade vi istället för att diskutera intensiteten arbetat med amplituder, hade villkoret kunnat skrivas $\sqrt{R_1} = \sqrt{R_2}$, ty amplituderna hos strålarna 2 och 6 äro proportionella med dessa storheter.

Beteckna vi brytningsindex för mediet utanför antireflexskiktet med n_0, medan antireflexskiktets egen brytningsindex är n_1 och linsens glas har brytningsindex n_2, kunna vi med tillämpning av (1) skriva det just diskuterade villkoret för fullständig utsläckning genom interferens [1]

$$\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tag{4}$$

eller

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \tag{5a}$$

Om mediet framför linsens antireflexskikt är luft ($n_0 = 1$), förenklas villkoret ytterligare till

$$n_1 = \sqrt{n_2} \tag{5b}$$

Som vi strax skola se, ha vi just i utfinnandet av lämpligt material (lagom brytningsindex) för antireflexskiktet en av de största svårigheterna, när det gäller att häva reflexerna. — (1) har härletts under den förutsättningen, att ljuset infaller vinkelrätt mot ytan, men den gäller med ganska stor noggrannhet även vid infallsvinklar upp till åtminstone 20°. Detsamma gäller därför tydligen även (5).

Vi komma så till villkoret, att stråle 2 och 6′ skola ha *motsatt fas*. Detta betyder, att den optiska vägskillnaden mellan dem skall utgöra ett udda antal halva våglängder.

I fig. 5 kunna vi närmare följa strålarna 1—2 och 1′—6′ resp. Tydligt är, att strålarna 1 och 1′ ha samma fas i punkterna H och A' resp. ($A'H$ är vinkelrät mot strålgången). Innan strålarna därefter löpa samman fr. o. m. punkt A, har sålunda stråle 1 gått vägen HA, medan strålen 1′ gått vägen $A'B'A$. Vi kalla motsvarande optiska vägsträckor resp. s_1 och s_2 samt observera, att i vardera fallet en fasförskjutning av $\frac{\lambda}{2}$ äger rum (i resp. A och B') på grund

[1] Om minustecken sättes framför högra ledet av ekv. (4), kommer man fram till villkoret $n_0 = n_2$. Detta är det i större läroböcker och handböcker ofta diskuterade fallet rörande interferens i ett tunt planparallellt skikt, på båda sidor omgivet av exempelvis luft. Detta fall saknar emellertid allt intresse, när det gäller att åstadkomma reflexionsfrihet hos linser.

av reflexion mot tätare medium. Vi låta vidare d betyda antireflexskiktets tjocklek, n_1 dess brytningsindex, α ljusets infallsvinkel och β dess brytningsvinkel vid gränsytan luft—antireflexskikt.

$$S_1 = HA + \frac{\lambda}{2}$$

men $$HA = A'A \sin \alpha = A'A\, n_1 \sin \beta$$

och $$AA' = 2d \operatorname{tg} \beta$$

Vi få alltså

$$S_1 = 2n_1 d \operatorname{tg} \beta \sin \beta + \frac{\lambda}{2} = \frac{2n_1 d \sin^2 \beta}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2}. \tag{6}$$

Vidare erhålles

$$S_2 = \frac{2n_1 d}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2}. \tag{7}$$

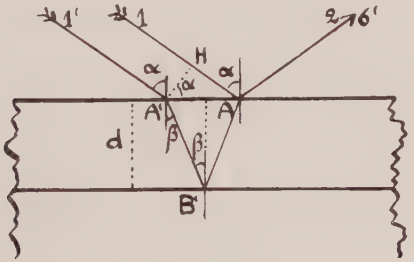


Fig. 5. Till förklaringen av interferensverkningarna vid antireflexskiktet (jämför texten).

Vägskillnaden blir följaktligen

$$S_2 - S_1 = \frac{2n_1 d}{\cos \beta} \cdot (1 - \sin^2 \beta) = 2n_1 d \cos \beta. \tag{8}$$

För att strålarna 2 och 6′ genom interferens skola släcka ut varandra, måste sålunda denna optiska vägskillnad motsvara ett udda antal halva våglängder. Vi kunna alltså skriva detta villkor

$$2n_1 d \cos \beta = (2z + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}$$

eller

$$d = (2z + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{4n_1 \cos \beta} \qquad (z = 0, 1, 2, 3 \ldots.) \tag{9}$$

Skiktets tjocklek skall alltså vara $^1/_4$ *våglängd,* event. $^3/_4$, $^5/_4$ våglängd etc. I själva verket kommer endast det första värdet ifråga, som vi strax skola se.

Hittills ha vi icke tagit hänsyn till de efter upprepad reflexion ur antireflexskiktet åter utgående strålarna 10″, 14‴, etc. (fig. 3—4). Dessa senare äro också så mycket svagare än de nu nämnda, att de mycket väl kunna försummas, såsom redan påpekats. Önska vi jämföra intensiteterna hos de skilda strålarna, finna vi av fig. 3, att dessa äro:

$$\left.\begin{aligned}
I_2 &= R \cdot I_1 \\
I_3 &= (1-R) \cdot I_1 \\
I_4 &= R \cdot I_3 = R \cdot (1-R) \cdot I_1 \\
I_5 &= (1-R) \cdot I_3 = (1-R)^2 \cdot I_1 \\
I_6 &= (1-R) \cdot I_4 = R \cdot (1-R)^2 \cdot I_1 \\
I_7 &= R \cdot I_4 = R^2 \cdot (1-R) \cdot I_1 \\
I_8 &= R \cdot I_7 = R^3 \cdot (1-R) \cdot I_1 \\
I_9 &= (1-R) \cdot I_7 = R^2 \cdot (1-R)^2 \cdot I_1 \\
I_{10} &= (1-R) \cdot I_8 = R^3 \cdot (1-R)^2 \cdot I_1 \\
I_{11} &= R \cdot I_8 = R^4 \cdot (1-R) \cdot I_1 \\
I_{12} &= R \cdot I_{11} = R^5 (1-R) \cdot I_1 \\
I_{13} &= (1-R) \cdot I_{11} = R^4 (1-R)^2 \cdot I_1 \\
&\text{o. s. v.}
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

En närmare granskning visar nu, att om skikttjockleken är $^1/_4 \lambda_1$, så att stråle 6′ och 2 försvaga varandra maximalt, komma även strålarna 10″, 14″ etc. att verka försvagande på stråle 2. Vi kunna nu bestämma det reflekterade ljusets amplitud genom att helt enkelt addera amplituderna, var och en med sitt tecken, för de skilda däri ingående strålarna. Då intensiteten är proportionell med kvadraten på amplituden, kunna vi alltså även beräkna det reflekterade ljusets intensitet (I_r) i föreliggande fall:

$$I_r = (\sqrt{I_2} + \sqrt{I'_6} - \sqrt{I''_{10}} - \sqrt{I'''_{14}} - \dots)^2 \qquad (11)$$

eller om motsvarande värden på I_2, I_6, etc. insättas enligt (10):

$$\begin{aligned}
I_r &= (\sqrt{RI_1} - \sqrt{R(1-R)^2 I_1} - \sqrt{R^3(1-R)^2 I_1} - \dots)^2 \\
&= RI_1 [1 - (1-R) - R(1-R) - R^2(1-R) - \dots]^2 \\
&= RI_1 [1 - (1-R) \cdot (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)]^2 \\
&= RI_1 \left[1 - \frac{1-R}{1-R}\right]^2 = RI_1 [1-1]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Utsläckningen blir alltså fullständig. Det är tydligt, att den förenkling, som tidigare gjordes därigenom att de flera gånger inom skiktet reflekterade strålarna försummades, just kompenseras genom approximationen vid övergång från (3a) till (3b).

Intressant är nu att på liknande sätt beräkna intensiteten I_g för det ljus, som går in i glaset under antireflexskiktet, för det fall att reflexljuset utsläckes. Vi få då

$$I_g = [\sqrt{I_5} + \sqrt{I_9} + \sqrt{I''_{13}} + \ldots.]^2 \qquad (12)$$

eller med insättning av motsvarande värden från (10)

$$\begin{aligned} I_g &= [\sqrt{(1-R)^2 \cdot I_1} + \sqrt{(1-R)^2 \cdot R^2 \cdot I_1} + \sqrt{(1-R)^2 \cdot R^4 \cdot I_1} + \ldots.]^2 \\ &= (1-R)^2 \cdot I_1 [1 + R + R^2 + \ldots.]^2 \\ &= \frac{(1-R)^2 \cdot I_1}{(1-R)^2} = I_1. \end{aligned}$$

När sålunda reflexljuset uteblir, går hela det mot antireflexskiktet infallande ljuset in i glaslinsen och kommer avbildningen till godo. Detta är ju egentligen självklart; det följer ju redan av energiprincipen, att den infallande strålningsenergien till hela sin mängd måste kunna återfinnas dels i reflexljuset, dels i det i glaslinsen inträdande ljuset, såvida vi kunna bortse från eventuellt absorberad strålningsenergi. I den mera elementära optiska litteraturen ha dessa förhållanden ofta missförståtts, och man har ej sällan betvivlat, att antireflexskiktet skulle kunna *öka »ljusstyrkan»* hos linsen. Så är likväl tydligen fallet.

Den första iakttagelsen av undanträngd reflexion i praktiken, torde sannolikt ha gjorts av den berömde engelske forskaren D. Brewster, vilken 1824 beskriver en sönderbruten kvartskristall, där brottytorna verkade svarta. Trots detta visade sig ljuset fullständigt kunna passera dessa ytor, det var endast reflexionen som upphävts. Åtskilligt senare fann man, att glasföremål (t. ex. glasrutor), som utsatts för väder och vind under lång tid, genom vittring kunde få själva ytskiktet omvandlat till kiseldioxid, som har lägre brytningsindex än själva glaset. De övriga beståndsdelarna i det yttre glasskiktet utlösas därvid. Det visar sig även, att en del till fotografiska objektiv ofta använda glassorter voro speciellt utsatta härför och fingo bruna fläckar i ytan, vilka endast kunde avlägsnas genom slipning. Den berömde objektivkonstruktören H. Dennis Taylor undersökte på 90-talet en dylik lins och fann, att de bruna fläckarna icke verkade absorberande på ljuset — vilket man ju kunde ha väntat sig — utan att ljusets transmission tvärtom ökades genom dem. Han lyckades också utarbeta en kemisk behandlingsmetod, varigenom ytan syntes mörkare och transmissionen ökades eller, vilket är det samma, reflexionen minskades (publicerat i patentskrift av 1904). Det behöver väl i detta fall knappast påpekas, att den mörka färg, det här är tal om, är en *interferensfärg* och icke en egenfärg hos själva ytskiktet.

Den kemiska metoden för framställning av ett tunt antireflexskikt är icke särdeles smidig; de moderna antireflexskikten framställas också genomgående medelst fysikaliska metoder. Detta tillgår så, att de linser, glasskivor o. d., vilka skola förses med antireflexbeläggning, placeras i en glasklocka, som evakueras, varefter ett volframband inuti klockan upphettas till hög temperatur på elektrisk väg. Därvid avdunstar ett på bandet lagt material och sprider sig rätlinigt åt alla håll samt belägger alla föremål, som komma i ångstrålarnas väg. Om dessa föremål ej befinna sig på alltför kort avstånd från det avdunstande ämnet, blir ytskiktet av synnerligen jämn tjocklek.

Svårigheten är nu närmast att finna lämpligt material för framställning av ytskikt. Eftersom de optiska glassorterna ha brytningsindex 1,5—1,7, bör antireflexskiktet enl. (5b) ha en brytningsindex 1,22—1,34, om vi skola kunna åstadkomma total utsläckning av reflexionen. Tyvärr är det svårt att finna fasta ämnen med så låg brytningsindex. Dessutom bör ju ämnet ifråga vara svårlösligt i vatten och hårt, så att ytan ej skadas mekaniskt. Största användningen torde magnesium- och kalciumfluoriderna ha vunnit. Deras brytningsindex är visserligen något för hög (resp. 1,38 och 1,43), men i övrigt uppfylla de bra de ställda fordringarna. Vad smältpunkten för magnesiumfluoriden angår, ligger den vid ca 1 400° C, och fluoriden avdunstar lätt vid ca 2 200° C.

Egentligen skulle glaslinser av olika glassorter förses med antireflexskikt av skilda material för att full utsläckning skulle kunna ske (enl. 5b). Det är tydligt, att detta ej går att genomföra på grund av bristen på lämpligt material. Man får nöja sig med att belägga objektivets olika dellinser med samma slag av antireflexskikt, och dessa ha alltid något för hög brytningsindex. Man får därför också vara tillfreds med en kraftig försvagning av reflexljuset och får avstå från dess totala avlägsnande.

Som redan påpekats, bör reflexljuset vid lämplig brytningsindex helt utsläckas för monokromatisk strålning, om antireflexskiktets tjocklek är ett udda antal fjärdedels våglängder (formel 9). I regel arbetar man dock ej med dylik strålning utan med *vitt ljus* eller i varje fall rätt utbredda spektralområden. I varje fall erhålles då total eller nästan total utsläckning av reflexljuset (total eller nästan total transperans) för den våglängd, som tillfredsställer (9), medan övriga våglängder till att börja med reflekteras allt starkare ju mera deras våglängdsvärden skilja sig från den optimala. Såväl för större som mindre våglängder uppnås slutligen maximal reflexion, varefter denna börjar avtaga, o. s. v. En närmare granskning av förhållandena i anslutning till (9), visar omedelbart, att om

total utsläckning avsetts för exempelvis grönt ljus, uppträder nämnvärd reflexion först vid ytterpartierna av det synliga spektrum, om skikttjockleken $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda \text{ grönt}}{n_1}$. Det svaga reflexljuset verkar därför mörkt rödviolett — komplementfärgen till grönt —. Om skikttjockleken istället $\frac{3}{4} \cdot \frac{\lambda \text{ grönt}}{n_1}$, erhålles visserligen identisk lika släckning för den optimala gröna våglängden, men stor reflexion erhalles raskare för omgivande våglängder. Göres skikttjockleken relativt betydande, — alltså $= (2z + 1) \cdot \frac{\lambda \text{ grönt}}{n_1}$ med z rel. stort — ligga maxima och minima av reflexion så pass tätt inom det synliga vaglängdsomraadet, att reflexljuset kan anses praktiskt taget vitt, och dess intensitetsvärde blir ett slags medelvärde mellan det maximala reflexionsvärdet och värdet noll.

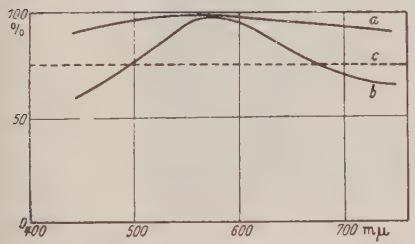


Fig. 6.

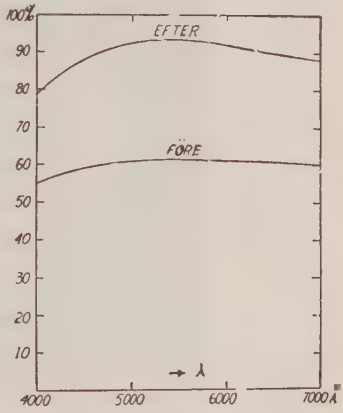


Fig. 7.

Fig. 6. Transmissionens storlek för olika våglängder vid en enkellins om antireflexskiktets tjocklek är resp. $\frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda \text{ grönt}}{n_1}$ (kurva a) och $\frac{3}{4} \cdot \frac{\lambda \text{ grönt}}{n_1}$ (kurva b). Kurva c avser glaslins utan antireflexskikt.

Fig. 7. Ljustransmissionens storlek i ett Xenon-objektiv F: 2,0 före och efter antireflexbeläggning.

Fig. 6 åskådliggör transparensens beroende av våglängden vid en enkellins, om antireflexskiktets tjocklek utgör en kvarts våglängd (kurva a), resp. tre kvarts våglängd (kurva b), samt om intet antireflexskikt föreligger (kurva c). Den stora fördelen med *tunt*

reflexionsskikt framgår alltså tydligt, och man begagnar uteslutande dylika av $^1/_4$ våglängds tjocklek. Om våglängden för grönt antages vara omkr. 5 700 Å och n_1 omkr. 1,40, bör tydligen antireflexskiktets tjocklek vara omkr. 0,1 μ. Pådunstningen av skiktet fortsättes härvid, tills skiktet synes visa den nämnda komplementfärgen (d. v. s. rödviolett). — I fig. 7 visas transmissionen enligt mätningar av Cartwright för ett Xenon-objektiv F:2 före och efter antireflexbeläggning. Den maximala transparensen synes föreligga vid 5 400 Å, och maximet är mycket flackt.

Fig. 8. Byst, fotograferad genom en glasskiva, vars övre hälft belagts med reflexborttagande medel. I den nedre hälften är glasytan ej behandlad, varför starkt reflexljus utsändes härifrån. (Efter R. Richter, Zeiss' Nachrichten 1940).

Ett intressant förhållande är, att man vid praktisk antireflexbeläggning erhåller gynnsammare resultat än man av teoretiska skäl väntat sig. Förklaringen härtill anses vara, att de på ytan kondenserade antireflexskikten äro porösa, inhomogena, och därför få lägre reflexionskoefficienter. Givet är emellertid, att porösa skikt måste vara ganska ömtåliga.

Vad slutligen vinsten av en antireflexbeläggning av fotografiska objektiv angår, har den berörts redan i inledningen till denna uppsats: Objektivet vinner i ljusstyrka, vilket är av särskilt värde

vid vissa specialarbeten, t. ex. vid röntgenfilmning, men icke heller är utan betydelse vid de flesta slag av fotografering. En ljusstyrkeökning motsvarande exempelvis 1—1 ½ bländavsteg betyder, att mindre bländare kan begagnas, varigenom ökat skärpedjup ernas utan att detta behöver ske på bekostnad av exponeringstiden, vilken kan behallas lika kort. Vidare vinnes ju avsevärd försvagning av reflexslöjan och därmed en utökning av det kontrastområde, som optiken förmar återge. Slutligen befrias man från de svarartade spegelbilderna, vilka ju tidigare ruinerat så många i övrigt väl utförda och vackert tänkta bilder, speciellt vid motljus.

Men ej nog härmed. Om antireflexbeläggningen kan utföras enkelt och billigt — och mycket talar för att så kommer att bli fallet — kunna även glasskivor och andra reflexgivande föremål förses härmed, t. ex. glasskivor över mätskalor o. d. vid olika vetenskapliga instrument, vilka många gånger äro svåra att avläsa under de belysnings- och observationsförhållanden, som kunna vara rådande. Ja, uteslutet är ej, att rutor på bilar, skyltfönster o. d. skulle kunna förses med dylikt reflexskydd, även om detta kanske ej ställer sig så enkelt på grund av deras utsträckning. Vad som redan nu kan förutses är däremot, att färgfilter och andra hjälpmedel för fotografiskt bruk av den mera kräsna fotografen komma att förses med antireflexskikt. Införandet av dylika skikt måste betraktas som det kanske mest betydande principiellt nya uppslaget inom optiken under de senare decennierna.

Ett stativ för Whitings fallförsök.

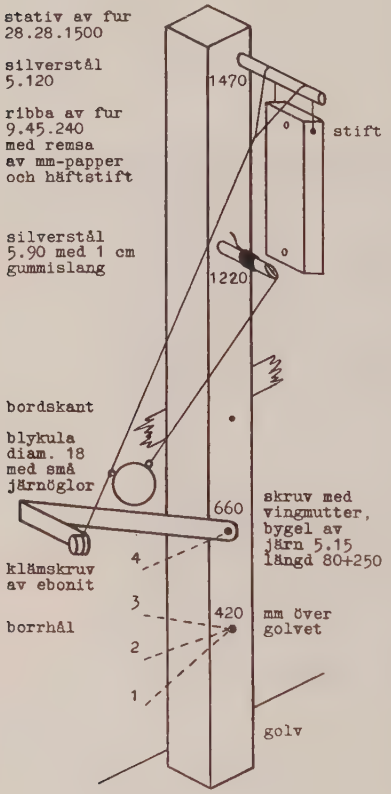
Av **ALFRED NILSSON.**

En enkel fallmaskin enligt Whiting — en pendel får träffa en fallande ribba — är beskriven i Elementa, argång 19, s. 28. Försöket är mycket lämpligt som laborationsövning, men varje grupp behöver enligt beskrivningen 2 bunsenstativ och 3 dubbelmuffar, vilket sällan torde vara tillgängligt. Dessutom är monteringen och uträkningen tidsödande.

Ett stabilt stativ, som avsevärt underlättar försökets utförande, visas i figuren, i vilken måtten äro utsatta i mm. Hyvlat virke med de angivna standarddimensionerna kan köpas i en byggnadsmaterialaffär. Silverstålen skola slås in vinkelrätt mot stativet med 11 mm skillnad i sidled. Det nedre silverstålets ända är som synes snett avfilad och försedd med en skåra för pendelns snöre utefter den elliptiska ändytans storaxel. Snöret fortsätter in under gummi-

slangen och genom ett hål i stativet, så att pendelns längd bekvämt kan ändras.

Stativet ställes i svag lutning och fastskruvas vid en under bordskivan fastsätt träkloss. Därefter justeras det till lodrätt läge. — Man inställer järnbygeln under syftning mot ribbans nedre ända, så att denna kommer i jämnhöjd med pendelns fästpunkt på 9 mm avstånd. En pappbit bestruken med tryckssvärta gnides mot blykulans högra del, varefter tråden, när allt är stilla, brännes av från vänster strax ovanför klämskruven.



s = ribbans fallväg.
l = pendelns längd.
a = avståndet mellan ribbans nedre ända och märket på papperet.
$s = a + l$, vilket lätt inses.

Man börjar med ungefär 9 dm pendellängd (läget 1 hos järnbygeln) och fortsätter med ner till 5 dm (lägena 2—5). Pendelns svängningstid bör bestämmas med stoppur, varvid man räknar åtminstone 25 dubbelsvängningar = = 100 t, där t är ribbans falltid. Tabellen kan ha följande kolumner:

a	l	s	t	$s:t$	$s:t^2$

Följande värden på $s:t^2$ kunna anses vara typiska för en försöksserie, som utföres under 2 timmar av 2 medelmåttiga laboranter i klass 4[1]:

494 489 480 488 497.

Alltså g = 979 cm/sek² med ett relativt medelfel av 0,6 %.

Statens provningsanstalt.

Av **BROR GUSTAVER.**

I programmet vid Föreningens för matematisk-naturvetenskaplig undervisning årsmöte i jan. 1941 ingick ett besök vid Statens provningsanstalt (se Elementas marsh. 1941, s. 38). Besökarna fingo ett starkt intryck av den mångfald arbeten som utföras vid anstalten. De två à tre timmar som stodo till buds, räckte endast till en hastig rundvandring genom de olika avdelningarna. Denna uppsats är avsedd att vara ett komplement till minnesbilderna från besöket och att ge dem, som ej hade tillfälle att vara med, en orientering över vad provningsanstalten är och gör.

Statens provningsanstalt sorterar under handelsdepartementet och står under ledning av en styrelse, bestående av fem av Kungl. Maj:t för 4 år förordnade ledamöter samt anstaltens chef, som även förordnas av Kungl. Maj:t. Nuvarande chef är överdirektör Otto Forsman.

Materialprovningar började i vårt land utföras år 1875 vid en på Jernkontorets initiativ tillkommen materialprovningsanstalt vid Liljeholmen i Stockholm. Denna skulle tillhandagå den svenska järnhanteringen men även allmänheten med materialundersökningar. År 1888 inrättades vid Chalmers i Göteborg för västra Sveriges räkning en liknande offentlig provningsanstalt. Materialprovningsanstalterna både i Sverige och i utlandet kommo snart att tjäna ännu en viktig uppgift, nämligen att bereda eleverna vid de tekniska högskolorna tillfälle till praktiska övningar i hållfasthetslära. I syfte att förbättra denna undervisning inrättade man

år 1896 Kungl. Tekniska högskolans materialprovningsanstalt, med vilken den tidigare försöksanstalten vid Liljeholmen sammanslogs. Anstaltens uppdrag tillväxte raskt, och efter 20 år stod det klart, att det oerhört ökade arbetet gjorde det omöjligt att nöjaktigt tillgodose anstaltens dubbla uppgift att samtidigt vara provnings- och undervisningsanstalt. Den nyuppförda Tekniska högskolan utrustades med egna provningsmaskiner för undervisningens räkning, och för Statens provningsanstalt uppfördes särskilda byggnader vid Drottning Kristinas väg, där provningsverksamheten sedan bedrivits från nyåret 1920. I den mån som provningsanstaltens egen utrustning icke är tillräcklig men behövlig utrustning finns hos andra institutioner, samarbetar provningsanstalten med dessa, t. ex. med Tekniska högskolans institutioner, för att på bästa sätt kunna stå sina uppdragsgivare till tjänst.

Statens provningsanstalt har till uppgift att för det allmännas och för enskildas räkning samt i vetenskapligt syfte utföra provningar och undersökningar av material, konstruktionsdelar, instrument och apparater med avseende på deras mekaniska, fysikaliska och kemiska egenskaper. Arbetena utföras dels på uppdrag av offentliga myndigheter och institutioner samt enskilda mot betalning, dels i tekniskt-vetenskapligt syfte för en fortgående utveckling av anstaltens arbetsmetoder eller i det allmännas och vetenskapens intresse. Vidare skall anstalten utöva kontroll över normalpapper och normalbläck m. m. Arbetet är fördelat på fem avdelningar jämte en kontorsavdelning. De tekniska avdelningarna och deras arbetsuppgifter äro:

I. *Mekaniska avdelningen.* Denna utför hållfasthets- och andra fysikaliska undersökningar av metaller och konstruktionsdelar därav; värmebehandlings- och mikroskopiska undersökningar av järn, stål och andra metaller; hållfasthetsundersökningar av läder, remmar och tågvirke samt porslin m. fl. material och föremål därav; kontroll av provningsmaskiner samt provtagning, besiktning och kontroll vid järnverk och verkstäder. Till avdelningen hör en mekanisk verkstad.

II. *Byggnadstekniska avdelningen* utför hållfasthets- och andra fysikaliska undersökningar av natursten, tegel och annan mursten, av bindemedel sasom kalk och cement,[1] av golv- och väggplattor o. d., avloppsrör av betong och lergods m. m., av isolerings- och andra byggnadsmaterial samt av byggnadskonstruktioner såsom

[1] Med *cement* avses det finmalda pulver, som utgör bindemedel; den färdiga gjutningen (blandning av cement, sand, sten och vatten, eventuellt med järnarmering) benämnes *betong*.

väggar, pelare, bjälklag och andra byggnadsdelar; undersökningar av betongmaterial och betong, såsom bedömning av grus och stenmaterial, provgjutningar för bestämning av lämplig betongsammansättning, provning av tryck- och böjhållfasthet, vattentäthet m. m.; i avdelningens trälaboratorium utföras undersökningar av trä och konstruktionsdelar därav, kryssfanér, träfiberplattor, träförband m. m. beträffande hållfasthet och andra fysikaliska egenskaper, provning av impregneringsmedel mot röta m. m.; undersökningar av värmeisoleringsförmåga hos byggnadskonstruktioner; brandtekniska provningar (bl. a. med hänsyn till brandteknisk klassindelning) av byggnadsmaterial och byggnadsdelar; provning av eldskyddspreparat och kemiska eldsläckningsapparater; undersökningar av vägbeläggningsmaterial; besiktning av inträffade skador på hus och andra byggnadsverk samt provtagning, besiktning och kontroll vid fabriker och på arbetsplatser. Till avdelningen hör en snickarverkstad och trätork samt verkstad för stenbearbetning.

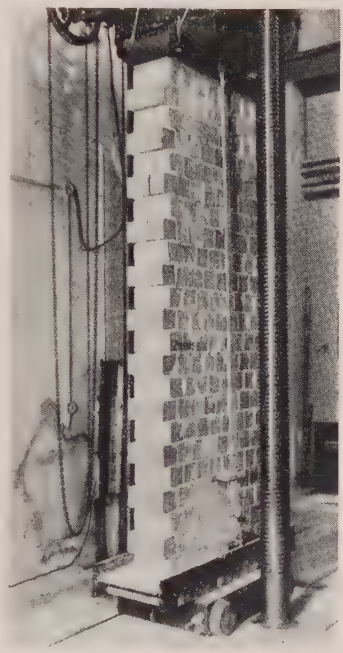


Fig. 1. Tryckprov på murpelare i 500 tons press.

III. Den *elektriskt-fysikaliska avdelningen* utför kalibrering av elektriska normalelement, normalmotstånd, kondensatorer och induktionsspolar; provning och kontrollering av elektriska mätinstrument och mätapparater; elektrisk provning av ledningS- och isolationsmaterial; bestämning av magnetiska egenskaper hos järn och stål; provning av elektriska apparater och maskiner; fysikaliska undersökningar, såsom kontrollering av termometrar, termoelement och andra temperaturmätningsinstrument, bestämning av värmeledningsförmåga hos metaller och värmeisoleringsförmåga hos värmeisolationsmaterial, fotometriska undersökningar m. m.

IV. *Bergskemiska avdelningen* utför analyser av järn, stål, ferrolegeringar och andra metaller och legeringar; korrosionsprov på metaller; analyser av bergarter och malmer, såsom järn-, mangan- och krommalm, bly-, koppar- och zinkmalm, guld- och

silvermalm m. fl.; analyser av svavel och svavelkis, natriumsulfat och andra oorganiska salter, syror och alkalier samt av andra oorganiska industriprodukter och preparat; undersökningar av eldfasta material; provtagning av metaller, malmer och andra oorganiska produkter; besiktning och kontroll vid järnverk, fabriker och lagerplatser.

V. *Kemiskt-tekniska avdelningen* utför analyser och undersökningar av fasta och flytande bränslen, såsom stenkol, koks, bensin, brännoljor m. m.; undersökningar av smörjoljor, fetter, tvättmedel, färger (särskilt rostskyddsfärger) och andra bestrykningsmedel; kemiska träprodukter samt tjär- och asfaltprodukter, såsom asfaltemulsioner, bituminösa vägbeläggningar m. m.; arsenikprov m. m.; undersökningar av läder, skinn och garvämnen, gummi samt organiska preparat (dock icke läkemedel, närings- och njutningsmedel); kemiska och fysikaliska undersökningar av pappersmassa, papper, papp och skrivmedel samt textilindustriens råmaterial och produkter; provtagning, besiktning och kontroll vid fabriker och lagerplatser.

Vid varje avdelning finnas ett antal ordinarie befattningshavare, vilka antingen utnämnas av Kungl. Maj:t (fullmakt) eller tillsättas av styrelsen. Under 1942 och 1943 var det totala personantalet vid provningsanstalten över 90 personer, varav 29 voro ordinarie befattningshavare. De övriga voro extra ordinarie ingenjörer, mekaniker, laboratorie- och skrivbiträden samt ett varierande antal tillfälliga biträden och arbetare.

Provningsanstalten brukar även varje år bereda ett mindre antal studerande möjlighet att som praktikanter sätta sig in i någon viss avdelnings verksamhetsområde. Förutsättningen härför är, att vederbörande äger erforderliga förkunskaper, så att han relativt snabbt kan sätta sig in i arbetet och även bli till nytta för provningsanstalten.

De undersökningar, analyser och besiktningar, som provningsanstalten utför åt myndigheter och privata uppdragsgivare, betalas efter en av Kungl. Maj:t fastställd taxa (Svensk författningssamling nr 268/1933). År 1942—43 utgjorde anstaltens inkomster av betalade uppdrag och forskningsarbeten 603 000 kronor och dess utgifter 656 000 kr. Antalet intyg och utlåtanden var 6 149.

Provningsanstalten utövar vidare en omfattande rådgivande verksamhet. Detta sker dels i samband med besök vid provningsanstalten, dels som svar å förfrågningar, såväl skriftliga som per telefon. I den mån upplysningar kunna givas utan särskilda, tidskrävande utredningar, är denna rådfrågning avgiftsfri.

Enär allra största anspråk måste kunna ställas på tillförlitligheten av provningsanstaltens officiella intyg, är det nödvändigt, att de använda metoderna och anordningarna äro föremål för utveckling och ständigt återkommande kontroll inom anstalten. Vid kemiska analyser utföras dubbelprov av två på området vältränade laboranter. Det är givet, att sådana kontrollåtgärder dra kostnader och fördyra intygen, men tillförlitligheten måste med nödvändighet komma i första rummet.

I den mån arbetet medger och penningmedel stå till förfogande, utföres även forskningsarbete. Ett flertal sådana arbeten av betydande omfattning är för närvarande i gång med anslag av bl. a. Tekniska forskningsrådet och Statens kommitté för byggnadsforskning. Resultaten av viktigare provningsserier och av forskningsarbeten, utförda för allmänna medel, offentliggöras i en serie »Meddelanden från Statens provningsanstalt», som utges av anstalten. Hittills har i serien utkommit 93 meddelanden. En förteckning över dessa finns i cirkulär 13/1939 från provningsanstalten, som kan erhållas på begäran. Bland de publicerade undersökningarna må nämnas ett flertal avhandlingar rörande härdat stål och utmattning hos stål, svetsskarvar m. m. samt rörande sanitetsporslin; avhandlingar rörande betong, natursten, trä m. fl. material samt rörande brandprovningar; om bestämning av magnetiska egenskaper hos järn och stål och om kabelmassor, avhandlingar rörande oljor, läder, textilvaror och papper samt tvättmedelsundersökningar; samt om analysmetoder för olika ämnen.

En del av de i cirkulär 13/1939 omnämnda avhandlingarna äro slutsålda, men de flesta kunna erhållas för en ringa kostnad. Lärare kunna säkerligen därur hämta uppslag till ämnen, lämpliga för uppgifter till enskilt arbete i gymnasiets högsta ringar.

Det kan vara av intresse att något närmare behandla de viktigaste av de arbeten, som provningsanstalten utför. Många av dessa röra också problem som kristiden fört med sig och ha därför aktualitet.

De vid den *mekaniska avdelningen* utförda hållfasthetsproven ha i regel följande syften: a) kontroll vid leverans av stål och metaller, maskiner och maskindelar; b) licens- och kompetensprov för svetsare; c) provning av stål och metaller, maskiner och maskindelar som vid användning visat felaktigheter; d) undersökningar för utforskande av lämpligaste sammansättning och värmebehandling av stål och metaller för särskilda ändamål. Anstalten har flera maskiner för provning av draghållfasthet, den största för belastningar upp till 100 000 kgf. Hårdheten hos stål och järn

bestämmes med den s. k. Brinell-pressen, i vilken en kula av härdat stål med 10 mm diameter pressas med 3 000 kgf mot materialet. Man kan också använda en 5 mm kula och $^1/_4$ av belastningen. Kvoten mellan belastningen och den kalottformade intrycksytans storlek i kgf/mm^2 är ett internationellt mått på hårdheten. För härdat stål gäller värdet ca 700 och för mjukt järn ca 100. Hård-

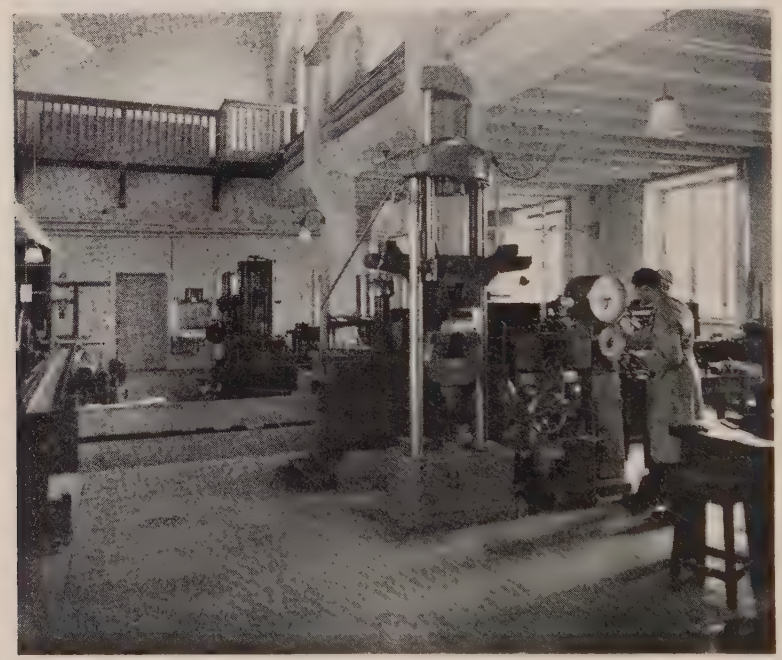


Fig. 2. Interiör från mekaniska avdelningen.

heten hos härdat stål provas med en diamantspets av konisk form och 120° toppvinkel (eftersom stålkulan knappast ger intryck i det lika hårda provmaterialet). Diamanten pressas mot stålytan med en initialkraft av 10 kgf, som successivt ökas till 150 kgf och därefter åter minskas till 10 kgf. Man uppmäter det kvarstående intryckets djup (ca 0,1 mm) och anger hårdheten med det s. k. Rockwelltalet. Tunna rakblad (ca 0,15 mm) uthärda inte så starka påfrestningar som 150 kgf, och man använder då betydligt lägre belastningar, från 1 till 50 kgf, och en pyramidformad (kvadratisk) diamantspets (Vickersprovet). Man mäter det kvadratiska intryckets diagonaler; belastningen dividerad med det pyramidfor-

made intryckets yta tages som mått på hårdheten, och vid ett riktigt avpassat värde på diamantens toppvinkel (136°) ger beräkningen av hårdheten siffervärden, som överensstämma med Brinelltalen.

Maskindelar, som utsättas för i stort antal upprepade påkänningar, kunna så småningom brista, fastän de enstaka påkänningarna äro betydligt lägre än som motsvarar maskindelens hållfasthet vid lugn belastning. Man säger att materialet blir ut-

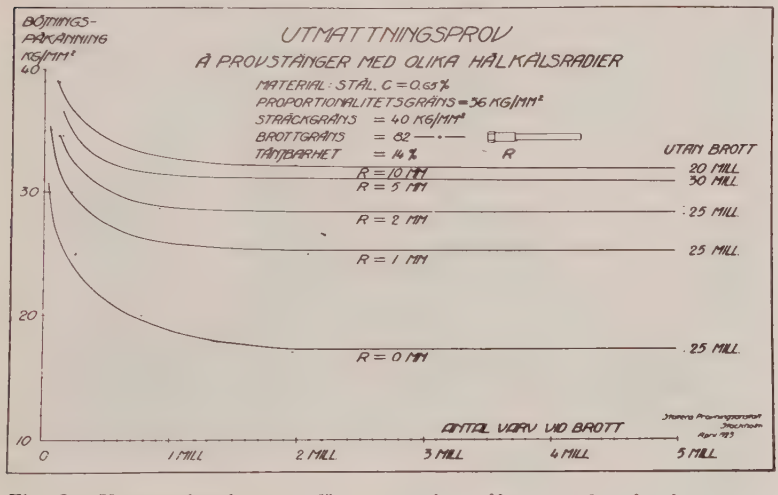


Fig. 3. Utmattningskurvor för en serie stålstavar, bestående av en grövre del (17 mm diam.) och en klenare del (10 mm diam.). Vid böjningspåkänning uppstår brottet vid skarven (*R* i skissen i fig.); denna är utformad till en hålkäl med krökningsradie 10, 5, 2 och 1 mm (de fyra övre kurvorna) och en skarp, rät vinkel (nedersta kurvan; *R* = 0 mm). Utmattningsgränsen för denna senare stav är 17 kgf/mm², under det att staven med 10 mm hålkälsradie uthärdar nästan dubbelt så stora påkänningar (33 kgf/mm²).

mattat. Undersökning av metallmaterial i detta avseende sker genom att utsätta en provstav för en serie upprepade belastningar genom böjning fram och åter eller under rotation ända till dess brott uppstår. Flera stavar av samma material provas på samma sätt med andra belastningar. Sammanställes böjpåkänning och antal varv eller böjningar till brott i ett diagram, erhålles en kurva, som ansmyger till en asymptot (fig. 3). Ligger böjpåkänningen under asymptoten (utmattningsgränsen), uthärdar staven påkänningarna ett obegränsat antal gånger utan brott. Belastning strax över asymptoten leder däremot till brott efter ett begränsat

antal påkänningar. Vanligen nöjer man sig vid provning med att fastställa den högsta belastning staven kan uthärda 10 millioner gånger utan brott. Men i vissa fall har man i Amerika drivit provningen av material till flygmaskinspropellrar ända till 1500 mill. varv, vilket dock endast motsvarar ca 1 års flygtid. För vanligt stål ligger utmattningsgränsen vid ca 40 % av brottgränsen vid lugn belastning. Utformningen av hålkälar o.d. samt ytbeskaffenheten spelar stor roll för hållfastheten mot utmattning.

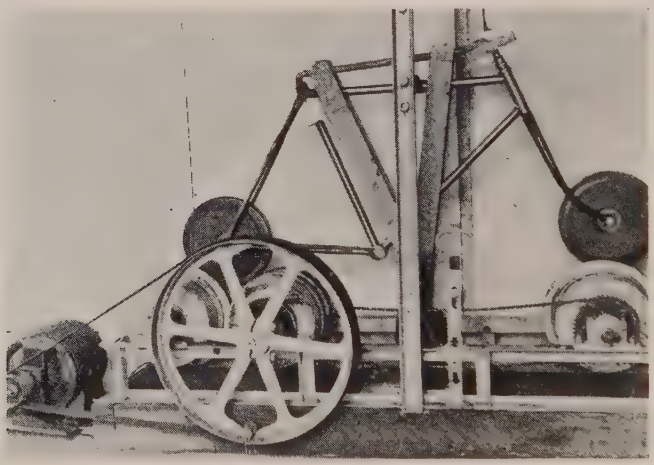


Fig. 4. Anordning för jämförande utmattningsprov på cykelramar.

Hos stål nedsätter vatten eller saltvatten i hög grad hållfastheten mot utmattning. Detta är fallet även hos rostfria stål, ehuru icke i lika hög grad som hos vanligt stål.

Fig. 4 visar en anordning för jämförande prov på cykelramar. Ramen utsättes för ett stort antal upprepade påkänningar av liknande slag som vid praktisk användning. Inverkan av lödning och olika slag av svetsning samt effekten av olika utformade förstärkningar vid skarvarna mellan rören kan härigenom utrönas.

Under nuvarande kristid har en liknande provmetod kommit till användning för provning av material till skosulor. Vissa material, som framkommit, uthärda icke ett större antal upprepade böjningar och ha utgallrats genom sådan provning. I detta fall har låg temperatur visat sig ha ogynnsam inverkan.

Bristen på bambu har aktualiserat frågan om användande av lämpligt utformade stålrör till stavar för stavhopp. Fig. 5 visar ett knäckprov (utböjningsprov) på en sådan stålstav. Med ten-

someter uppmätes töjningen hos den mest sträckta generatrisen på tre olika ställen, och därur kan materialspänningen beräknas. Det är möjligt att göra dessa stavar ungefär lika lätta som bambustavarna.

Man har utfört utredningar och undersökningar av delvis mycket omfattande natur för att utröna orsaken till sprickbildningar i ångpannor samt i sulfat- och sulfitkokare. Därvid ha utförts såväl hållfasthetsprov som mikroskopiska undersökningar samt etsnings- och magnetiska undersökningar. Anstalten har även haft i uppdrag att utröna orsaken till sprickbildning i vissa slags gasbehållare för komprimerad lysgas. Flera sådana behållare hade sprängts sönder under transport. Undersökningen visade, att behållarens inneryta var genomdragen med ett nät av sprickor, varav en del nästan trängt igenom godset. I ytan på innersidan kunde man konstatera närvaro av cyanföreningar. Orsaken till sprickbildningen synes vara samverkan av korrosion genom cyanföreningar i lysgasen och rådande höga spänningar i materialet (ett specialstål med hög sträckgräns). Yrkesinspektionen har med anledning av det inträffade påfordrat omprovning av alla under drift varande gasbehållare av s. k. lätt typ. Ca 24 000 gasbehållare vattentryckprovades av anstalten under vartdera av åren 1941 och 1942, och av dessa uttogs viss procent för sönderskärning och materialundersökning.

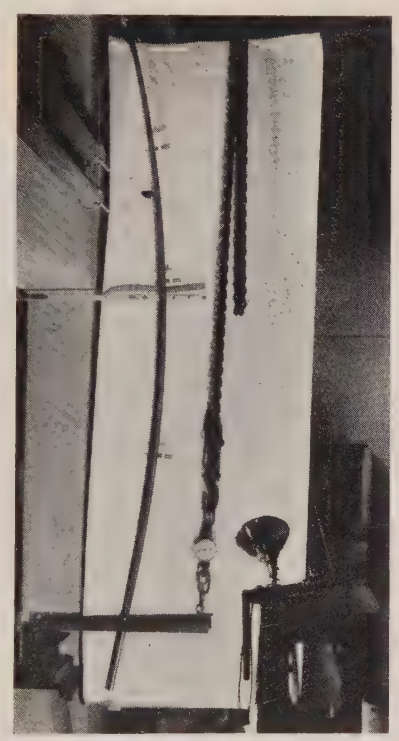


Fig. 5. Knäckningsprov på hoppstav av stålrör.

Det största antalet uppdrag inom den *byggnadstekniska avdelningen* har avsett hållfasthetsprov på betong, företrädesvis tryckhallfastheten hos insända betongkuber. Vidare provar man betongens vattentäthet (på ihåliga betongkroppar) och dess förmåga att uthärda ensidigt vattentryck, som ju är särskilt betydelsefull

för vissa betongkonstruktioner. Avdelningens undersökningar över olika cementsorter (A- och E-cement) rörande den därav framställda betongens tryck- och böjhållfasthet, vattentäthet och motståndsförmåga mot nötning, dess egenskaper i fråga om krympning, frostbeständighet och rostskyddsförmåga ligga till grund för de år 1942 fastställda bestämmelserna för betong av E-cement. Avdelningen har utfört laboratorieprovningar av hållfasthetsegenskaperna hos ett 50-tal svenska graniter i syfte att bedöma deras lämplighet för vägbeläggning. Mera kristidsbetonat är ett av myndigheterna givet uppdrag att utföra metodundersökningar och hållfasthetprovningar för bedömning av graniters och andra bergarters egenskaper som täckmaterial till skyddsrum.

En viktig uppgift, som avdelningen har, är att undersöka och godkänna olika typer av eldsläckningsapparater enligt överenskommelse med Svenska brandtarifföreningen (organ för försäkringsbolagen) och utöva kontinuerlig kontroll över tillverkningen. I avdelningens brandlaboratorium undersöker man motståndskraften hos bjälklag, väggar, kassaskåpsdörrar och branddörrar.

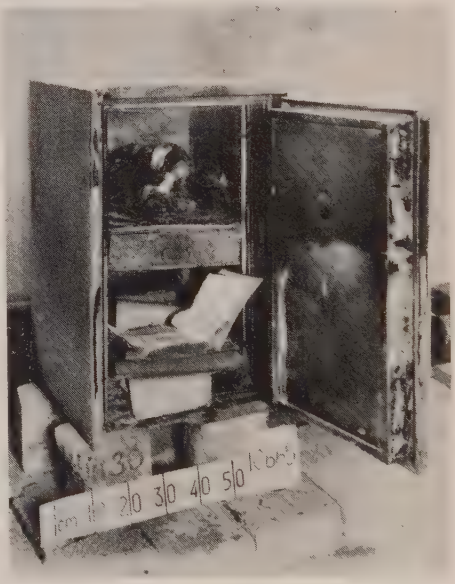


Fig. 6. Kassaskåp efter brandprov (1 tim.) + avsvalningsprov + brandprov (1 tim.) + fallprov + brandprov.

Den *elektriskt-fysikaliska avdelningens* uppdrag ha under de sista åren till stor del varit kristidsbetonade. Bränslebristen har medfört behov av bättre värmeisolation, och värmeisolationsförmågan har därför undersökt hos ett stort antal värmeisolationsmaterial (plattor av olika slag o. d.). Värmeisolationsförmågan anges med det s. k. spec. värmeledningstalet, vilket är den värmemängd i kcal, som per timme passerar igenom 1 m² av en 1 m tjock platta av materialet vid en temperaturskillnad mellan plattans sidoytor av 1° C. Man har vid provningsanstalten konstruerat

apparater för mätning av värmeledningstalet och förbättrat dem, så att bestämningarna nu kunna utföras vid temperaturer från —20° (för t. ex. byggnadskonstruktioner) upp till 1 000° (för isolationsmaterial för ugnar). På uppdrag av Statens utrymningskommission har avdelningen utfört jämförande undersökningar av värmeisolationsförmågan hos olika typer av papperstäcken. Ett annat kristidsuppdrag, som utförts i betydande omfattning, är kontroll av luftreningsaggregat för skyddsrum (år 1942 seriekontrollerades ca 7 000 aggregat). Därjämte har provningsanstalten anlitats för funktionsprov på gasrenings- och ventilationsanordningar i större militära och civila skyddsrumsanläggningar. Avdelningen har även utfört kriminaltekniska uppdrag på begäran av Statens kriminaltekniska anstalt, såsom undersökning av elektriska apparater och bruksföremål, vilka tillvaratagits efter eldsvådor.

Den *bergskemiska avdelningens* provningsuppdrag omfatta framför allt analyser av järn, stål och andra metaller (förut även guld och silver från Boliden), ferrolegeringar, bergarter och mineral av skilda slag. De använda analysmetoderna ha i mån av tid reviderats, och nya analysmetoder ha utprovats. Bland utförda forskningsarbeten må särskilt nämnas laboratorieförsök över rostningsförloppet av järnplåt, som växelvis utsättes för beröring med vatten och bensin, och i samband därmed bestämning av löst och »rostande» syre i bensin. Undersökningarna, som påbörjades år 1939, ha givit det märkliga resultatet, att när bensin lagras över vatten i en järnbehållare, verkar bensinen som ett syremagasin, som avger syre till vattnet och därmed ökar rostangreppet på järnplåten.

Den *kemiskt-tekniska avdelningen* har förutom sina vanliga uppgifter haft att lösa en mångfald kristidsproblem. Ett viktigt dylikt har varit att utröna, huruvida lagring av bensin medför kvalitetsförsämring. Ett stort antal i fortlöpande följd uttagna prov ur reservförråd av flytande bränslen ha undersökts. Genom inverkan av syre och ljus kunna i bensinen förefintliga olefiner delvis förhartsas. Koppar och kopparsalter verka som oxidanter. Genom tillsats av vissa stabilisatorer eller »negativa» katalysatorer kan hartsbildningen förhindras eller åtminstone fördröjas. Sådana stabilisatorer äro bl. a. α-naftol, vissa aromatiska aminer och flervärda högre fenoler.

Olika slag av oljerenare och oljefilter för smörjoljor i bilar provas av avdelningen, innan de få uppföras på gengasbyråns lista över godkända typer.

En viktig fråga i samband med flytande bränslen är inverkan av bensol-sprit- och bensin-sprit-blandningar på järnfaten. Man

har funnit, att förtenning bättre än galvanisering skyddar järnkärlen mot rostangrepp, och att brännlacker av bakelit bilda en mycket resistent beläggning.

Ett provningsområde av alltmer växande omfattning är undersökning av färger, lacker och färgmaterial, särskilt rostskyddsfärger. På uppdrag av Ingenjörsvetenskapsakademiens korrosionsnämnd granskar provningsanstalten ca 900 bockade järnplåtar, uppsatta på 8 olika exponeringsplatser inom landet, som rostskyddsbehandlats på olika sätt. Dessa direkta friluftsförsök pågå sedan sommaren 1938. Inom provningsanstalten utför man jämförande korttidsprovningar enligt en särskild metod, varvid den med rostskyddsfärg målade plåten utsättes för omväxlande hög och låg temperatur samt för aggressiva gaser. Resultatet motsvarar i stort den praktiska erfarenheten, och man uppnår på en månad lika stor korrosionsverkan som vid friluftsförsöken på några år.

Avdelningen undersöker tekniska egenskaper hos asfalt, beck och vägbeläggningsmaterial, såsom konsistens, seghet och hårdhet. Den senare bestämmer man genom att mäta, hur långt en belastad nål tränger ned i materialet. Mjukningspunkten bestämmes medelst den s. k. »kula och ring»-metoden. En i en ring insmält mängd asfalt eller beck belastas med en kula av vissa dimensioner. Då materialet vid uppvärmning mjuknar, tränger kulan genom asfalten eller becket.

Bränsleprovningarna på fasta bränslen avse analys av askhalt, värmevärde, askans smältpunkt m. m. Man har undersökt oljeskifferprov för att utröna utbytet av gas, olja och koks. Sammansättningen av gengas och vattenkondensat från gengasdrivna bilar har bestämts i syfte att främja gengasdriftens utveckling.

Provningsanstalten kontrollerar såväl importerat som inom landet tillverkat läder, det senare enligt överenskommelse med Svenska garveriidkareföreningen. Man bestämmer vattenhalt, fetthalt och askhalt och mängden vattenlösliga ämnen. Halterna av mineralämnen och vattenlösliga ämnen få icke överstiga vissa gränsvärden (sulläder säljes efter vikt).

En av avdelningens ordinarie uppgifter är kontroll av normalpapper, normalbläck, färgband, stämpelfärger m. m., avsedda för offentliga handlingar, som skola förvaras för all framtid (Svensk författningssamling nr 55/1907).

Undersökningen av textilvaror avser fibermaterialets beskaffenhet och sammansättning, vikt, hållfasthetsegenskaper, trådtäthet, krympning, färgäkthet m. m. Undersökningarna avse såväl vått som lufttorrt tillstånd (enligt internationell överenskommelse skall provningen utföras vid en relativ luftfuktighet av 65 %). Man

undersöker inverkan av inblandade konstfibrer i yllevävnader och inverkan av upprepad tvättning på bomulls- och linnevävnader med avseende på vävnadernas vithet, ask- och fetthalt samt hållfasthet vid dragning och nötning. För bestämning av tjockleken hos fibrer väges en avmätt längd av fibern på en torsionsväg med en noggrannhet av 0,005 mg. Draghållfastheten bestämmes i en apparat, som tillåter avläsning på 0,01 g. Halten av t. ex. cellull i ylle kan bestämmas genom upplösning av ullfibrerna i 2 %-ig NaOH, cellullen i 70 %-ig svavelsyra. Identifiering och skattning av fibersammansättningen i papper sker mikroskopiskt efter färgning av fibrerna. I en särskild apparat mätes fiberlängden hos bomull (stapellängd). Den är nämligen bestämmande för priset. Draghållfastheten är för animaliska fibrer som regel större, för växtfiber (bomull och linne) mindre i vått än i torrt tillstånd. Cellull har i lufttorrt tillstand ungefär samma draghållfasthet som bomull men cellullens draghallfasthet sjunker med ända till 50 %, då fibern blir våt. Tillsats av konsthartser minskar nedgången i hållfasthet men kan inte helt förhindra den. Styrkan i vått tillstånd hos nylon (polypeptider) och Pe-Ce-fibern (polymerisationsprodukt av vinylklorid) beror på dessa fibrers ringa vattenabsorption.

Avdelningen utför vidare de mest skiftande undersökningar på textilmaterial, såsom orsaken till fläckar, skörhet o. d. med bl. a. mikroskopiska metoder, pH-bestämningar m. m. Även metallfolier, t. ex. aluminiumfolie, undersökas, bl. a. med avseende på genomsläpplighet för luft.

Provningsanstaltens lokaler ha sedan 1920 utökats genom till- och nybyggnader för bl. a. trä- och väglaboratorium samt brandlaboratorium. Vidare har en byggnad uppförts, i vilken lokaler tills vidare upplåtits åt Ingenjörsvetenskapsakademiens kolningslaboratorium och Tekniska röntgencentralen. Genom samarbete med detta senare företag har provningsanstalten fått tillgång till röntgengenomlysning för undersökning av svetsar, gjutgods m. m. Beslut har nu fattats om tillbyggnad av denna byggnad i syfte att bereda bättre utrymme åt provningsantaltens betonglaboratorium, och arbetet härmed har just igångsatts.

Till provningsanstaltens avdelningschefer och framför allt till överdirektör Forsman, som välvilligt lämnat uppgifter till denna uppsats och granskat manuskriptet, vill förf. framföra ett varmt tack.

Tre lektioner om atomer och molekyler.

Av INGEMAR HJERPE

Förutsättning: Elevernas föreställning, att all materia består av atomer och är uppbyggd enligt regeln om de bestämda viktsproportionerna och det härpå grundade systemet av föreningsvikter.

Specialmaterial: Två till gasometrar apterade flaskor (se fig. 2), rymmande cirka 1 l, båda försedda med torkrör, den ena flaskan graderad.

Kapillärrör för reglering av gasströmningshastigheter, genomsläppande 1, 2 och 3 l pr timme vid 20 cm vattentryck (här nedan kallade gasbromsar).

En rörugn för glödgning av 10 cm av ett rör till omkring 1 000° C.

Lektion 1. Till en gasometer med syrgas och försedd med torkrör kopplas en gasbroms på 3 l pr tim. och ett invändigt omkring 7 mm vitt svårsmält glasrör, innehållande väl urglödgat träkol, kornstorlek ungefär 3 mm (»kolrör I»).

Syrgastillförseln öppnas och den främre änden av kolbeskickningen tändes genom upphettning av glasröret. Man iakttager, att kolkornen praktiskt taget fullständigt förtäras i syrgasströmmen och att den oxid, som kommer ut ur röret, ej kan antändas, vilket ju kan vara grund för en liten betraktelse över den kemiska innebörden av förbränning, brännbarhet och obrännbarhet.

Nu uppvärmes »kolrör II», ett med till- och avledningsrör försett och med 10 cm träkol beskickat porslinsrör ett par minuter i den ovan nämnda rörugnen, varefter de båda kolrören vägas samtidigt på var sin våg av två elever. Sedan uppvärmes kolrör II till 1 000°, kolet i kolrör I tändes i syrgasström, och oxiden ledes nu genom rör II.

Vilka grundämnen finnas i apparaten? Vilka grundämnen och vilken möjlig kemisk förening kan således komma ut ur rör II? Det ämne, som kommer ut ur rör II, är en brännbar gas (dröj ej med att tända den) och kan således varken vara kol eller syre, utan måste vara en koloxid. På grund av sin lägre syrehalt kan den tillsvidare kallas »lägre koloxid» i motsats till den första oxiden, den »högre koloxiden».

Efter omkring 20 minuter stänges syrgasströmmen, ugnen släckes,

och kolrör II uttages för avsvalning. Sedan vägas de båda kolrören, och ur vägningsresultaten beräknar man förhållandet mellan oxidernas kolhalter och förhållandet mellan deras syrehalter.

Lektion 2. Diskussion med klassen av resultatet från lektion 1. Vi veta nu, att såväl syret som kolet bestå av små bitar eller kulor, som vi kalla atomer. Vi följa en syreatoms gång genom apparaten. Om en syreatom tecknas med en ring och en kolatom med en fyrkant, kan händelseförloppet åskådliggöras med följande schema (fig. 1).

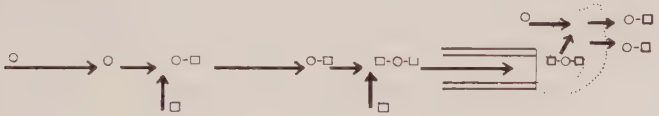


Fig. 1.

Den första pilen från vänster betyder, att o går in i kolrör I. Den andra pilen betyder, att den träffar en □. Den uppåtriktade pilen vid □ betyder alltså, att denna kolatom träffar syreatomen o. Den tredje vagräta pilen betyder, att det sålunda uppkomna paret fortsätter in i kolrör II o. s. v. Detta schema kan betecknas som en reaktionsformel. Vid bestämmandet av antalet nytillkommande kolatomer i atomschemat för rör II i jämförelse med antalet i rör I tillkommande utnyttjas ovan nämnda vägningsresultat. Att vi i den första oxidmolekylen ha 1 och i den andra 2 kolatomer är ju ett tydligt uttryck för vad vi funnit angående kolhaltens förändring.

Men oxidens förändring kan med samma rätt tillskrivas förändringen i dess syrehalt och beskrivas genom en ändring av antalet syreatomer. Hur stort måste i så fall detta antal ha varit från början? En av eleverna kan rita upp ett med det förra analogt reaktionsschema enligt denna nya tankegång. Vilket schema skola vi nu välja som uttryck för den kemiska reaktionen? Enligt den förra reaktionsformeln (fig. 1) skulle oxidernas molekylformler vara, för den högre CO och för den lägre C_2O. Vad bliva deras formler enligt den senare reaktionsformeln? Enligt den första reaktionsformeln ger 1 syreatom 1 högre oxidmolekyl och denna vid sin reduktion 1 lägre oxidmolekyl. Enligt den andra reaktionsformeln få vi 2 högre oxidmolekyler av 2 lägre. Allt detta är lika lättfattligt som att man av 5 envåningshus och en del virke genom påbyggnad kan få 5 tvåvåningshus. Om de större enheterna skola uppstå genom påbyggnad på mindre enheter och man har tillräckligt med påbyggnadsmaterial, är alltså antalet

bräder betydelselöst och endast antalet mindre enheter bestämmande för antalet uppkommande större enheter. Eller, översatt till molekyler: såvida det inte sker någon delning, är antalet molekyler av slutprodukten = antalet molekyler av utgångsmaterialet, förutsatt att endast ett kemiskt ämne räknas som utgångsmaterial ur synpunkt av antalet molekyler.

För att nu få en synpunkt på valet mellan dessa båda formelmöjligheter skola vi nu närmare studera den sista i försök 1 försiggående reaktionen, nämligen den lägre oxidens förbränning till högre oxid, d. v. s. lågan i apparatens utloppsrör. Vi skola då inte som förut taga syret ur luften utan sammanföra det med koloxiden i ett Y-rör.

Lektion 3. Apparaterna enligt fig. 2 och fig. 3 äro uppställda på bordet.

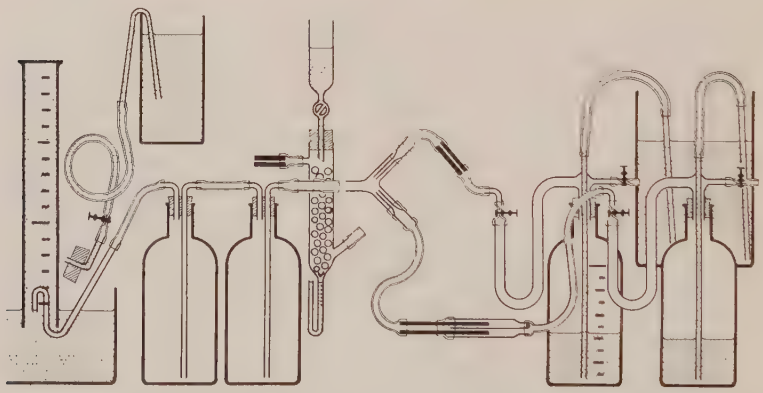


Fig. 2.

Den graderade gasometern i fig. 2 innehåller den lägre koloxiden och den graderade gasometern i fig. 3 innehåller syre.

Det gäller att studera oxidationen av lägre koloxid till högre, varvid den lägre koloxiden betraktas som »utgångsmaterial (se lektion 1), syret som påbyggnadsmaterial och den högre koloxiden som slutprodukt. Vidare skall denna reaktion jämföras med oxidationen av svavel med syrgas enligt fig. 3, där vi betrakta syret som utgångsmaterial, svavlet som påbyggnadsmaterial och oxiden som slutprodukt.

Skruvklämman på koloxidgasometerns torkrör öppnas, varvid oxiden, som passerar den icke reglerbara gasbromsen kan tändas och brinna ur mynningen av Y-rörets gemensamma utloppsrör.

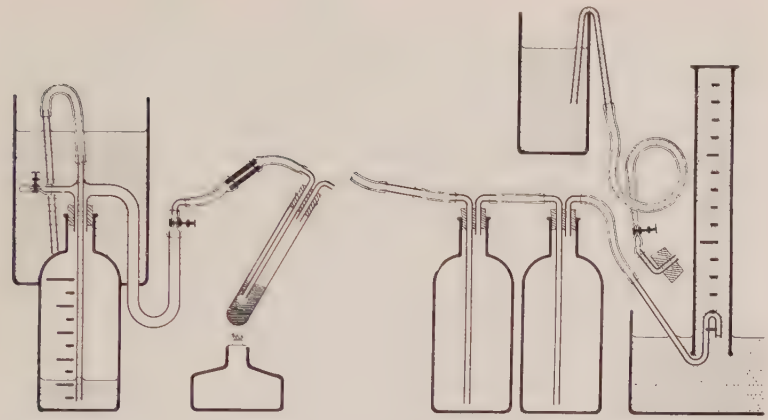


Fig. 3.

Öppnas nu också syretillförseln, slår lågan in i Y-rörets sammanlopp. Genom att variera inställningen av den reglerbara gasbromsen för syret kan man få lågan att brinna antingen ur koloxidgrenen eller ur syregrenen av Y-röret (se fig. 4).

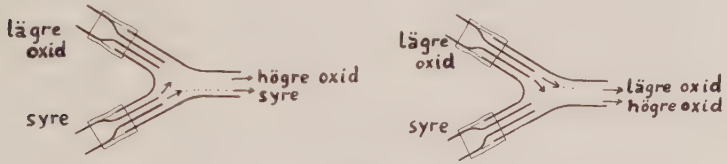


Fig. 4.

Den gasström, som slutar med en låga, blir tydligen fullständigt förenad med det andra ämnet. Man kan alltså på grund av lågans ställning i Y-röret avgöra, vilket av ämnena, som är i underskott och vilket som är i överskott. Ställes t. ex. den reglerbara gasbromsen på 1,40 och lågan därvid tydligt brinner ur syregrenen, samt därefter på 1,70, varvid lågan brinner ur koloxidgrenen, så ligger ekvivalensinställningen troligen vid ungefär 1,55 (vid såväl 1,50 som 1,60 synes den sväva mitt emellan mynningarna). Vid en inställning, motsvarande ekvivalens mellan gaserna, kommer det alltså endast högre koloxid ur Y-rörets utlopp.

Med lågan brinnande sammankopplas nu Y-rörets utlopp med den första av de båda med torr luft fyllda flaskorna (se fig. 2), och samtidigt därmed avläses koloxidgasometerns vattenstånd på skalan. Den vid förbränningen bildade högre koloxiden utdriver ur flaskorna

en lika stor luftvolym, som utan motstånd — på grund av avloppsrörets krökning — upptages i mätglaset. Hur stor bör den högre koloxidens volym vara, jämförd med den lägre oxidens, då man vet, att den högre oxiden innehåller en syremängd, som ej fanns med i den lägre? Efter en godtycklig tid stängas gasometrarna någorlunda samtidigt, avloppsröret i mätglaset ersättes med den bredvid (fig. 2) tecknade hävertanordningen, varigenom luften i mätglaset sättes under samma tryck som gaserna i gasometrarna (omkr. 1/50 atm.).

Vi övergå nu omedelbart till försöket enligt fig. 3. Gasometern innehåller syrgas, provröret svavel, som hålles i kokning med en ca 2,5 cm hög sprit- eller gaslåga. Glasröret *b* innehåller bomull för avgasernas filtrering. När mynningen av syreröret i provröret är omgiven av svavelgas, öppnas syretillförseln via 2 l-gasbromsen. Härvid inträder möjligen en liten explosion, eller också kommer lågan sakta krypande ur syreröret på grund av att svavel destillerat in i detta rör. På en gång sammankopplas nu provrörets avledningsrör med bomullsfiltret och avläses vattenståndet i gasometern, varefter försöket sköter sig självt. Till sist avläses volymerna av förbrukat syre och av samtidigt bildad svaveloxid, båda av samma tryck. Hur stor bör oxidens volym vara, jämförd med syrgasens, då man tar hänsyn till att svavel tillkommit?

Resultaten av volymbestämningarna vid dessa gasreaktioner visa sig vara andra än väntat. I båda fallen ha slutprodukterna samma volym som utgångsmaterialen (lägre koloxid, resp. syrgas). Man kan således i dessa fall införa nya ämnen utan volymsändring. Vad antyder detta om strukturen av de gasformiga utgångsmaterialen?

I lektion 2 hade vi funnit skäl förmoda, att antalet molekyler av slutprodukten är lika med antalet molekyler av utgångsmaterialet (åtminstone om det inte förekommer någon delning). I försök 2 och 3 ha vi nu funnit att dessa ämnens volymer äro lika. Mellan gasernas volymer och deras molekyltal synes således i dessa fall råda ett enkelt samband, som kan uttryckas i regeln: om i två olika gaser partikeltalen äro lika, äro också volymerna lika. Denna regel bekräftas av ett tillräckligt antal andra fall för att utgöra en allmän sats.

Vi kunna nu besvara frågan: vilken av de båda möjliga reaktionsformlerna för kolets förbränning till högre oxid, för dennas reduktion till lägre oxid och för dennas förbränning till högre oxid skall man välja såsom riktig, då ovannämnda regel tillämpas?

Försiktighetsmått. Innehållet i CO-gasometern bör prövas på luftfrihet, innan man tänder lågan i Y-röret. Likaså bör man noga tillse, att CO-gasometern och ledningar därifrån äro väl täta, så att inga förgiftningstillbud kunna inträffa.

Den slutliga sammankopplingen av apparaten i fig. 3 sker först efter det lågan tänts i svavelröret för att inte bomullsproppen i filterröret skall skjutas ned i luftflaskan vid svavlets tändning. Dessutom är det vid denna tändning viktigt, att *ingen* syrgas släppes in i provröret, innan svavlet kommit i kokning och svavellångan börjat omge mynningen av syrgasröret. Annars exploderar hela röret vid uppvärmningen av svavlet.

Det enklaste sättet att fylla en gasometer med CO är nog att leda gasen från kolrör II i lektion 1 in i en vattenfylld gasometer. Man låter först gasometerns torkrör stå öppet några sekunder, så att eventuellt förefintlig annan gas utvädras. Uppsamlingsgasometerns vattenrör skall från början genom en vattenfylld hävert stå i förbindelse med en bägare med en vattenyta belägen i jämnhöjd med, ej lägre än vattenytan i gasometern. Bägaren ställes på klossar, som under fyllandet successivt undanflyttas, så att vattenytan i bägaren hela tiden befinner sig 1 till 5 cm högre än vattenytan i gasometern. Skulle det nu finnas någon otäthet i apparaten, kan ingen luft läcka in och göra koloxiden explosiv; endast koloxid läcker ut.

Apparatdimensioner. Gasbromsen i syrgasledningen får ej ge mer än 1 l pr timme vid 20 cm vattentryck, och övertrycket i gasometrarna bör inte vara mer än 20 cm vatten, eftersom det är obekvämt att åstadkomma ett större övertryck vid avläsningen av luften i mätrören.

Y-röret bör ha 6 mm inre diameter och ett något utvidgat sammanlopp. Om den lilla kammaren, där lågan skall brinna är alltför trång, kan man ej av lågans ställning avgöra, om ekvivalens mellan gaserna föreligger.

Mynningen av det dubbelkrökta röret i mätröret bör inte ligga mer än 2 mm lägre än vattenytan i vannan för att inte slutprodukten och luften i flaskorna skall komprimeras, varigenom man gör en förlust i slutproduktsvolym.

Noggrannhet. Att av misstag inställa den reglerbara gasbromsen på överskott av kolmonoxid betyder ingenting för slutproduktsvolymen. Den del av den lägre oxiden, som oxideras, ger ju samma volym högre oxid, och den icke oxiderade delen har efter passagen genom lågan oförändrad volym.

Att däremot inställa på t. ex. 6 % för liten mängd kolmonoxid medför, att man fått ett överskott på 6 % av syremängden, som kommer med i slutprodukten. Men av slutprodukten utgör detta överskott endast 3 %.

Enligt det nu sagda bör man alltså inställa gasströmmarna så, att man erhåller 3 % mera koloxid än medelvärdet mellan icke-ekvivalensinställningarna. Lågan ligger då fortfarande mitt emellan syremynningen och koloxidmynningen i Y-röret.

Vill man uppnå större noggrannhet i ekvivalensinställningen, kan man använda den bakom intaget till första luftflaskan i fig. 2 tecknade apparaten. Den utgöres av ett Glovertorn med *konstant* kalilutdroppning och en gasströmningsmätare, kombinerad av utströmningskapillären och avflödesmanometern. Vid såväl syreöverskott som CO-överskott ökas gastrycket i tornet, tills det genom kapillären utströmmar lika mycket gas, som det tillkommer från Y-röret. Trycket och alltså även in- och utströmning av gasöverskott avläsas då på manometern (det graderade avflödesröret). Man gör på 5 minuter ett diagram med gasbromsinställningen som abskissa och manometerutslaget som ordinata. Minimets abskissa är gasbromsens ekvivalensinställning. Men denna ekvivalensmätare, som ju komplicerar försöket, är enligt det ovan anförda ej nödvändig i detta försök. Däremot är den nödvändig, om man med liknande apparatur vill utföra motsvarande försök med väte och klor, eftersom den lågan är mycket dåligt synlig i dagsljus.

Troligen komma somliga att reagera mot att jag endast betraktar den ena synteskomponenten som utgångsmaterial. Jag vill då dels hänvisa till lektion 2, de 7 sista raderna, dels tacksamt upptaga avvikande åsikter till diskussion i denna tidskrift.

Följande fördelar med dessa försök vill jag själv framhålla.

Särskilt ifråga om ämnena i det första försöket, de lägre och högre oxiderna av samma grundämne, synes det mycket naturligt, att antalet molekyler av slutprodukten blir lika med antalet molekyler av utgångsmaterialet.

Beträffande utförandet är det värt att påpeka, att man i dessa försök med successiv förbränning av en framströmmande gas faktiskt studerar volymsproportionerna. Man behöver ej som i de tidigare förekommande explosionsförsöken ha någon förutfattad mening härom.

Slutligen äro apparaterna i lektion 3 visserligen tekniskt komplicerade och detaljrika men lätta att minnas i sina huvuddrag genom att apparaternas uppställning överensstämmer med reaktionsformlerna (gasen från ledning a + gasen från ledning b → gasen, som går ut genom avloppsröret; → tecknet ligger i lågan, + tecknet är Y-röret).

Apparaturen tillverkas och försäljes av AB P. A. Norstedt & Söner, Skolmateriellavdelningen, Stockholm.

Ett växelströmsproblem.

Av GÖSTA W. FUNKE.

Exempel nr 8 i studentskrivningen i fysik nov. 1943 hade följande lydelse:

> När en induktionsspole anslutes till ett likströmsnät, blir effektförbrukningen i spolen 338 W, om spänningen mellan dess ändpunkter är 130 V. När spolen anslutes till en 50-periodig, rent sinusformad växelspännning, blir effektförbrukningen 130 W, om effektiva spänningen mellan spolens ändpunkter är 130 V. Beräkna för sistnämnda fall spänningen mellan spolens ändpunkter i ett ögonblick, då strömstyrkan är noll.

I Elementa *26*, s. 252, 1944 anges svaret till 144 V.

Uppgiften ger anledning till följande reflexioner och försök.

Likströmsdelen i uppgiften ger oss ohmska motståndet till 50 ohm. Vill man nu beräkna effektiva strömstyrkan hos växelströmmen, så uppkommer en svårighet. Det står ingenting i uppgiften, huruvida spolen var försedd med järnkärna eller ej. För en spole med järnkärna gäller emellertid

$$P = R \cdot I^2 + P_{Fe},$$

där P_{Fe} är järnförlusterna. Vid räkningarna måste eleverna antingen göra det antagandet, att spolen ej innehåller järn eller att järnförlusterna kunna försummas. I förra fallet har man ju gjort en specialisering, som uppgiftens text ej ger anledning till, i senare fallet inför man en approximation, som för de flesta spolar icke är rimlig, ty i allmänhet torde järnförlusterna i en spole vara av en storleksordning, som är fullt jämförbar med kopparförlusternas.

Ett par experiment kunna tjäna till belysning av problemet. Jag har för detta ändamål sammanställt en krets bestående av en Lemoines elektromagnet med pålagt ok och ett skjutmotstånd. Skjutmotståndet inställes så, att det sammanlagda ohmska motståndet är 50,0 ohm. Spänningen inregleras med en skjuttransformator till 130 V, effekten mätes med en wattmeter. Även strömstyrkan mätes. Följande resultat erhållas: Ohmskt motstånd 50 ohm, spänning 130 V, effekt 56 W (i st. f. uppgiftens 130 W), strömstyrka

0,60 A. Om vi räkna på det sätt, som studentuppgiften ovan måste räknas, erhålles:

$$50\ I^2 = 56;\ \because\ I = 1{,}06$$
$$56 = 130 \cdot 1{,}06 \cdot \cos\varphi;\ \because\ \varphi = 66°$$
$$V = 130 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}914 = 168.$$

Mätningen av strömstyrkan gav ju emellertid inte 1,06 A utan 0,60 A. Detta ger $\varphi = 44°$ och V = 128 V. Om man bortser från järnförlusterna, får man som svar på uppgiften 168 V, under det att det rätta svaret är 128 V.

Järnförlusterna äro $P_{Fe} = 56 - 50 \cdot 0{,}6^2 = 38$ W d. v. s. järnförlusterna äro i detta fall ca två tredjedelar av totala effekten.

Svagströmsteknikerna bruka ofta räkna med en formel $P = R\ I^2$ även för en spole med järn, men i så fall blir ju R icke detsamma som det likströmsmätta motståndet. För den i experimentet använda kretsen skulle t. ex. mot ett likströmsmotstånd på 50 ohm svara ett växelströmsmotstånd på 180 ohm.

Genom att ta bort en del järn ur kretsen ovan kan man lätt åstadkomma, att effekten blir 130 W som i uppgiften. Strömstyrkan kunde då i min koppling uppmätas till 1,45 A i st. f. 1,61, som uppgiften förutsätter. Det riktiga svaret med min spole blir då 133 V i st. f. 144 V, som erhålles, om järnförlusterna försummas. I detta fall blir $P_{Fe} = 130 - 50 \cdot 1{,}45^2 = 25$ W, d. v. s. järnförlusterna äro ca 20 % av totala effekten. Växelströmsmotståndet, räknat på det sätt, som ovan antogs, blir 62 ohm.

De siffror, som här angivits, gälla givetvis endast för den krets, jag använt. Med andra spolar kan man antingen få värden, som än mera avlägsna sig från uppgiftens eller värden, som bättre ansluta sig till uppgiftens. Försöken och resonemanget visa i varje fall, att uppgiften är pedagogiskt olämplig, eftersom den inger eleverna den tron, att i formeln $P = R\ I^2$ storheten R har samma värde för växelström som för likström i vilken induktionsspole som helst.

Det är i själva verket ett inte sällan förekommande fel i läroböckerna att författarna göra för grova approximationer, då det gäller behandling av elektrotekniska problem. Så t. ex. funno ing. R. Agrelius och jag vid vårt arbete för en uppsats i Elementa (juni 1942), att den magnetiska läckningen vid spalter i magnetiska kretsar är av en storleksordning, som fullständigt förrycker resultaten av en hel del av de i elementära elektroteknikläroböcker förefintliga problemen på magnetiska kretsar.

Bokanmälningar.

Leo Lysgaard, *Lufthav, Vejr og Klima*, Populær Meteorologi. Gyldendal, Köpenhamn 1943. 232 sid., 94 fig. Pris häft. ca 13: — kr.

Intresset för meteorologi måste alltjämt betecknas som litet, ehuru stadigt stigande. Däremot tycks det vara genomgående dåligt beställt med kunskaperna i detta ämne och vanföreställningarna äro alltför många. Här måste snart tas krafttag, om vi ej skola bli efter i jämförelse med andra folk. En vederhäftig och systematisk upplysningsverksamhet är nödvändig. Hit hör dels bättre undervisning i skolorna, dels för självstudier lämpliga läroböcker i populär form. För närvarande saknas moderna sådana på svenska språket, delvis beroende på att den svenska meteorologien på senare år fått sig förelagd andra uppgifter, som tyvärr måst gå före. I Danmark, som förr kanske ansågs som den mest konservativa av Nordens stater när det gäller meteorologi, har man insett nödvändigheten av att vara med sin tid. Därom vittnar föreliggande arbete, som till förf. har chefen för den danska väderlekstjänsten.

Enligt förordet har det varit författarens mening att skriva boken så, att den skall kunna läsas av alla, som äro intresserade av meteorologi, från menige man upp till den mera skolade. Detta har utan tvivel varit en svår uppgift, och det är säkert ej många som skulle gått i land därmed. Från exempelvis bondens, fiskarens eller sjömannens synpunkt kan man knappast säga att förf. lyckats, för dem torde innehållet vara alltför svårsmält. För dem däremot, som redan veta vad meteorologi är och som önska fördjupa sina kunskaper, torde boken vara synnerligen lämplig. Den innehåller en kolossal mängd fakta, och man märker redan i början, att förf. haft tillgång till de modernaste meteorologiska handböckerna och medtagit de senaste forskningsresultaten. Upprepningar förekomma ofta, men detta beror på att förf. lagt sig särskilt vinn om att skriva de enskilda avsnitten så, att de i möjligaste mån skola kunna läsas oberoende av varandra. På så sätt får boken karaktären av en kombinerad läro- och läsebok. Formler förekomma ytterst sparsamt, och de kunna med fördel avvaras. Stilen är lätt och ledig och oftast medryckande. Helhetsintrycket

kan ej bli annat än gott, även om en del smärre felaktigheter och oklarheter förekomma, men sådant går ju knappast att undvika.

Boken bör vara en värdefull tillgång för alla dem som äro måna om att söka väcka den studerande ungdomens intresse för det som dagligen och stundligen utspelas i lufthavet. Den bör också med fördel kunna sättas i händerna på försigkomna och intresserade elever; det danska språket klaras nog utan större svårigheter.

Den första delen av boken, 162 sid., ägnas åt den allmänna meteorologien och bjuder på många överraskningar. Lufthavets byggnad och sammansättning samt de enskilda beståndsdelarnas egenskaper genomgås i nu nämnd ordning. Därefter följer ett avsnitt om det samlade lufthavets egenskaper, dvs. luftens tryck, temperatur och strömningsförhållanden; vidare behandlas värmeomsättningen i atmosfären, hydrometeorerna och nederbördsbildningen samt slutligen elektriska, akustiska och optiska fenomen i atmosfären. Bokens andra del avhandlar vädret och klimatet, varvid huvudvikten helt naturligt lägges vid danska förhållanden. Vädrets huvudtyper genomgås och en hel del klimatologiska fakta lämnas. Tyvärr saknas modernt analyserade väderlekskartor med ett enda undantag (sid. 171). Detta måste betraktas som en alldeles onödig brist.

H. Henrikson.

Tage Larsen, P. Rønne-Nielsen, V. Thorsen, *Fysiske Øvelser*. Jul. Gjellerups Forlag, København 1943, 100 sid., häft.

Enligt förordet är boken avsedd att vara en handledning vid laborationsövningarna i fysik med en preparandkurs (Forberedelseskursus) vid Danmarks tekniska högskola. Ämnena för de behandlade 27 övningarna fördela sig tämligen jämnt över fysikens olika områden. De flesta av uppgifterna synas vara av ungefär samma omfattning och svårighetsgrad som de vid laborationerna i fysik vid våra gymnasier förekommande. Det framhålles även i förordet, att uppgifterna i stort sett äro desamma som vid fysiklaborationerna i »det matematiske Gymnasium». Här följa några av rubrikerna: elementära längdmätningar, pendeln, luftens specifika vikt, längd- och volymutvidgning, värmeekonomi, verkningsgrad för elmotor, elektrisk värmeekvivalent, glödlampors karakteristik, impedansmätningar, treelektrodröret, brännviddsbestämningar för linser och speglar, spektralanalys, radioaktivitet.

Schemat för övningarna synes vara mycket omsorgsfullt uppgjort. De olika uppgifterna äro ganska detaljerat beskrivna. Av särskilt intresse är bokens inledande avsnitt, som innehåller en sammanställning av de viktigaste orsakerna till osäkerheten i experimentellt bestämda storheter. Här ges bestämda anvisningar

hur ett genom mätningar erhållet siffermaterial skall behandlas och siffrorna i resultatet avkortas med hänsyn till ofullkomligheterna i apparatur och mätningar. De 15 första övningarna åtföljas av en diskussion av felkällorna ävensom en beräkning av osäkerhetens numeriska belopp.

Boken innehåller många värdefulla anvisningar och kan därför vara till god nytta för en fysiklärare. En och annan av uppgifterna torde lämpa sig för enskilt arbete.

Osvald Lundquist.

Sverre Bruun, *Den eksperimentelle fysikkundervisningen i realgymnaset.* Håndbok for lærere utarbeidd etter Bruun og Deviks lærebok og elevøvelsesamling for realgymnaset. Olaf Norlis forlag, Oslo 1943, 110 s.

Boken är avsedd som en handledning för lärare vid den experimentella fysikundervisningen på realgymnasiet. Som titeln anger bör den användas i samband med Bruuns och Deviks »Lærebok i fysikk for realgymnaset», utgiven på samma förlag. Detta samband är för övrigt så fast, att vissa delar av handledningen endast med svårighet kunna tillgodogöras utan nämnda lärobok.

Enligt författarens mening är det naturligt att börja fysikundervisningen med värmelära, huvudsakligen därför att detta område av fysiken kräver relativt små förkunskaper i matematik, samtidigt som det erbjuder ett stort antal demonstrations- och elevförsök, vilka äro instruktiva och lätta att ställa i ordning. Efter värmeläran behandlas mekanik, vågrörelselära, ljud, ljus och sist elektricitet. Bruuns och Deviks lärobok innehåller en kurs i fysik, som snarare över- än understiger den i motsvarande svenska läroböcker behandlade kursen. De i föreliggande lärarhandledning beskrivna experimenten kunna dock med några få undantag anses falla inom den nuvarande ramen för svensk gymnasieundervisning. Några av de mer intressanta försöksanordningarna skola här i korthet beskrivas.

Värmeläran inledes med en utförlig beskrivning av kroppars värmeutvidgning och i samband härmed en diskussion av metoder för temperaturbestämning. Försöken utföras med en enhetlig apparatur, som tillåter samtidig observation av olika kroppars utvidgning. Vid några försök, bl. a. över kroppars värmeledningsförmåga, användas kalorimetrar i form av massiva kopparblock med urborrning för termometer. För undvikande av värmeförluster äro apparaterna inbyggda i en låda med glasfönster. Vid studiet av smältnings- och stelningskurvor användas såväl tenn som naftalin. Kapitlet avslutas med en beskrivning av en modell i trä för

framställning av tillståndsdiagram i rymden med axlar för volym, tryck och temperatur.

Inom avdelningen för mekanik lägger man särskilt märke till en enkel metod för mätning av korta tider. Härvid använder man två fjädrande metallstift, vilka stå i kontakt med växelspänningen från nätet. Stiften ligga an mot ett större, fuktat polpapper (fenolftalein), vilket med lämplig hastighet förflyttas i sidled. Med hjälp av särskilda kontaktanordningar kopplas växelspänningen på under den tidrymd, som skall mätas. Genom att räkna antalet streck på papperet anser sig förf. kunna mäta tider med en noggrannhet av 1/200 sekund.

Vid undersökning av det fria fallet och rörelser utmed lutande plan användes en och samma apparat. Rörelsen utlöses på elektrisk väg, och tiden mätes enl. ovan angivna metod. Det är troligt att apparaturen i verkligheten är något mindre invecklad än i de skisser, som visas i boken. Vi röra oss här inom ett ur experimentell synpunkt besvärligt område, och en närmare prövning av de i handledningen beskrivna metoderna kan därför vara av intresse. I kapitlet mekanik beskrivas bl. a. även en kastapparat samt en anordning för studiet av rotation.

För studiet av vågrörelser på vatten användes ett större tråg med starkt snedställda kanter. Trågets botten är av glas och kan belysas underifrån. Vid de optiska försöken användes i stor utsträckning en optisk bänk enligt Pohl.

Elektricitetsläran inledes med några försök över elektrolys och en härledning av Faradays elektrolytiska lag. Därpå följa några försök över magnetfältet, där man begagnar sig av stabilt monterade strömslingor av olika typer. Den elektrostatiska kraftlinjebilden undersökes med hjälp av omkr. 5 mm långa hårstrån, utströdda på en glasskiva. Håret bör vara konstfärgat och mörkt, och man erhåller rådet att skaffa sådant hår från en damfrisering! Beskrivningen av en enkel strömvåg läses med särskilt intresse med hänsyn till den roll strömvågen spelar för fastläggandet av de s. k. internationella enheterna. Bokens motor- och generatormodell förefaller ändamålsenlig. Den uppvisar vissa likheter med den maskinmodell, som Bragg beskriver i sin populära bok »Electricity». Växelströmmens egenskaper undersökes dels med polpapper och dels med en strängoscillograf av speciell typ. Mitt på de båda vibrerande strängarna äro två små lätta kulor fästade, vilka avbildas på en skärm via en roterande spegel. Elektricitetsläran avslutas med några instruktiva modeller i vertikalt montage av grundläggande detaljer inom radiotekniken: likriktare, förstärkare, svängningsgenerator, sändare och mottagare.

Handledningen avslutas med anvisningar för inredning av fysikaliska lärosalar och laboratorier samt en fullständig förteckning över de instrument, som anses behövliga för modern fysikundervisning på realgymnasiet.

Helhetsintrycket av boken är mycket gott. Den vittnar om stor pedagogisk erfarenhet samt förmåga att tillverka enkla och instruktiva apparater för demonstration och elevförsök. Man finner sålunda i boken icke någon sådan där tillkrånglad apparat, vilken efter kort tid måste överges t. o. m. av sin upphovsman. Boken kan således rekommenderas till den, som är intresserad av aktuella nykonstruktioner för den moderna fysikundervisningen.

B. Grundström.

Tore Porsander, *Elektriska ackumulatorer.* Andra upplagan, Stockholm 1942, 63 s., kr. 2: 25.

— *Omlindning och beräkning av småmotorer.* Stockholm 1942, 64 s., kr. 2: 80.

— *Vind-elverket i teori och praktik.* Stockholm 1943, 48 s., kr. 2: 75. (Tekniska Förlags AB:s handböcker nr 2, 4 och 5.)

I förordet till den första av de nämnda tre böckerna framhåller författaren, att intresset för *elektriska ackumulatorer* blivit allt större under senare år. Bland nyare användningsområden nämnas elektriska fordon av olika slag och vind-elverk, vilka tillämpningar författaren ämnar behandla i de följande häftena. Emellertid anser han det lämpligt att först ge en lättfattlig framställning av ackumulatorns teori och egenskaper samt att lämna anvisningar för dennas skötsel.

Efter en kortfattad översikt av de kemiska förloppen i ackumulatorn går författaren in på konstruktionen, spec. av bilackumulatorn, och redogör därefter för spänningsförhållandena vid laddning och urladdning. Bokens senare del ägnas helt åt laddningen och inledes med några sidor »magnetism» som förberedelse till en relativt utförlig redogörelse för likströmsgeneratorn. Därefter behandlas de båda laddningssystem — »konstant ström» och »konstant spänning» — som kommit till användning, spec. i bilar. Boken avslutas med några sidor om laddning från likströmsnät och från växelströmsnät över likriktare. Här hade man kanske väntat sig, att författaren skulle uppehålla sig något längre vid de laddningsaggregat, som numera tillverkas inom landet i ganska stor omfattning.

Den som blivit ägare till t. ex. en gammal bilgenerator och vill använda den som motor i en elcykel eller som generator i ett vind-elverk, måste i regel först linda om den. Till hans hjälp kommer då handbok nr 4, *»Omlindning och beräkning av småmotorer».*

Efter att ha redogjort för Ohms och Joules lagar och belyst dem med numeriska exempel ger sig författaren in på »magnetiska kretsen». Liksom så många elektrotekniker nu för tiden tvekar han vid val av enheter mellan cgs- och Giorgi-systemet. Han föredrar det förra, dock med den »tekniska» enheten Av/cm för fältstyrkan. Följer så det sedvanliga resonemanget om »Ohms lag för magnetiska kretsen» etc., vilket utmynnar i formel (19) för totala ampèrevarvtalet. Man torde kunna fråga sig, om detta framställningssätt har något att ge bokens läsare. Det hade säkerligen varit lämpligare att först visa, hur Av-talet för en enkel krets beräknas med hjälp av magnetiseringskurvan för järnet och därefter göra påståendet, att totala Av-talet för en sammansatt krets är lika med summan av de skilda delarnas Av-tal. Det följande kapitlet behandlar likströmsmaskinens konstruktion och verkningssätt och avslutas med formler för beräkning av inducerad spänning, vridmoment mm. Till de på sid. 27 angivna värdena på tätheterna i olika delar av magnetiska kretsen bör anmärkas, att så höga värden sällan eller aldrig förekomma i småmaskiner.

Innan man tar itu med omlindningen av sin maskin, bör man om möjligt göra några enkla mätningar på denna. Anvisningar härför lämnas i det följande kapitlet. (Här frågar sig nog en och annan läsare, varför magnetiseringskurvan ej tages upp »i tomgång».) I fortsättningen genomgås beräkningen av magnet- och rotorlindning. Den som beräknar antalet ledare per spår efter formel (33), kommer säkert att få besvär med att få ned samtliga ledare. (Formeln torde stämma något bättre med verkligheten, om man byter ut a_y i nämnaren mot d_y^2.) Samma anmärkning gäller formel (29).

Boken avslutas med exempel på beräkning av såväl en shuntgenerator som en seriemotor. Som författaren påpekar är beräkningen i vissa delar (som i fråga om tändernas Av-tal) något förenklad, men detta torde här få anses tillåtet. Med anledning av en passus nederst på sid. 61 vill anmälaren erinra om att för poltalet 2 äro serielindningen och parallellindningen identiska.

Den som vill gå ännu ett steg och bygga ett helt vind-elverk, bör studera handbok nr 5, *»Vind-elverket i teori och praktik»*.

På en kort inledning om vindkraften följer en redogörelse för konstruktionen och verkningssättet hos själva »vindverket», varvid särskilt hastighetsregleringen uppmärksammas. De följande kapitlen ägnas åt generatorn, batteriet och olika laddningssystem och synas delvis utgöras av utdrag ur de båda ovannämnda häftena. Mot påståendet på sid. 20, att praktiskt taget alla generatorer äro »shuntlindade», vill anmälaren invända, att enligt tidskriftsupp-

satser ha »motkompounderade» generatorer kommit till stor användning vid större verk. Efter att ha lämnat några anvisningar om den elektriska installationens utförande ger författaren slutligen två olika byggnadsförslag med utförliga instruktioner för omlindning av en bilgenerator och för själva vindverkets utförande.

Böckerna illustreras av ett relativt stort antal bilder. Vissa av dessa (t. ex. de på vindverkets detaljer) kunde ha varit något tydligare.

Av det sagda framgår, att författaren främst vänder sig till »praktiskt folk». Även om just en och annan praktisk detalj särskilt i handbok 4 kunde ha varit bättre, torde de små böckerna komma sina läsare till god hjälp.

G. Ödberg.

The School Science Review, Vol. XXV, 1943—44, No. 95—96. John Murray, London, per häfte 3 s. 6 d.

Tidskriften utgives av The Science Masters' Association och The Association af Women Science Teachers. Den är alltså organ för lärarna i fysik, kemi och biologi. Innevarande årg. är den 25:e; årligen utkomma fyra häften. De två senaste häftena, nov. 1943 och febr. 1944, vilka red. haft nöjet mottaga genom The British Council i Stockholm, omfatta vardera 136 textsidor jämte 26 annonssidor. Den senare avdelningen är inte den minst värdefulla; flertalet engelska instrumentfirmor och bokförläggare presentera här i utförliga annonser sina nyheter.

Anmälaren har tidigare under många år — tills kriget gjorde ett avbrott i den regelbundna postgången — följt tidskriften och haft mycket stor nytta av den. Särskilt ha ett par avdelningar varit mycket givande: värdefulla översikter över olika områden inom fysik och kemi, med vilkas hjälp man kunnat följa utvecklingen, samt en synnerligen rikhaltig recensionsavdelning, där till synes allt av intresse på den engelska bokmarknaden refereras. Bland tidskriftens många metodiska uppslag, apparatbeskrivningar och praktiska råd angående demonstrationsförsök och laborationer finner man även i regel mycket av värde.

Till belysning av innehållet må några rubriker ur de senaste häftena anföras: A Presentation of Organic Chemistry, Electronics — Some Teaching Models, Internal Resistance of a Daniel Cell, Black and White — Some Notes on Vision without Special Reference to Colour, The Glass Electrode, Optical Aids in Education, Resonant Circuits, On Recording Oscillatory Phenomena, The Electron Microscope and its Use in Biological Research.

C. E. Blom.

Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel. Generalstabens litografiska anstalts förlag, Stockholm 1944, 144 s. kr. 2: 00.

I september 1943 anordnade Ingenjörsvetenskapsakademien och Fera i Ingenjörsvetenskapsakademiens nyuppförda försöksstation i Stockholm en utställning »Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel», som väckte så livligt intresse, att den iordningställda upplagan av katalogen snabbt slutsåldes, varför många intresserade icke kunde erhålla densamma. För att i någon mån reparera detta har nu en andra utökad upplaga utgivits. Att ge ut en utställningskatalog långt efter det utställningen avslutats kan ju synas jämförbart med att kasta in jästen efter brödet i ugnen, men ett närmare studium av den nya editionen visar, att ett sådant omdöme är förhastat.

I främsta rummet kan katalogen bli ett välkommet hjälpmedel för institutionsföreståndarna, då det gäller att finna den lämpligaste inköpskällan för instrument och apparater. Den utökade katalogen har nämligen försetts med ett värdefullt register, som hänvisar till text och annonser, och i texten redogör varje utställande firma för sina tillverkningar. Dessa redogörelser äro mycket olika avfattade. Ibland rör det sig endast om ett mera affärsmässigt angivande av apparatens viktigaste data, men ibland finnas pedagogiskt värdefulla framställningar och t. o. m. utförliga historiskt betonade små avhandlingar. Att nämna några firmanamn kan knappast bli rättvist. Alla våra svenska företag i instrument-, apparat- och undervisningsmaterialbranschen äro representerade jämte de stora utländska tillverkarna, varför katalogens urval av teknisk och vetenskaplig apparatur blivit synnerligen mångsidigt. Om sedan allt är tillgängligt för omedelbar leverans är väl en annan fråga.

G. Funke.

Bonniers Konversationslexikon, band VIII, Stockholm 1943, hfrb. kr. 24: —.

Detta åttonde band omfattar *Klöver — Luft* och upptager 1512 spalter jämte 12 färgplanscher och 3 kartor. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som här äro av intresse, må nämnas: *Kobolt, Koks, Kol, Kolloider, Kolorimeter, Kolväten, Kometer, Kondensator, Konsthartser* (innehållsrik, välskriven och koncentrerad), *Koordinatsystem, Kopernikus, Koppar, Korrosion, Kosmisk strålning, Kosmogoni* (även H. Alfvéns aktuella teori refererad), *Kristall* (innehållsrik), *Kromföreningar, Krut, Kvantmekanik, Kvantteori* (ordet är oskönt, liksom *kvanthypotesen*; skulle man ej kunna enas om typen: *kvantateori*?), *Kvicksilver, Kväve, Kärnfysik* (den kort-

fattade artikelns saklighet störes av ett uppenbart skrivfel: Chadwick tillskrives äran av att ha upptäckt *protonen* 1932, »en oladdad partikel . . .»; skall vara *neutronen*), *Köldforskning, Langmuir, von Laue, de Laval, E. O. Lawrence, Legering, Likriktare, Lim* (innehållsrik, koncentrerad), *Lins, Ljud, Ljus, Logaritm* (»... uppfunnos 1614 av J. Napier och ung. samtidigt av J. Bürgi. Båda använde en bas, som låg mycket nära 1.» Denna uppgift innebär en stark förenkling av fakta.), *Luft.*

De flesta artiklarna — icke blott de här noterade — äro förda fram till en hög grad av aktualitet, vilket bl. a. kan avläsas i notiser om bombardemang av *Köln* och *London* eller händelser i *Litauen.* Många artiklar äro små konststycken av koncentrerad saklighet.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Nils Gralén, *Sedimentation and Diffusion Measurements on Cellulose and Cellulose Derivatives.* Uppsala 1944, 115 s. Disp. vid Uppsala universitet den 15 april 1944. Opponenter: docent O. Lamm och fil. lic. I. Jullander.

Denna avhandling innehåller redogörelse för experimentella undersökningar av cellulosa av diverse olika ursprung, såsom bomull, lin, ramie, nässelfibrer, konstsilke och olika tekniska träcellulosor. Undersökningarna ha varit dels sedimentations-, dels diffusionsmätningar.

Sedimentationsmätningarna ha gjorts i ultracentrifug med centrifugalfält upp till 350 000 ggr tyngdkraften. De i lösning befintliga cellulosamolekylerna, vilka ha en mycket långsträckt form (trådmolekyler), sedimentera ej oberoende av varandra, utan hastigheten blir beroende av lösningens koncentration. Koncentrationsberoendet kan empiriskt uttryckas med formeln

$$s = \frac{s_0}{1 + kc},$$

där s och s_0 äro sedimentationskonstanterna vid koncentrationerna c resp. 0, medan k är en positiv konstant, som kan experimentellt bestämmas.

Cellulosan har upplösts i kopparoxidammoniak (Schweizers reagens). Då dessa lösningar äro känsliga för inverkan av luftens

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

syre, ha speciella anordningar utarbetats för manipulation med lösningarna i ren kvävgas. Utom ren cellulosa ha också undersökts två slag av cellulosaestrar, nämligen cellulosanitrat (nitrocellulosa) och cellulosaxantogenat (viskos) och en cellulosaeter, cellulosaglykolat. Nitratet löstes i aceton eller amylacetat, xantogenatet i alkalisk vattenlösning och glykolatet i utspädd saltlösning.

Även diffusionsprocessen visar sig vara starkt koncentrationsberoende för de trådformiga molekylerna. De experimentella diffusionskurvorna äro under ideala förhållanden Gauss'ska fördelningskurvor, men cellulosa och cellulosaderivat ge skeva diffusionskurvor. Genom teoretisk analys har koncentrationsberoendet kunnat beräknas ur skevhetens storlek och därigenom även diffusionskonstanten vid oändlig utspädning, D_0.

Genom kombination av sedimentations- och diffusionsmätningar kan molekylvikten bestämmas. Härvid gäller Svedbergs formel

$$M = \frac{RTs}{D(1 - V\varrho)},$$

där R är gaskonstanten, T absoluta temperaturen, V det lösta ämnets specifika volym och ϱ lösningens täthet. Denna formel gäller vid oändlig utspädning. De erhållna molekylvikterna äro högst för de nativa fibercellulosorna, 1,5—2 millioner. Den allra högsta molvikten erhölls för lin-cellulosa med nära 6 millioner. De kemiskt isolerade träcellulosorna ha lägre molvikt, 340 000—680 000. Försök gjordes även att direkt extrahera cellulosan med kopparoxidammoniak ur trä. Resultaten visa, att medelmolvikten för cellulosa i trä måste vara minst 800 000.

Nitrering av cellulosa med en blandning av salpetersyra och fosforsyra under speciella försöksbetingelser medför en viss nedbrytning av cellulosamolekylen, ehuru ringa. Omkring 0,3 promille av de i cellulosan befintliga glukosidbindningarna sprängas.

Cellulosaxantogenat och cellulosaglykolat ha lägre molvikter, omkring 50 000. Detta sammanhänger med att vid deras framställning cellulosan måste genomgå en behandling med stark alkali, som verkar nedbrytande.

Alla molekyler av cellulosa och dess derivat äro långsträckta, och det har visats, att nitraten ha en mera utsträckt molekylform än de motsvarande cellulosorna.

Alla cellulosapreparat äro polydispersa, d. v. s. bestå av molekyler av olika storlek. Olika stora molekyler »falla» med olika hastighet i ett kraftfält. Detta gör, att gränsytan vid sedimentationsmätningarna ej blir skarp utan diffus. En speciell metod har utarbetats för att ur gränsytans »breddning» bestämma graden av polydispersitet. Även ur diffusionsmätningar kan polydispersiteten

bestämmas. Under vissa antaganden beträffande molviktsfördelningen (s. k. logaritmisk fördelning) kunna de olika måtten på polydispersitet jämföras, och i vissa fall har god överensstämmelse erhållits. Det visar sig, att en cellulosa med hög molekylvikt i regel har lägre polydispersitet än en lågmolekylär cellulosa. Träcellulosor äro mera polydispersa än fibercellulosor, och den alkaliska nedbrytningen av cellulosan i viskosprocessen ökar polydispersiteten.

HARALD OLERUP, *Järnkloridernas komplexitet i 2-molar överklorsyra.* En spektrofotometrisk och elektrometrisk undersökning. Lund 1944, 91 s. Disp. i Lund $^{15}/_{4}$ 1944. Opponenter: docent I. LEDEN och fil. mag. S. FRONEUS.

Arbetet utgör ett led i de komplexkemiska arbetena vid Lunds universitets kemiska institution. Dess främsta syfte är att utreda möjligheterna för en beräkning av jämviktskonstanter för sammansatta system ur ljusabsorptionsmätningar. Det visar sig, att de vanligtvis använda beräkningssätten ge vilseledande resultat. Ett beräkningssätt föreslås, som ger riktiga värden, förutsatt att endast enkärniga komplex bildas. Metoden tillämpas på $FeCl_3$, vars lösningar enligt mätningarna innehålla komplexen $FeCl^{2+}$, $FeCl_2^{+}$ och $FeCl_3$ upptill $[Cl^-] = 0{,}5$ mol/l. Med $FeCl_3$ som indikator kan komplexiteten bestämmas för andra klorider men inte för andra Fe^{3+}-salt. Principen tillämpas på $FeCl_2$.

De elektrometriska mätningarna ske med redoxpotentialen i Fe^{3+}-Fe^{2+}-saltlösningar. Genom speciellt val av koncentrationerna kunna konstanterna för båda kloriderna beräknas. Värdena överensstämma med de fotometriskt bestämda.

Ljusabsorptionsmätningarnas metodik genomgås, isynnerhet förutsättningarna för noggranna fotoelektriska mätningar.

Föredrag under våren 1944 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. RIESZ, sekr. fil. mag. B. HOLMBERG.

Föredrag: fru KÄTHE FENCHEL, Över komplexa och hyperkomplexa tal ($^{3}/_{3}$); prof. HARALD BOHR, Babylonisk matematik ($^{15}/_{3}$); fil. kand. THORILD DAHLGREN j:r, Några satser ur mängdteorien ($^{11}/_{5}$).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. fil. mag. Stig Sunner.

Föredrag: prof. L. Smith, Några organiska synteser (25/2); Diskussion: Kompetenskraven för kemilektorat vid de tekniska läroverken med inledningsanförande av fil. lic. T. Bergqvist (25/2); fil. dr K.-J. Karrman, Några nyare utvecklingslinjer inom organisk-kemisk industri (28/3); docent B. Adell, Molekyl- och isotopseparation genom termodiffusion (28/4); lektor Hj. Mandal, Periodiska systemet (19/5).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Hilding.

Föreningen för matem.-naturv. undervisning se 27, s. 38.

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. Lindh, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Årsmöte (25/2) å Stockholms Högskola med föredrag av förste byråing. Å. Vrethem, Överspänningar och överspänningsskydd vid elektriska kraftanläggningar.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. fil. lic. N. Svartholm.

Föredrag: fil. lic. C. Walén, Bidrag till teorien för solfläckarnas periodicitet (14/2); Dr. Ing. L. von Hámos, Kristallstrukturbestämning med Fouriers serie (28/2); fil. kand. T. Johansson, Polerade ytors egenskaper (13/3); förste statsmeteorolog T. Bergeron, Om molnens fysik (14/4); byrådirektör J. W. Sandström, Golvströmmen och väderleken (24/4); fil. mag. J. Nyström, Mätning av Thomsoneffekten vid höga temperaturer (8/5).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén.

Föredrag: docent G. Ehrensvärd, Undersökningar angående äggvitehydrolys (9/3); civiling. C. O. Gabrielsson, Reaktionsvärmets roll vid katalytiska förlopp (4/4); Prof. G. v. Hevesy, Nybildning av skelettets mineraliska beståndsdelar (19/5); Docent B. Skarzyński, Några näringsproblem beträffande fosfat-kalciumomsättningen (19/5).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. docent S. Täcklund, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: fil. mag. A. Broman, Några kommentarer till urvalsaxiomet (26/1); docent S. Täcklind, Om några talföljder (30/3); fil. lic. B. Kjellberg, Affina transformationer (11/5).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent S. v. Friesen, v. ordf. docent P. Ohlin.

Föredrag: ing. S. Ledin, Synpunkter vid tillverkning av högvakuumrör för höga spänningar (23/2); fil. lic. F. E. Wickman, Radioaktiviteten och de geologiska åldersbestämningarna (28/3); Dr. S. Rozental, Atomkernekræfter og radioaktiv β-Sønderdeling (25/4).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. I. Jullander.

Föredrag: Prof. G. von Hevesy, Nogle Anvendelser af radioaktivt Fosfor (11/2); docent O. Lamm, Bidrag till diffusionsteorien (10/3); Demonstration av Uppsala ångkvarn under ledning av civiling. E. Karsvik (26/4); fil. mag. H. Tyrén, Fysikalisk-kemiska institutionens elektronmikroskop, med demonstration (2/6).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1331) *En triangels vinklar äro A, B och C. Vinklarna mellan dess medianer äro* α, β *och* γ. *Visa, att* $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot A + \cot B + \cot C$. *B-r.*

1332) *En strömbana har formen av en regelbunden* $(m+n)$*-hörning* $A_0A_1 \ldots A_{m+n-1}$ $(m \geqq 1;\ n \geqq 1)$ *med radierna till hörnen inlagda. Motståndet i varje sida är s ohm, i varje radie r ohm.* A_0 *och* A_m *(eller* A_n*) förbindas med var sin av en strömkällas poler. Bestäm kombinationsmotståndet. Hur varierar detta med m för givet* $m+n=N$? *X.*

1333) *Sök orten för inflexionspunkterna på de tredjegradskurvor av formen* $y(\alpha x^2+\beta x+\gamma) = Ax^2+Bx+C$, *vilka ha en maximipunkt i (1; 1) och en minimipunkt i (−1; −1).* *X.*

Not om uppg. 1290. Att sista meningen i lydelsen till denna uppg. (Elementa, *26*, s. 183, 1943) kan utgå påvisas i en till red. insänd intressant not av signaturen *N. J.*, dock delvis med icke elementära hjälpmedel.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1334) I en oändlig geometrisk serie, vars summa är $5\frac{1}{3}$, äro de tre första termerna rötter till ekv. $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$. Beräkna a.

Svar: $5\frac{1}{4}$ eller $3\frac{1}{12}$.

1335) En cirkel med radien 2 cm tangerar tre av sidorna i ett likbent parallelltrapets med höjden 4,8 cm. Den fjärde sidan som är en av de parallella sidorna, har längden 2 cm. Beräkna trapetsets yta.

Svar: 19,2 cm².

1336) I ett parallelltrapets äro de parallella sidorna a och b $(a > b)$, de andra sidorna c och d $(c > d)$ samt diagonalerna e och f $(e > f)$. Visa, att $(e^2 - f^2) : (c^2 - d^2) = (a+b) : (a-b)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1334 är insänd av *B. N.*, 1335, 1341—1345 av *X.*, 1336 av *S. B.*, 1337—1340 av *T. Edqvist.*

1337) En hoskörd skall köras in på kortast möjliga tid. Genom försök har man funnit, att tomkörningen från ladan till fältet tar 10 min., att tiden för själva pålastningen är direkt proportionell mot lassets vikt samt att tiden för nödvändig körning på fältet plus hemkorning utgör $10 + ax + 0{,}0005x^2$ minuter, där x är lassets vikt, uttryckt i kg, och a en konstant. Urlastningen tar endast 10 minuter, oberoende av lassets vikt tack vare lämpliga anordningar vid ladan. Alla lass antagas ha samma vikt. Hur stor bör denna vara?

Svar: $1001\sqrt{60} = 775$ kg.

1338) En rörlig punkt P på linjen $x = 1$ sammanbindes med origo O. Från P avsättes på PO sträckan $PQ = 1$ åt origo till. Angiv och konstruera orten för Q.

Svar: $y = \pm \dfrac{\sqrt{2x^3 - x^4}}{x - 1}$ (konkoid).

1339) Punkten P rör sig så, att längden av sträckan OP är $2 + 2\sin v$, där O är origo och v vinkeln mellan OP och pos. x-axeln. Bestäm orten för P och angiv kurvans max. och min. punkter.

Svar: En sluten kurva, symmetrisk m. avs. på y-axeln. $y_{\max} = 4$ och 0, båda för $x = 0$; $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$ för $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (kardioid).

1340) Angiv ekv. för den största cirkel, som tangerar en given ellips i en vertexpunkt, men eljest ligger helt inom ellipsen.

Svar: $\left(x - \dfrac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$.

1341) På kurvan $y = x^3 - 3x^2 - x + 4$ finnas två punkter med samma ordinata, i vilka kurvtangenterna äro parallella. Bestäm dessa punkters koordinater.

Svar: (3; 1) och (−1; 1).

1342) Punkten P rör sig på den i första axelvinkeln liggande delen av linjen $y = 1$. P förenas med $A(\sqrt{2}; 0)$, $O(0; 0)$ och $B(-\sqrt{2}; 0)$. Bestäm maximum av skillnaden $\angle OPA - \angle BPO$.

Svar: 45°.

1343) Mot en tangent och en normal i en punkt på en ellips fällas normalerna från medelpunkten. Vilka vinklar bildar tangenten med axlarna, då rektangelytan är störst?

Svar: 45°.

1344) Tangenten i en punkt på hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ skär konjugathyperbeln i A och B. Beräkna ytan av triangeln OAB, där O är origo.

Svar: $ab\sqrt{2}$.

1345) Parabeln $y^2 = 4ax$ och punkterna $A(b;\ 0)$, $B(-b;\ 0)$ äro givna. PQ är en mot x-axeln vinkelrät korda. Sök orten för skärningspunkten mellan PA och QB.

Svar: $y^2 = 4ax$.

Lösn. till uppg. 1302—1304.

1302) *I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Vid rätvinklig projiciering av figuren i ett rätvinkligt koordinatplan erhålles resp. A_1 (1; 0), B_1 (0; 5), C_1 (— 4; — 5) och H_1 (0; 0). Beräkna vinkeln mellan xy-planet och planet ABC.* X.

Planet ABC parallellförflyttas, så att H och H_1 sammanfalla. Då B_1C_1 delas mitt itu av x-axeln, måste ABC vara likbent med $AB = AC$. Sidan A_1C_1 delas i förhållandet 1 : 4 av y-axeln. Höjden från C delar då AB i K i samma förhållande. Sättes $AK = x\sqrt{3}$, blir $AB = AC = 5x\sqrt{3}$, $CK = 6x\sqrt{2}$ och enl. bissektrissatsen $CH = BH = 5x\sqrt{2}$, $HK = x\sqrt{2}$, $AH = x\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{5x^2 - 1}$, $BB_1 = \sqrt{50x^2 - 25}$. Ur en rätvinklig triangel fås $(\sqrt{50x^2 - 25} + \sqrt{5x^2 - 1})^2 + 26 = (5x\sqrt{3})^2$, som ger $x = 1$. $\triangle ABC = 15\sqrt{6}$ och $\triangle A_1B_1C_1 = 15$ ytenheter, varav $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ och $\alpha = 65°{,}9$.

S. B.

Löst av *B-r, S. L., B. Svenonius, F. Ehrnst.*

1303) *Kurvan $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ förutsättes ha två reella inflexionspunkter A och B. Den har då en reell dubbeltangent och en med denna parallell enkel tangent. Visa, att AB delar avståndet mellan dessa tangenter i förhållandet 4 : 5.* X.

Om man väljer dubbeltangenten (t) till X-axel och låter Y-axeln vara parallell med y-axeln men gå mitt emellan t:s kontaktpunkter P och Q, kan kurvans ekvation skrivas $Y = c(X^2 - a^2)^2$. Man har $Y' = 2cX(X^2 - a^2) = 0$ för $X = \pm a,\ 0$; $Y'' = 2c(3X^2 - a^2) = 0$ för $X^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Följaktligen är ekv. för dubbeltangenten $Y = 0$, för AB $Y = ca^4$ och för den med t parallella tangenten $Y = -\dfrac{4}{9} \cdot ca^4$, varav framgår, att AB är parallell med de båda tangenterna samt delar avståndet

mellan dem i förhållandet 4 : 5 från t räknat. Y-axeln delar AB mitt itu och $AB = \frac{PQ}{\sqrt{3}}$. *X.*

Även löst av *B-r, S. L., B. Svenonius, E. Smn, F. Ehrnst.*

1304) *Avståndet mellan ett föremål P och ett öga Q är konstant. Var mellan P och Q skall man placera en tunn positiv lins ($f \geqq PQ$) för att se bilden av P under så stor vinkel som möjligt? Det förutsättes, att ögats ackommodationsförmåga tillåter tydlig uppfattning av bilden vid alla ifrågakommande placeringar av linsen.* *X.*

Föremålet P med storleken p och bilden R med storleken r antagas ha avstånden x och y från linsen. Av $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ erhålles $y = \frac{fx}{f-x}$ och $r = \frac{pf}{f-x}$. Om $PQ = a$, blir $\operatorname{tg} v = \frac{r}{RQ} = \frac{pf}{af - ax + x^2}$, som har maximum för $x = \frac{a}{2}$. Linsen skall placeras mitt emellan P och Q.

Löst av *B-r, S. L., B. Svenonius, E. Smn.*

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1944: 1—2.

Ur innehållet: Å. WALLENQUIST, De mångdubbla stjärnornas problem; Y. ÖHMAN, Om Keplers nova 1604 och andra supernover; N. V. E. NORDENMARK, Mårten Strömer; B. HEDVALL, Amatörtillverkning av spegelteleskop; B. LINDBLAD, Nyare undersökningar angående solens konstitution; Y. ÖHMAN, Om okularet.

Svensk kemisk tidskrift, 1944: 2—4.

Ur innehållet: H. ERDTMAN, Die phenolischen Inhaltsstoffe des Kiefernkernholzes VI, VII; I. LEDEN, A potentiometric study of the complex compounds between cadmium and cyanide ions; O. LAMM, Diffusions- und Sedimentationsuntersuchungen über den Lösungszustand anorganischer Säuren; L. ENEBO, Om termofil cellulosajäsning III; K. MYRBÄCK und L. G. SILLÉN, Zweigmoleküle IV; S. SÄWERBORN, K. E. DANIELSSON and THE SVEDBERG, On the Globulins of the Cereals and Malt; L. G. SILLÉN and B. LILJEQVIST, On the Complex Formation between Zn^{2+} and Cl^-, Br^- and I^- Ions; E. OHLSSON und E. SANDELL, Utlösning av amylas ur vetemjöl; F. LINDSTRAND, Über Eisenperchlorate II; E. GRABE, Bensinförhartsning; H. ERDTMAN, U. V.-Absorption und sterischer Bau des Pinosylvins; L. G. SILLÉN und K. MYRBÄCK, Über die Dextrinierung von Amylose durch α-Amylase.

(Forts. s. 128.)

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars 1944.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. En cirkelsektor och en kvadrat ha lika stora omkretsar och lika stora ytor. Hur stor är cirkelsektorns medelpunktsvinkel?
2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} b(x+y-1) = a(2+x) - x^2 + y + 1, \\ x^2 = y + 1. \end{cases}$$

3. I en triangel bilda sidornas längder en geometrisk serie, och den minsta sidan är $\frac{1}{19}$ av omkretsen. Beräkna triangelns största vinkel.
4. Två vinklar i en triangel äro 30° och 54°,1. Triangelns yta är 99,47 cm². Beräkna radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln.
5. I en triangel är en vinkel 60° och de omfattande sidorna tillsammans 4 cm. Uttryck kvadraten på den tredje sidan som funktion av en av de övriga sidorna, och representera denna funktion grafiskt. Angiv särskilt det minsta och det största värde, som funktionen kan antaga.
6. Då hjulen på en järnvägsvagn passera över en skenskarv, uppstår ett stötljud, som tydligt kan iakttagas. Medan tåget går med jämn hastighet, räknar en resande n stötar under 54 sek, varvid tiden räknas från den första till den n:te. Varje skenas längd är 15 m. Beräkna tågets hastighet vid tillfället, uttryckt i km/tim.
7. En oändlig series första term är 1. Kvoten mellan en godtycklig term med jämnt ordningsnummer och närmast föregående term i serien är 2, och kvoten mellan en godtycklig term med udda ordningsnummer och närmast föregående term i serien är $\frac{1}{3}$. Bestäm den oändliga seriens summa.
8. AB är en korda i en cirkel och C en punkt på cirkelns periferi. Man fäller normalerna $AA_1 = a$ och $BB_1 = b$ mot cirkelns tangent i C. Beräkna längden av normalen CC_1 mot AB.

Resultat: **1.** $\frac{360}{\pi} = 114°,59$. **2.** $x_1 = \frac{a+b}{b}$ och $y_1 = \frac{a^2+2ab}{b^2}$; $x_2 = -2$ och $y_2 = 3$. **3.** 127°,17. **4.** 11,11 cm. **5.** Om x är en av de omfattande sidorna, är kvadraten på den tredje sidan $= 3x^2 - 12x + 16$, vars minsta och största värde är resp. 4 och 16.

6. $(n-1)$ km/tim. **7.** 9. **8.** Om tangenten i C skär AB:s förlängning i F, är $\overline{FC}^2 = FA \cdot FB$. Ur likformiga trianglar erhålles $\frac{a}{FA} = \frac{b}{FB} = \frac{CC_1}{FC}$, varav $\frac{\overline{CC_1}^2}{\overline{FC}^2} = \frac{ab}{FA \cdot FB}$, d. v. s. $CC_1 = \sqrt{ab}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Ekvationen $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ har rötterna $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Bestäm konstanterna a och b.
2. Bestäm ekvationen för den kortaste medianen i en triangel, vars sidor falla utefter linjerna $y = 4x + 11$, $2y = x + 1$ och $2x + 3y = 5$. Beräkna även medianens längd.
3. Två liksidiga trianglar, vardera med sidan a, täcka varandra fullständigt. Man vrider den ena triangeln 90° kring en mot trianglarnas plan vinkelrät axel genom trianglarnas gemensamma tyngdpunkt. Därefter sammanbindas trianglarnas hörnpunkter, så att en konvex sexhörning uppkommer. Bevisa, att denna är likvinklig, och beräkna den exakta längden av dess omkrets.
4. På kurvan $y = (x-a)^2$, där a är en positiv konstant, är en punkt P så belägen, att tangenten till kurvan i denna punkt och dess avskärningar av de positiva koordinataxlarna bilda en triangel med största möjliga yta. Normalen till kurvan i samma punkt går genom origo. Bestäm konstanten a.
5. Hörnen i två parallella begränsningsytor, $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$, i en kub äro så betecknade, att AA_1, BB_1, CC_1 och DD_1 äro kantlinjer i kuben. E är mittpunkt på AB, F mittpunkt på AD och G mittpunkt på AA_1. Man sammanbinder E med D_1, F med B_1 och G med C. Bevisa, att dessa linjer råka varandra i en och samma punkt och dela varandra i samma förhållande.
6. En rät cirkulär kon med största möjliga volym inskrives i ett klot. I ett mot konens axel vinkelrätt plan utskäres en cirkelring av klotytan och konens mantelyta. Undersök, hur förhållandet mellan cirkelringens och klotets yta varierar, då planet ändrar läge mellan konens spets och basyta.
7. Härled för $\cos 3v$ en formel, vari endast $\cos v$ ingår. Använd därefter denna formel för att lösa ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$, sedan x i denna utbytts mot $2y$. Ekvationens rötter skola angivas var för sig i såväl exakt som approximativ form.
8. I en triangel är den omskrivna cirkelns radie $= R$, den inskrivna cirkelns radie $= r$ och avståndet mellan de nämnda cirklarnas

medelpunkter $= d$. Mellan storheterna R, r och d gäller då sambandet

$$R^2 - d^2 = 2Rr \text{ (en sats av Euler).}$$

Bevisa denna sats för det fall, att triangeln är rätvinklig.

Resultat: 1. $\dfrac{a \mid 2 \mid 1 \mid -2 \mid -1 \mid}{b \mid 1 \mid 2 \mid -1 \mid -2 \mid}$. 2. Ekvationen är $3x+y+3=0$ och längden $\sqrt{10} = 3{,}162$ längdenh. 3. $\frac{a}{2}(\sqrt{18}+\sqrt{6})$. 4. $a \cdot \frac{3}{4}$. 5. Delningsförhallandet är 1 : 2. 6. Förhållandet går från 0 genom max. $= \frac{1}{6}$ till 0. 7. $x_1 = 2\cos 40° = 1{,}5320$; $x_2 = -2\cos 20° = -1{,}8794$; $x_3 = 2\cos 80° = 0{,}3472$. 8. Lösning till det allmänna fallet återfinnes i Elementa, *8*, s. 56, 1925 (ex. 157).

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Bestäm konstanterna a, b och c, så att kurvan $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ får en inflexionspunkt i punkten (1; 1) och kurvans tangent i denna punkt blir parallell med linjen $y + 3x = 0$. Upprita kurvan för de erhållna värdena på konstanterna.
2. I en ellips inskrives en fyrhörning på så sätt, att dess hörn bli belägna i axlarnas ändpunkter. I ellipsen drages en korda parallellt med ellipsens mindre axel, som är $2b$. Bestäm längden av denna korda i det fall, då summan av dess utanför fyrhörningen belägna delar är så stor som möjligt.
3. En liksidig hyperbel, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, tangerar y-axeln och linjen $3y = 5x + 5$. En av asymptoterna har ekvationen $x + y = 3$. Bestäm hyperbelns ekvation.
4. Två ellipser ha gemensamma brännpunkter. Storaxeln i den ena är 24 längdenheter, lillaxeln i den andra 10 längdenheter. En tangent till den ena ellipsen bildar rät vinkel med en tangent till den andra ellipsen. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan dessa båda tangenter.
5. Ekvationen $y^2 - 2px$ representerar olika parabler, då p antar olika värden. Om ekvationen deriverás och p elimineras mellan de båda ekvationerna, erhålles en ny ekvation, i vilken sålunda p icke ingår och som därför gäller för alla de ifrågavarande parablerna. Tolka denna ekvation geometriskt med utnyttjande av derivatans geometriska betydelse.
6. Beräkna maxima och minima för funktionen $y = \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{7}{\cos x} + 3$ och konstruera motsvarande kurva i dess huvuddrag.

7. Ekvationen $y = \frac{1}{x-2} - \frac{a}{x^2}$ representerar olika kurvor för olika värden på den positiva konstanten a. Sök och konstruera i dess huvuddrag orten för de punkter på dessa kurvor, i vilka tangenterna äro parallella med x-axeln. Angiv om möjligt de områden av orten, som bildas av maximi- respektive minimipunkterna till de givna kurvorna.

Resultat: 1. $a = -3$; $b = 0$; $c = 3$. 2. $b\sqrt{2}$. 3. $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$ eller $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. 4. Orten är en cirkel med medelpunkten i ellipsernas gemensamma centrum och med radien 13 längdenheter. 5. Man finner omedelbart $y' = -\frac{y}{2x}$. Vilken *geometrisk* tolkning av denna relation som problemförfattaren tänkt sig är ovisst, möjligen den att subtangenten $\left(\frac{y}{y'}\right)$ är lika med dubbla abscissan, dvs. halveras i vertex. 6. $y_{max} = -2$ för $x = n \cdot 2\pi$; $y_{min} = 12$ för $x = \pi + n \cdot 2\pi$; $y_{min} = -3\frac{1}{8}$ för $x = \pm 55{,}15 \cdot \frac{\pi}{180} + n \cdot 2\pi$; $y = 0$ för $x = \pm 70{,}53 \cdot \frac{\pi}{180} + n \cdot 2\pi$. Asymptoter: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$. 7. Av $y = \frac{4}{x-2} - \frac{a}{x^3}$ (1) erhålles $y' = -\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{2a}{x^3} = 0$ (2) och $y'' = \frac{8}{(x-2)^3} - \frac{6a}{x^4}$ (3). Om a elimineras mellan (1) och (2), erhålles ortkurvans ekvation $y = \frac{2x-4}{(x-2)^2}$. Kurvan har asymptoterna $y = 0$ och $x = 2$ samt en max.punkt i (6; 0,25). Endast pos. x-värden äro möjliga, ty de reella rötterna till (2) äro pos. för $a > 0$. Om a elimineras mellan (2) och (3), erhålles $y'' = -\frac{4(x-6)}{x^3(x-2)^3}$. För $0 < x < 2$ och $x > 6$ är $y'' < 0$, och för $2 < x < 6$ är $y'' > 0$. Ortkurvan består alltså av max.punkter i de båda första intervallen och av min.punkter i det tredje.

Uppgifter i fysik.

Obs. I lösningarna till uppgifterna 1, 2 och 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. För att mäta små krafter direkt i dyn har man hängt upp en liten pendelkula i en praktiskt taget viktlös kokongtråd. Kulan väger 1,x g, och trådens längd har avpassats så, att kulans

jämviktsläge förskjutes 1 mm i sidled, om den påverkas av kraften 1 dyn i vågrät riktning. Vid ett tillfälle besväras man av att kulan inte genast stannar i jämviktsläget, varför man överväger att låta kulan vara helt nedsänkt i glycerin, vilket skulle dämpa svängningarna. Om kraften 1 dyn fortfarande skall åstadkomma förskjutningen 1 mm i sidled, måste man emellertid då utbyta kulan mot en annan. Hur mycket bör denna väga? Kulans täthet antages vara 8,4 och tätheten för glycerin 1,26 g/cm³.

2. Sex likadana, smala och homogena stänger äro hoplagade till en regelbunden tetraeder *ABCD*, vars tyngdpunkt är *M*. Tetraedern är upphängd fritt rörlig i hörnpunkten *A*. Undersök, var *M* ligger, och beräkna, vilken vinkel *AM* kommer att bilda med lodlinjen, om man i hörnpunkten *B* upphänger en vikt, som väger lika mycket som de sex stängerna tillsammans.

3. När 1 g nollgradig is smälter, avtager volymen 90,7 mm³. Härpå grundar sig en kalorimeterkonstruktion — iskalorimetern. I en sådan apparat infördes 5,3 g bensol av temperaturen + 8°,9 C. Vätskan avkyldes i kalorimetern och stelnade vid + 5°,5 C, varefter avkylningen fortsatte ned till 0° C. Den avgivna värmemängden smälte en viss mängd is: man avläste på apparaten volymsminskningen 202 mm³. Beräkna smältvärmet för bensol. Spec. värmet för bensol i flytande form är 0,40 och i fast form 0,38 cal per g och grad.

4. En apparat för bestämning av vätskors brytningsindex består av en halvsfär av starkt ljusbrytande glas, vilken har den plana ytan horisontell och vänd uppåt. Ett smalt ljusknippe riktas snett nedifrån vinkelrätt mot den buktiga ytan. Knippet träffar alltså den plana ytan i dess medelpunkt under en viss infallsvinkel. När denna vinkel är större än 31°,94, inträffar totalreflexion. En tillräcklig mängd av den vätska, som skall undersökas, utgjutes på den plana ytan, så att partiet kring ytans medelpunkt täckes av vätskan. För att totalreflexion nu skall inträffa vid gränsytan mellan glaset och vätskan, måste infallsvinkeln vara minst 46°,05. Beräkna vätskans brytningsindex.

5. För att bestämma radien hos en konvex sfärisk spegel uppställer man framför densamma en vridbar kikare, en s. k. teodolit, och injusterar kikaren och spegeln, så att deras huvudaxlar bliva horisontella och sammanfallande. På var sin sida om kikaren anbringas en liten lampa, vilken kan betraktas som en punktformig ljuskälla. De båda lamporna befinna sig på ett avstånd av 100 cm från spegeln och 10,0 cm från kikarens vertikala vridningsaxel, på en linje, som skär denna axel under rät vinkel. Med kikaren är en visare fast förbunden; när kikaren vrides

runt, rör den sig över en vågrät cirkelformig skala, som är indelad i grader. Man vrider nu först kikaren åt ena hållet, tills man ser bilden av den ena lampan avteckna sig mot kikarens hårkors. Visaren pekar då på 70°,32. Därpå vrides den åt andra hållet, så att den andra lampan avtecknar sig på samma ställe av hårkorset. Avläsningen på skalan blir då 66°,54. Beräkna spegelytans radie.

6. Från ett likströmsnät uttogs ström till två parallellkopplade lampgrupper A och B. Grupp A innehöll en enda lampa, märkt 240 V, 100 W, grupp B två seriekopplade lampor av en annan sort. Nätspänningen kunde avläsas på en voltmeter och den totala strömförbrukningen på en ampèremeter. Då nätspänningen var 224 V, visade ampèremetern 0,560 A. Skulle avläsningarna på dessa instrument påverkas, om lystråden bruste i den ena av lamporna i grupp B? Angiv i så fall, om utslagen ökas eller minskas, och beräkna ändringens storlek. Motståndet i lampan A växer med temperaturen och avtager alltså med sjunkande spänning; minskningen för varje volt antages vara 0,2 % av motståndet vid 240 V.
7. En elektrisk spårvagn vägande 10 ton drives med en likströmsmotor av serietyp, vars eget inre motstånd är 0,100 ohm. I utförsbackar bryter man emellertid förbindelsen med matarledningen och inkopplar (efter företagen lämplig omkoppling av förbindelsen mellan rotor och fältmagneter) i stället ett lämpligt motstånd r mellan anslutningsklämmorna på maskinen. Denna kommer därvid att drivas av vagnshjulen som en generator och lämnar nu elektrisk energi till motståndet, varigenom vagnens rörelse bromsas. Det visar sig, att denna generator ger en elektromotorisk kraft, som inom vissa gränser är proportionell mot vagnshastigheten och vid en hastighet av 40 km/tim utgör 400 V. Hur stort bör motståndet r tagas, för att vagnen i en utförsbacke, som lutar 10° mot horisontalplanet, skall hålla en hastighet av 36 km/tim? Friktionsförlusterna må försummas.
8. Följande fotografiska metod kan användas för att bestämma en stämgaffels svängningstal. En cirkulär skiva får rotera kring en vågrät axel genom mittpunkten. Skivans ena sida är indelad i 120 lika sektorer, varannan vit och varannan svart; dess andra sida täckes av ett ljuskänsligt papper. Stämgaffeln, vars ena skänkel är blankpolerad upptill på utsidan, är uppställd med lodräta skänklar framför det ljuskänsliga papperet och belyses med ett konvergent ljusknippe, som efter reflexion mot stämgaffelns polerade yta samlas till en lysande punkt på papperet. Före och efter exponeringen är papperet skyddat för ljus.

Ljuder stämgaffeln, medan den belyses och skivan roterar, avbildas dess svängningar som en vågformad kurva på det ljuskänsliga papperet. För att mäta tiden för svängningarna belyser man skivans andra sida med ljusglimtarna från en glimlampa, som matas med 50-periodig växelström och tänder sig varje gång spänningen överskrider ett visst värde. Om varje vit sektor under mellantiden mellan två ljusglimtar just hinner intaga den närmast föregående vita sektorns plats, synes skivan stillastående. Vid försökets utförande ökas långsamt skivans varvtal, tills detta skenbara stillastående inträffar, varefter varvtalet hålles konstant, medan papperet exponeras. Vid ett tillfälle fann man efter framkallningen, att 123 hela svängningar upptogo en medelpunktsvinkel av 170° på papperet. Beräkna härav stämgaffelns svängningstal.

Resultat: **1.** 1.18 g. **2.** M ligger på $\frac{1}{4}$ av höjden från basytan räknat; AM bildar med lodlinjen vinkeln 22°.0 $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{8}}{7}\right)$. **3.** 30,5 cal/g. **4.** 1,361. **5.** 194 cm. **6.** Ampèremeterns utslag minskas med 0,158 amp.; voltmeterns ändras ej. **7.** 0,665 ohm. **8.** 434.

Realexamen V. T. 1944.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{6x-1}{3x-3}$.
2. En handlande köpte 30 lador blåbär till ett pris av 60 öre per liter. Varje låda var invändigt 70 cm lång, 40 cm bred och 12,5 cm hög. Han forslade bären på lastbil till en närbelägen stad där han sålde dem för 1,20 kr/kg. Transportkostnaderna uppgingo till 30 kr. Hur många procent på det utlagda beloppet förtjänade han, om 5 liter blåbär väga 3,3 kg?
3. Nedanstående tabell utgör ett utdrag ur obligationslistan för en viss dag år 1943:

Namn	Av år	Nominell procent	Betalning i procent (kurs)
Försvarslånet	1941	4	$106\frac{7}{8}$
Försvarslånet	1942	3	$101\frac{1}{4}$

I vilket av dessa lån borde man ha placerat sina pengar för att få den största avkastningen?

4. En person hade 40 000 kr placerade i inteckningar, på vilka han brukade erhålla 4,25 % ränta. Ett år blev räntan endast 1 625 kr, beroende på att räntefoten någon gång under året sänktes 0,5 %. Vilken dag började den lägre räntefoten tillämpas?
5. Vid busslinjen mellan M och H ligga två hållplatser på 350 m avstånd från varandra. En person bor 225 m från den ena hållplatsen och 275 m från den andra. Vill han från M med bussen hinna hem fortast möjligt, är det likgiltigt, vid vilken hållplats han stiger av. Reser han däremot från H, kan han komma hem en minut tidigare, om han stiger av vid den lämpligast belägna hållplatsen. Beräkna personens och bussens medelhastigheter.
6. Ett kärl består av en cylindrisk del med 8 cm höjd och därunder en konisk fördjupning. Om kärlet fylles med vatten och en mycket smal glasstav av 13 cm längd nedföres, så att dennas ena ända når bottnens lägsta punkt, kommer 1 cm av staven att vara ovan vattnet, då staven hålles lodrätt. Om staven släppes, når dess andra ända precis fram till kärlets rand. Hur stor är kärlets volym? $\pi = 3\frac{1}{7}$.
7. Två cirklar, vilkas radier äro 6 cm och 2 cm, tangera varandra innantill i punkten *A*. I den större cirkeln dragas diametern *AB* och en korda *BC*, vilken tangerar den mindre cirkeln. Sök längden av denna korda.
8. I triangeln *ABC* drages parallellt med *AB* en linje, som skär *AC* i *D* och *BC* i *E*. *BE* förhåller sig till *EC* som 3 : 7, och ytan av triangeln *DEC* är 171,5 cm². Hur stora äro ytorna av trianglarna *ADE* och *ABE* var för sig?

Resultat: **1.** $x = 0{,}8$. **2.** 26 %. **3.** Eff. proc. äro för lånen 1941 och 1942 resp. 3,74 % och 2,96 %, varför det förra ger största avkastningen. **4.** 16 aug. **5.** Personens hastighet är 100 m/min. och bussens 700 m/min. **6.** 733 cm³. **7.** $4{,}8\sqrt{6} = 11{,}76$ cm. **8.** $\triangle ADE = 73{,}5$ cm²; $\triangle ABE = 105$ cm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Ett jämntjockt isblock flyter på vattnet. Dess övre horisontella yta är 2,0 m². En pojke, som väger 48 kg, står mitt på blocket. Hur tjockt måste blocket vara, för att dess yta nätt och jämnt skall befinna sig över vattenytan? Isens spec. vikt är 0,91.
2. En 8 dm lång rak bräda anordnas så, att dess ena kortända ligger 2,5 dm högre än den andra. På brädan placeras en liten vagn, vilken är förbunden med en vågskål medelst ett snöre, som löper över en lättrörlig trissa vid brädans övre ända.

Mellan vagnen och trissan är snöret parallellt med brädan, medan den del av snöret, som uppbär vågskålen, hänger lodrätt ned från trissan. Vagnen väger ensamt för sig 160 g och är lastad med en 2 hg-vikt. Vågskålen väger 90 g och är belastad med en 50 g-vikt. Undersök, huruvida vagnen sätter sig i rörelse uppför eller utför brädan, om den släppes. Friktionen kan lämnas ur räkningen.

3. En person ville uppskatta vikten av ett brev. Då han inte hade någon brevvåg, använde han i stället en linjal, som efter vad han förut visste vägde 24 g. Linjalen var rak, homogen, jämntjock och styv och graderad i cm med skalstrecken 0 och 40 ytterst i var sin ända. Brevet fästes vid linjalen, så nära delstrecket 0 som möjligt. Därpå lades linjalen på ett bord, vinkelrätt mot bordskanten och så, att den del, där brevet var fastsatt, sköt något utanför bordsskivan. Då skalstrecket 11 cm var rakt över bordskanten, låg linjalen kvar, men då den fördes litet längre utåt, så att 12 cm-strecket kom över bordskanten, vippade den över. Vad kunde han därav veta om brevets vikt?
4. En gryta är upptill lufttätt tillsluten medelst ett cirkelrunt vågrätt lock, vilket fasthålles med 12 likadana skruvar, anbragta längs periferien. Grytan innehåller vatten och ånga av 120° C; all luft är utdriven. Locket väger 1 800 g, och den del av dess undersida, som är utsatt för ångans tryck, har ytan 100 cm². Det yttre lufttrycket är 769 mm kvicksilver. Hur stor kraft måste varje skruv minst tåla, om alla skruvarna lida samma påkänning? Vattenångans mättningstryck vid 120° C är 1 489 mm kvicksilver. Specifika vikten för kvicksilver är 13,6.
5. Hos en encylindrig, dubbelverkande ångmaskin, som arbetar med expansion, är kolvens diameter 90 cm, kolvslaget 80 cm och axelns varvtal 150 i minuten. Med ledning av indikatordiagrammet kunde man bestämma, att ångan i cylindern hade ett genomsnittligt övertryck av 2,5 kgf/cm², och man beräknar, att 85 % av det indikerade arbetet kan uttagas vid maskinens axel. Maskinen förbrukar per timme 575 kg stenkol med ett förbränningsvärme av 7 800 kcal per kg. Hur stor var anläggningens verkningsgrad? Den mekaniska värmeekvivalenten är 427 kgm/kcal.
6. Ett bilbatteri består av 6 seriekopplade blyackumulatorer, var och en med elektromotoriska kraften 2,0 V och inre motståndet 0,008 Ω. För att sätta i gång startmotorn fordras i första ögonblicket en strömstyrka av 60 A. Hur stort motstånd få tillledningar och motor högst ha, för att denna ström skall kunna uppkomma?

7. Ett industriföretag har ett konstant effektbehov av 10 kW. Man planerar att anlägga en liten elektrisk kraftstation, som skall förse företaget med den erforderliga energien. Kraftstationen skall drivas av en turbin och denna av det vatten, som rinner från en damm i en å. Fallhöjden beräknas bliva 12 m och turbinfirman uppger, att den totala verkningsgraden för anläggningen blir minst 35 %. Genom ån rinner en vattenmängd, som under olika årstider varierar mellan 2 000 och 900 m^3 per timme. Räcker detta till för den avsedda användningen? 1 kW = 102 kgm/sek.
8. En pojke skulle använda en elektrisk apparat, som hade 3 Ω motstånd och krävde 1,0 V spänning. Han hade en blyackumulator på 2,0 V och funderade ut följande anordning. Mellan ackumulatorns poler inkopplade han först ett motstånd AB på 4,0 Ω. Sedan anslöt han sin apparat mellan A och mittpunkten C av AB. Spänningen mellan A och C blev emellertid ej 1,0 V. Hur stor var den? Ackumulatorns inre motstånd och motståndet i ledningstrådarna försummas.

Resultat: **1.** $2\frac{2}{3}$ dm. **2.** Den utför planet verkande kraften är endast 112,5 gf, varför vagnen rör sig uppåt. **3.** Brevet vägde mer än 16 g men högst $19\frac{7}{11}$ g. **4.** 8,01 kgf. **5.** 10,1 %. **6.** 0,152 ohm. **7.** 900 m^3 per tim. ger effekten 10,3 kW, varför vattenmängden är tillräcklig. **8.** 0,75 volt.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Vid uppmätning befinnes den plattgängade skruven till en domkraft ha en ytterdiameter utanpå gängorna av 50 mm, 10 mm stigning och kvadratisk gängprofil. Mutterns höjd är = 40 mm, och lasten som domkraften lyfter = 6 ton. Vad blir
   a) tryckpåkänningen per cm^2 på skruven,
   b) skjuvpåkänningen per cm^2 på skruvens gängor,
   c) skjuvpåkänningen per cm^2 på mutterns gängor?
2. En axel är lagrad i två glidlager. Axeltapparna äro 85 mm långa och 50 mm i diameter. Yttrycket mellan tapp och lagerskål är 30 kgf/cm^2. Hur stor är effektförlusten på grund av lagerfriktionen, då maskinen gör 120 varv per minut? Friktionskoefficienten = 0,05.
3. Beräkna centrumavståndet mellan kugghjulen i en enkel växel, vars utväxling är 1 : 4, om drevet har 12 kuggar, och dess periferidelning vid uppmätning visar sig vara 5 π.

4. En hiss drives av en elmotor med varvtalet 960 över en snäckväxel med enkelgängad skruv. Snäckhjulet har 40 kuggar. Lintrummans diameter är 400 mm. Verkningsgraderna äro för motorn 83 % och för det övriga hissmaskineriet 72 %. Hur stor är effektförbrukningen i kW, då en last av 1,5 ton lyftes? Rita skiss!
5. En kolvångmaskin med kondensor, som arbetar med mättad ånga av 9 kgf/cm² övertryck, har en cylinderdiameter av 250 mm. Kolvstångens längd är 500 mm. Absoluta trycket i kondensorn är 0,15 kgf/cm². Beräkna kolvstångens diameter med 20-faldig säkerhet mot avknäckning. $E = 2\,150\,000$ kgf/cm². Hur stor blir största tryckpåkänningen i kolvstången?
6. En transmissionsaxel består av två axeldelar sammanfogade medelst en skivkoppling, den senare sammanhållen av fyra bultar. Hur många hästkrafter kan denna transmissionsaxel överföra vid 300 varv/min., om axeldiametern är 70 mm och tillåten vridningspåkänning i axeln = 120 kgf/cm²? Beräkna diametern på skivkopplingens bultar för en tillåten skjuvpåkänning = 300 kgf/cm², om bultarna sitta i en cirkel med 200 mm diameter.
7. En motor med varvtalet 1 200 överför med tre likadana kilremmar en effekt av 4,5 hk. Motorns kilremskiva har diametern 150 mm. Remtvärsnittet är ett parallelltrapets med de parallella sidorna 13 mm och 7 mm samt höjden 8 mm. Spänningen i den dragande remparten är 3 gånger så stor som i den dragna. Beräkna spänningen i kgf/cm² i den dragande parten!
8. Ett träbjälklag i en fabrik skall konstrueras för 8 m spännvidd och med användande av 8 · 20 cm träbjälkar samt en järnbalk INP 20. Gör en skiss, som visar en skärning genom bjälklaget längs träbjälkarna samt beräkna tillåten yttre belastning per m² på träbjälkarna, om centrumavståndet mellan dem är 50 cm, böjningspåkänningen = 80 kgf/cm² och träbjälklagets egen vikt = = 200 kg/m².
9. Hur stor belastning kan tillåtas vid mitten av en vid ändarna fritt upplagd I-balk NP 20 med 6 m spännvidd, då böjningspåkänningen får uppgå till 1 200 kgf/cm², och då hänsyn tages till balkens egenvikt? Beräkna balkens största nedböjning. $E = 2\,150\,000$ kgf/cm².

Resultat: **1.** a) 478 kgf/cm²; b) 239 kgf/cm²; c) 191 kgf/cm². **2.** 0,534 hk. **3.** 150 längdenheter. **4.** 12,4 kW. **5.** 39 mm; 405 kgf/cm². **6.** 33,9 hk; 9,3 mm. **7.** 22,4 kgf/cm². **8.** Om man antager, att järnbalken är placerad mitt emellan murarna och att träbjälkarna äro delade mitt över balken, blir den tillåtna nyttiga lasten 227 kg/m². **9.** 1630 kg; 17 mm.

(Forts. från s. 116.)

IVA, 1944: 1.

Ur innehållet: Pyrolys enligt »rökpip»-metoden; Om destillat från träkolning; Undersökning beträffande hydrering av töretjäroljor; Centrallaboratorium för A/B Astra, Södertälje; Mo och Domsjö-koncernens kemiska forskningslaboratorium.

Ljuskultur, 1943: 4, 1944: 1.

Ur innehållet: Strålkastare med kvicksilverlampor; Allformatorn i ljusets tjänst; En korrektionsanordning för fotoceller; Kvantitativ behandling av Purkinjes fenomen; Inflygnings- och banljus å flygplatser.

Populär radio, 1944: 3—4.

Ur innehållet: Störningar från superheterodyner; Likriktarrör och likriktare; Kortvågsmottagare; Förstärkarteknik och ljudåtergivning; Mottagningsantenners verkningssätt.

Nordisk Astronomisk Tidskrift, København 1944: 1—2.

Ur innehållet: K. A. THERNØE, Mekanisk Regning og Regnemaskiner, II; J. P. MØLLER, Kometerne; A. V. NIELSEN, Uranus' Lysstyrke; E. STRÖMGREN, Nordiske Privatastronomer; P. PEDERSEN, Om en grafisk Fremstilling af Enegifordelingen i Spektret; N. A. MØLLER NICOLAISEN, Moderne Solure; P. PEDERSEN, Ekliptikas Stilling i Forhold til Horisonten; N. A. MØLLER NICOLAISEN, Soluret paa Kapitelhuset i Lund; A. V. NIELSEN, Hvornaar forelagde Ole Rømer sin Avhandling om Lysets Hastighed for Akademiet i Paris?

Naturens Verden, København 1944: 2—3.

Ur innehållet: J. H. WANSCHER, Haandskriften i biologisk Belysning; J. OLSEN, Elektriske og magnetiske Metoder til Efterspøring af Stoffer under Jordens Overflade; H. BLEGVAD, Verdenshavenes Udforskning; V. MADSEN, Geologiens Grundproblemer før og nu.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1943: 4, 1944: 1.

Ur innehållet: V. BRUN, Kritikk av noen matematiske symboler; T. NAGELL, Erik Holmgren; W. LJUNGGREN, Bevis for en setning av de Jonquières; L. LØVESLAD, En egenskap ved måleskalaer.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, Årg. 6, 1944: 1.

Ur innehållet: H. ORMESTAD m. fl., Professor Holtsmark 50 år; E. A. HYLLERAAS, Nobelpristagere i kjemi; O. LINDSTAD, Pulserende likestrøm; O. LINDSTAD, Elektrisk strøm krever arbeide; L. VEGARD, Koronafenomener og deres samband med sol- og jordprosesser; E. K. BROCH, Hovedlinjer i den historiske utvikling av kvanteteorien i de siste 20 år; L. ROSENFELD, Utviklingen av årsaksbegrepet.

Naturen, Bergen 1944: 2—4.

Ur innehållet: I. RUUD, Illusjoner i meteorologien; S. EINBU, Forandringer og utvikling i universet.

Nyare metoder för kristallstrukturbestämning medelst röntgenstrålar. II.

Av L. v. HÁMOS.

2. Patterson-analys av atomavstånden.

I första delen av denna uppsats[1] har visats, att elektrontäthetsfördelningen inom elementarcellen matematiskt kan beskrivas medelst en tredubbel Fourier-serie, vars koefficienter äro de komplexa strukturamplituderna

$$F(hkl) = F'(hkl) + F''(hkl) \tag{1}$$

för de olika interferenserna (hkl). Ur intensitetsmätningarna erhålles endast absolutvärdet av strukturamplituden, $|F(hkl)|$, varför Fourier-syntesens tillämpning måste begränsas till de — visserligen talrika — specialfall, där till följd av gittrets symmetricentrum den imaginära delen av strukturamplituden är lika med noll.

Ett stort framsteg på strukturbestämmningens område betyder A. L. Pattersons[2] upptäckt, att storheterna $|F(hkl)|^2$ (vilka äro proportionella mot röntgenreflexernas intensitet) med fördel kunna användas för att beskriva väsentliga egenskaper hos ett kristallgitter. Patterson bildar med hjälp av strukturamplitudernas kvadrater följande funktion:

$$P(uvw) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{\infty}^{\infty} F^2(hkl) e^{2\pi i(hu + kv + lw)} \tag{2}$$

Den fysikaliska bakgrunden hos Pattersons funktion framträder ej vid första anblicken av denna formel. Följande härledning — för enkelhetens skull utförd i en enda dimension — belyser Patterson-funktionens grundläggande egenskaper.

Vi tänka oss elektriska laddningar periodiskt fördelade längs en rät linje sammanfallande med X-axeln. Identitetsavståndet antages (liksom i del I.) vara lika med längdenheten längs axeln. Laddningsfördelningen beskrives med funktionen

[1] Elementa, marsh. 1944, s. 1.
[2] A. L. Patterson, Phys. Rev. 46, 1934, 372.

$$\varrho(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(h) e^{2\pi i h x} \qquad (3)$$

Om $\varrho(x)$ antages vara en reell funktion, är $F(-h)$ konjugerad komplex till $F(h)$. En dylik fördelning exemplifieras med kurvan ϱ i fig. 11. Vi betrakta laddningstätheten i två punkter, vilkas avstånd från varandra är lika med u. Ett dylikt par av punkter har koordinaterna x och $x+u$. Patterson bildar produkten av laddningstätheterna $\varrho(x)$ och $\varrho(x+u)$ och förenar samtliga tänkbara kombinationer i uttrycket

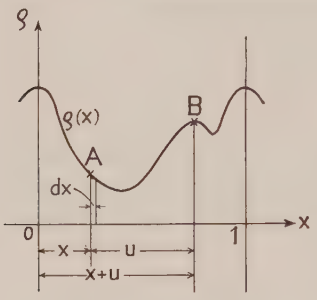


Fig. 11. Grafisk framställning av en endimensionell laddningsfördelning.

$$P(u) = \int_0^1 \varrho(x)\varrho(x+u)\,dx \qquad (4)$$

Genom insättning av (3) och integration erhålles:

$$P(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} F^2(h) e^{2\pi i h u} \qquad (5)$$

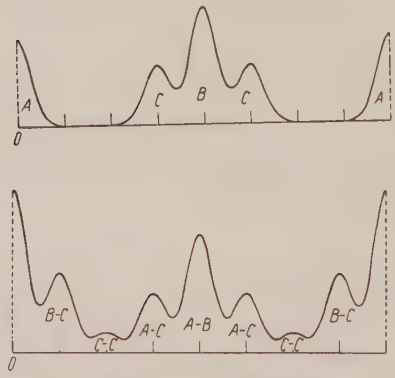


Fig. 12. Endimensionell laddningsfördelning och därunder motsvarande Patterson-funktion.

Funktionen $P(u)$ har maxima för de värden u_1, u_2 ... som äro i det närmaste identiska med avstånden mellan två maxima i fördelningen $\varrho(x)$. För belysning härav återgives i fig. 12 en endimensionell laddningsfördelningskurva och därunder motsvarande Patterson-funktion. Landningsfördelningskurvans maxima äro betecknade med A, B och C. Patterson-funktionens maxima svarar mot avstånden mellan dessa maxima och äro betecknade i enlighet därmed. Patterson-funktionens maximum i origo är en trivialitet och betyder endast, att varje laddning har avståndet noll ifrån sig själv.

Mellan funktionerna $\varrho(x)$ och $P(u)$ finns ytterligare ett samband. Patterson-funktionens maxima äro nämligen proportionella mot

produkten av de två maxima i fördelningsfunktionen $\varrho(x)$, vilkas avstånd de representera. Fig. 12 ger även belägg härför.

Dessa egenskaper hos Patterson-funktionen gälla även för tredimensionella fördelningar. Ur elektrontäthetsfördelningen $\varrho(xyz)$ med strukturamplituderna $F(hkl)$ bildas funktionen $P(uvw)$ enligt (2). I origo har Patterson-funktionen alltid ett maximum : $P(000)$.

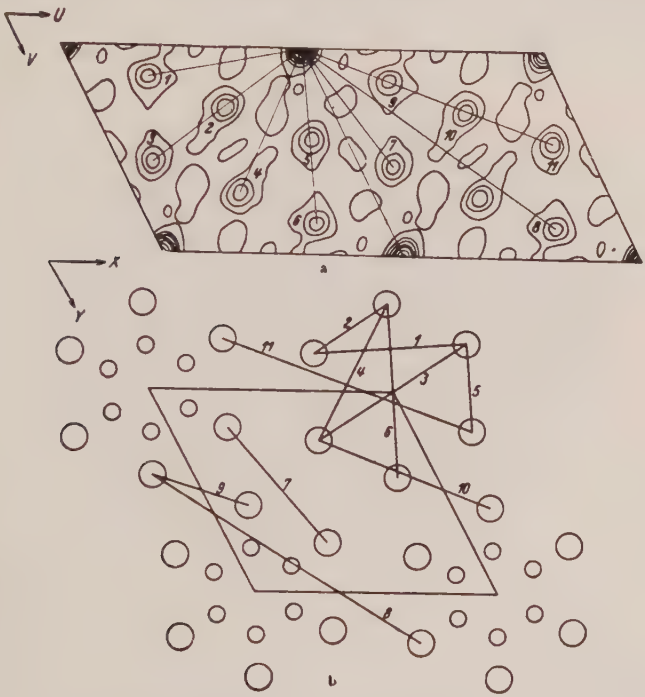


Fig. 13. *a*. Projektion av Patterson-funktion för hexaklorbensol, C_6H_6; *b*. Atomlägena projicerade i samma plan.

Övriga maxima tillhöra vissa punkter i rymden, definierade medelst värden på koordinaterna u, v och w. Vi beteckna koordinaterna för en punkt, där funktionen $P(uvw)$ har maximum, med u_1, v_1, w_1. Det kan bevisas, att vektorn från origo till punkten u_1, v_1, w_1 motsvarar till *längd* och *riktning* förbindelselinjen mellan två maxima i fördelningen $\varrho(xyz)$. Funktionens värde $P(uvw)$ i ett maximum är proportionellt mot produkten av ordningstalen för de två atomer, som förbindas av resp. linje.

Patterson-analysen utgör en mycket värdefull komplettering av de tidigare metoderna för strukturbestämning. Komplicerade strukturer kunna visserligen icke utredas enbart med hjälp av Patterson-funktionen, men genom studium av denna funktion i vissa plan och riktningar erhållas värdefulla upplysningar om huvuddrag av den undersökta strukturen.

För att åskådliggöra de tredimensionella Patterson-funktionerna begagnar man sig av vissa projektioner eller snitt, varigenom antalet dimensioner reduceras till två eller ett.

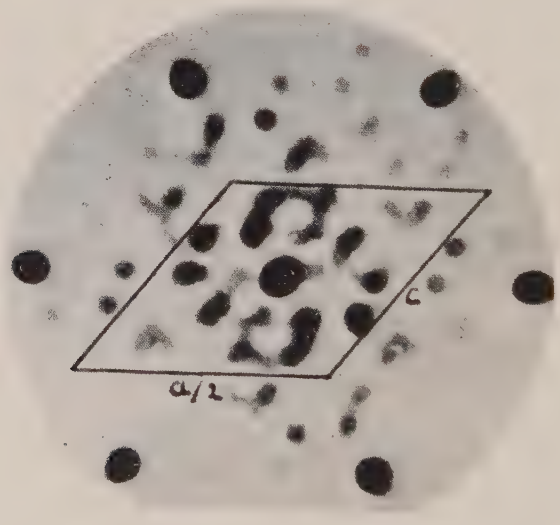


Fig. 14. På optisk väg framställd Patterson-funktion för hämoglobin.

Patterson-funktionens värde kunna t. ex. projicieras i ett plan eller på en linje. Funktionens maxima framträda då i projektionsbilden liksom laddningsfördelningsmaxima vid Fourier-syntesen (se t. ex. del I, fig. 4). Denna metod har den nackdelen, att flera maxima kunna bli överlagrade, vilket försvårar analysen betydligt.

För att undvika sistnämnda olägenhet betraktar D. Harker[1] vissa snitt genom Patterson-funktionen $P(u, v, w)$. I ett dylikt snitt t. ex.

$$P(0, v, w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(kv+lw)} \sum_{h=-\infty}^{\infty} F^2(hkl) \qquad (6)$$

svarar varje maximum av funktionsvärdet mot ett *enda* maximum av den tredimensionella Patterson-funktionen.

Fig. 13 a visar en tvådimensionell projektion av Pattersonfunktionen för hexaklorbensol C_6H_6. För åskådliggörande av sambandet mellan denna karta och atomfördelningen i gittret hava vissa maxima betecknats med siffror och förbundits med origo medelst vektorer.

Fig. 13 b återger projektionen av atomlägena på samma plan. Förbindelsevektorer mellan olika atomlägen äro dragna. Man kan lätt avläsa det ovan nämnda sambandet mellan dessa förbindelsevektorer och vektorerna i fig. 13 a.

Braggs optiska metod (se del I) har man med framgång använt

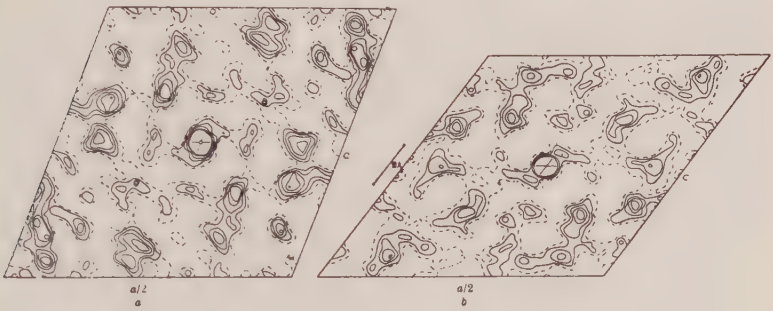


Fig. 15. Patterson-funktion för häst-hämoglobin enl. Perutz. *a*) före och *b*) efter torkning (17,7 % kontraktion).

för att summera de Fourier-serier, varav Patterson-funktionen är sammansatt. I fig. 14 återges en på optisk väg framställd Pattersonfunktion (givetvis tvådimensionell) för hämoglobin.

Patterson-funktionen har på ett elegant sätt tillämpats av M. F. Perutz vid utforskandet av hämoglobinets kristallstruktur. Strukturen i sin helhet är ännu obekant. Det lyckades emellertid Perutz att med hjälp av Patterson-funktioner få grepp om vissa huvuddrag av strukturen. Redan dylika delresultat innebära stora framsteg, när det gäller komplicerade organiska föreningar av biologisk natur.

Perutz företog sin undersökning på kristaller av häst-hämoglobin, vilka torkades i luft. Därvid sker en kontraktion av kristallen ända till 42 volymprocent. Torkningsprocessen utfördes på så sätt, att vissa mellanstadier blevo fixerade under den tid, som krävdes för en grundlig röntgenkristallografisk undersökning. Med hjälp av röntgeninterferensernas relativa intensitet konstruerades sedan Patterson-diagram, tillhörande dels det ursprungliga ämnet, dels tre andra stadier under torkningsprocessen. I fig. 15 a återges

Patterson-funktionens projektion för det ursprungliga (våta) hämoglobinet. Projektionsplanet innehåller de kristallografiska axlarna *a* och *c*. Axeln *b* är vinkelrät mot detta plan. Efter en viss torkning, motsvarande en volymkontraktion av 17,7 %, har Pattersonfunktionens projektion det i fig. 15 b angivna utseendet.

Genom jämförelse av dessa Patterson-»kartor» kunde vissa slutsatser dragas beträffande huvuddragen av hämoglobinets struktur samt torkningsprocessens mekanism. Resultatet återges schematiskt i fig. 16. Bilden visar ett plan innehållande de kristallografiska axlarna *a* och *c*. Vinkelrät mot detta plan sträcker sig *b*-axeln med

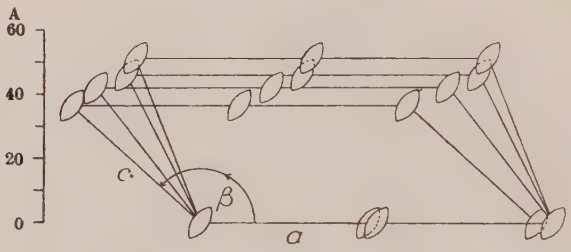


Fig. 16. Schematisk framställning av hämoglobinets deformation under torkningsprocessen.

identitetsavståndet 64 Å, vilket förblir oförändrat under torkningsprocessen. Studiet av Patterson-funktionen leder till den slutsatsen, att hämoglobinet är uppbyggt av parallella skikt, som omväxlande utgöras av protein och en vätska, som huvudsakligen består av vatten. Dessa skikt äro parallella med *bc*-planet. Under torkningen närma sig proteinskikten varandra, varvid vinkeln β mellan *a*- och *c*-axeln ändras. Fig. 16 återger riktningen av *c*-axeln för de fyra undersökta stadierna under torkningsprocessen.

3. Analys av överstrukturer hos legeringar.

Ett stort område, där röntgenmetoden med framgång använts, är utforskning av kristallstrukturen hos legeringar. Först och främst kunna de i legeringen ingående olika kristallografiska faserna lätt urskiljas i röntgendiagrammen. Avvikelser av viss art från idealgittret uppstå vid de s. k. fasta lösningarna, där de kemiska komposanterna icke stå i enkla stökiometriska relationer till varandra.

»Substitutionslösningar» och »mellanrumslösningar» äro två typiska fall av fasta lösningar. Fig. 17 visar schematiskt strukturen

hos en substitutionslösning. Ämnet B är löst i gittret av ämnet A på så sätt, att B-atomer inta vissa A-atomers platser. Förutsättningen för uppkomsten av dylika substitutionslösningar är, att de atomer, som utbytas mot varandra, icke ha alltför olika dimensioner.

Fig. 18 ger en schematisk bild av mellanrumslösningar. Atomerna B, vilka måste vara små i förhållande till atomerna A, lagras i mellanrummen av A-gittret.

Det kan i båda fallen föreligga avvikelser från det ideala translationsgittret, som lagts till grund för våra betraktelser i del I. I fig. 17 b och 18 b äro elementarcellerna icke enhetliga. Man talar här om ett oordnat gitter. Röntgeninterferenserna beskriva då icke gittret i detalj utan ge endast vissa medelvärden av gitterdimensionerna. Det vanligaste är, att elementarcellens dimensioner i medeltal ändras genom tillkomsten av atomsorten B.

Det finnes emellertid specialfall, där inlagring av de lösta atomerna (i våra exempel B) sker med en viss ordning. Dylika fall föreligga i de schematiska bilderna fig. 17 c och 18 c. Man ser, att ordningen i de lösta B-atomernas fördelning har till följd, att elementarcellens dimensioner fördubblas. Följden av denna *överstruktur*, som termen lyder, är en del nya linjer i röntgendiagrammet. Fig. 19 visar Debye-diagram för lege-

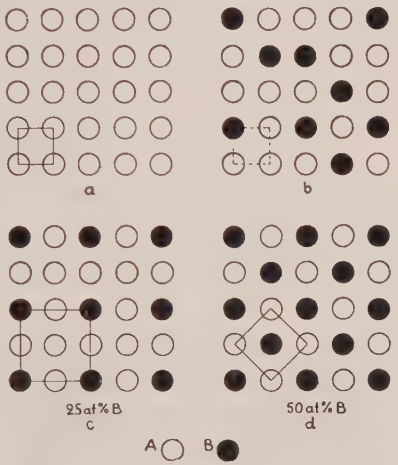


Fig. 17. Tvådimensionellt schema för substitutionslösningar.

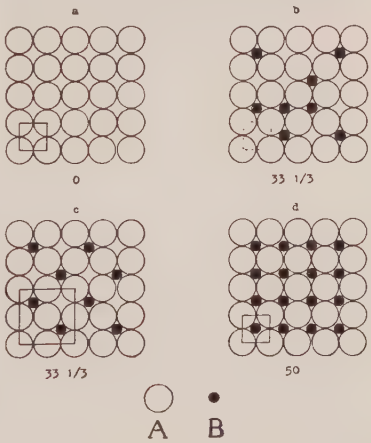


Fig. 18. Tvådimensionellt schema för mellanrumslösningar.

ringen Cu_3Au, a) med oordnad, b) med ordnad atomfördelning. Man ser tydligt tillkomsten av nya reflexer.[1]

Förutsättningen för att överstrukturer lätt skola kunna upptäckas är, att de båda atomslagen A och B ha tämligen skilda ordningstal. I fallet CuZn, där ordningstalen ligga mycket nära varandra, kunde överstruktur påvisas endast medelst specialmetoder.

4. Röntgenstrukturanalysens framtida mål.

Till slut skall W. L. Braggs syn på röntgenstrukturanalysens framtida utveckling återges.[2]

»... Det vore en stor framgång, om röntgenkristallografin skulle lyckas att fullständigt bestämma proteinernas (äggviteämnen) jättemolekyler, vilka bygga upp den levande materien. Arbetet har redan påbörjats. Bernal är den förste, som erhållit röntgenfotografier av proteinkristaller, och sedan dess har arbeten av Fankuchen, Crowfort, Perutz och Riley visat, att problemet icke är olösbart. Några slutsatser ha redan kunnat dragas beträffande den allmänna formen av molekylen. Det är mycket sannolikt, att proteinernas struktur är grundad på en lång kedja —CO—CHR—NH—CO— o. s. v., där R betecknar en del av en aminosyra, varav många avarter finnas bland proteinerna. Dessa kedjor måste på något sätt fogas ihop för att bilda en kompakt grupp. Svårigheten av analysen beror på molekylens storlek. Hämoglobin har t. ex. en molekylvikt på omkring 70 000. Försöket att klarlägga proteinernas struktur kan synas vara djärvt, men för några år sedan syntes bestämningen av silikaternas och vissa organiska ämnens struktur helt hopplös. Dessa äro numera välkända. Om en eller annan protein kunde bli analyserad, kunde de andra med lätthet bestämmas och en ny gren av vetenskapen kunde erhålla ett fast fundament ...

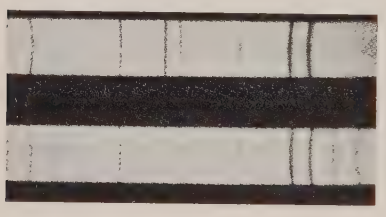


Fig. 19. Debye-diagram för legeringen Cu_3Au: *a*) med oordnad, *b*) med ordnad atomfördelning.

[1] Dylika överstrukturer ha sedan år 1925 med stor framgång studerats i Sverige av bl. a. G. Borelius, C. H. Johansson och J. O. Linde.

[2] W. L. Bragg, *The History of X-Ray Analysis.* Science in Britain. The British Council, 1943.

Även studiet av metallernas struktur kommer att ha en framtid. Metallernas mekaniska, elektriska och magnetiska egenskaper bero på ett mycket känligt sätt av kristallstrukturen. Vi kunna ännu icke beräkna metallernas och legeringarnas mekaniska egenskaper ur deras struktur. Den fysikaliska metallurgin är mera en empirisk konst än en vetenskap.

Vidare kunna nämnas konsthartser och med konstgummi besläktde ämnen. Dessa komma mer och mer i bruk, och vi behöva känna deras strukturer för att kunna bygga upp polymeriserade kroppar med önskade egenskaper.

Ehuru de allmänna dragen hos silikatstrukturerna äro kända, finnas dock en hel del ämnen (sannolikt med glimmerliknande struktur), som bilda en stor del av myllan och som spela en stor roll i jordbrukskemin. Att undersöka dessa ämnen är en förnämlig framtidsuppgift.

Till slut må nämnas, att vi icke kunna nöja oss med de insikter, som nåtts inom analysen av organiska förbindelser. Vad som hittills gjorts är till största delen endast en bekräftelse av den organiska kemins formler. Vi måste våga oss på att analysera ännu mera komplicerade molekyler, vilkas natur ännu så länge är obekant. Det finnes här obegränsade arbetsmöjligheter.»

Om approximation av en funktion i ett oändligt intervall.

Av SVEN H. HILDING.

Om $F(x)$ är en reell funktion sådan att $\int_0^1 (F(x))^2 dx$ existerar, kan man enligt en känd sats av Weierstrass till varje positivt ε finna ett polynom $P(x)$, så beskaffat att $\int_0^1 [F(x) - P(x)]^2 dx < \varepsilon$. Motsvarande approximationsegenskap hos polynom gäller naturligtvis i varje ändligt intervall men inte i något oändligt, emedan $\int_0^\infty x^n dx$ ej existerar. Däremot gäller följande sats:

Om $G(x)$ är en reell funktion av x i intervallet $(0, \infty)$, sådan att $\int_0^\infty (G(x))^2 dx$ existerar, kan man till varje $\varepsilon > 0$ finna ett polynom $P(x)$, så att

$$\int_0^\infty [G(x) - e^{-x} \cdot P(x)]^2 dx < \varepsilon. \qquad \text{(A)}$$

Avsikten med denna uppsats är att ge ett elementärt och, så vitt jag vet, nytt bevis för (A).

Till att börja med kan man visa följande sats:

Till varje positivt helt tal k och varje positivt ε_k finnes ett polynom P_k, så beskaffat att

$$\int_0^1 \left[y^{k-1} - P_k\left(\ln \frac{1}{y}\right)\right]^2 dy < \varepsilon_k. \qquad \text{(B)}$$

(Index k på P_k har naturligtvis ingenting att göra med gradtalet hos polynomet.)

För korthets skull införes beteckningen $\ln \frac{1}{y} = z$. Man kan tydligen ersätta varje funktion z^n i polynomet $P_k(z)$ med ett polynom av gradtalet n, $p_n(z)$, ty $P_k(z)$ övergår ju genom denna

substitution endast i ett annat polynom av samma gradtal. Med beteckningen $u_n(y) = p_n(z)$ antar integralen i (B) då formen

$$J_k(N) = \int_0^1 \left(y^{k-1} - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\ln \frac{1}{y}\right)^n\right)^2 dy = \int_0^1 \left[y^{k-1} - \sum_{n=0}^{N} c_n p_n(z)\right]^2 dy =$$

$$= \int_0^1 \left[y^{k-1} - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(y)\right]^2 dy. \qquad (1)$$

(B) är tydligen bevisad, om man kan välja c_n och $p_n(z)$ så, att $\lim_{N\to\infty} J_k(N) = 0$. I fallet $k = 1$ får man omedelbart $J_k(N) = 0$, om $P_1 = 1$, varför man kan förutsätta $k \geqq 2$.

Väljer man polynomen $p_n(z)$ på följande sätt (det s. k. ortogonaliseringsförfarandet)

$$p_0(z) = 1, \quad p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{D_n \cdot D_{n-1}}} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}$$

där $a_{rs} = \int_0^1 z^{r+s} dy$

och

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

får man

$$\int_0^1 u_r(y) \cdot u_s(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{om } r \neq s \\ 1 & \text{om } r = s \end{cases} \qquad (2)$$

ty

$$\int_0^1 u_r(y) \cdot u_s(y) dy = \int_0^1 p_r(z) \cdot p_s(z) dy,$$

och för varje $z^n (n < s)$, som man multiplicerar in i $p_s(z)$, får man efter integrationen två rader lika i determinanten, varför i fallet $r = s$ efter integrationen endast återstår

$$(D_s D_{s-1})^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 z^s D_{s-1} \cdot p_s(z) dy = \int_0^1 \frac{1}{D_s} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0s} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ - & - & - & \\ a_{s-1,0} & a_{s-1,1} & \dots & a_{s-1,s} \\ z^{s+0} & z^{s+1} & \dots & z^{s+s} \end{vmatrix} dy = 1.$$

Man får vidare $a_{rs} = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{r+s} dy = \int_0^\infty w^{r+s} e^{-w} dw = (r+s)!$

Alltså är

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1! & 2! & \dots & n! \\ 1! & 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ 2! & 3! & 4! & \dots & (n+2)! \\ - & - & - & & \\ n! & (n+1)! & \dots & & (2n)! \end{vmatrix}$$

I D_n kan man bryta ut alla fakulteterna i första kolonnen och första raden och får då med hänsyn till formeln $\frac{(r+s)!}{r!\,s!} = \binom{r+s}{r}$

$$\frac{D_n}{(2!\,3!\,\dots\,n!)^2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n+1}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+2}{2} \\ - & - & - & & \\ 1 & \binom{n+1}{n} & \binom{n+2}{n} & \dots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix} = D'_n.$$

För att beräkna D'_n minskar man den $(n+1)$:sta kolonnen med den n:te, den n:te med den $(n-1)$:sta osv. t. o. m. den andra med den första, därefter på nytt den $(n+1)$:sta med den n:te, den n:te med $(n-1)$:sta osv. men nu t. o. m. den tredje med den andra, därefter på samma sätt med varje gång en kolonn mindre i operationen ända till den $(n+1)$:sta med den n:te. Med hänsyn till formeln $\binom{n+1}{m}\binom{n}{m} = \binom{n}{m-1}$ förvandlas D'_n på detta sätt till en determinant med idel ettor i huvuddiagonalen och enbart nollor ovanför denna. Alltså är $D'_n = 1$ och $D_n = (2!\,3!\,\dots\,n!)^2$. Emedan

$$\int_0^1 y^{k-1} \left(\ln \frac{1}{y}\right)^n dy = \int_0^\infty e^{-kw} w^n dw = \frac{n!}{k^{n+1}}$$

får man med samma behandling av determinanten i $p_n(z)$

$$\int_0^1 y^{k-1} p_n\left(\ln \frac{1}{y}\right) dy = \frac{2!\,3!\dots(n-1)!\,2!\,3!\dots n!}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)^n =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)^n; \qquad (3)$$

(1) och (2) ge nu

$$J_k(N) = \int_0^1 y^{2k-2}dy + \sum_{n=0}^{N} c_n^2 - 2\sum_{n=0}^{N} c_n \int_0^1 y^{k-1}u_n(y)dy.$$

Väljer man här (det vanliga Fourierkoefficientförfarandet)

$$c_n = \int_0^1 y^{k-1}u_n(y)dy,$$

får man med hänsyn till (3)

$$J_k(N) = \int_0^1 y^{2k-2}dy - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{k}-1\right)^{2n}.$$

Emedan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{2n} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{k^2}{2k-1},$$

är $\lim_{N\to\infty} J_k(N) = 0$ och (B) är bevisad.

Variabelbytet $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{y}$ i integralen i (A) ger

$$\int_0^{\infty}\left[G(x) - e^{-x}P(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[g(y) - P_0\left(\ln\frac{1}{y}\right)\right]^2 dy,$$

där $P_0(x) = P\left(\frac{x}{2}\right)$, $g(y) = y^{-\frac{1}{2}}G\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{y}\right)$ och $\int_0^1 (g(y))^2 dy$ existerar.

För att bevisa (A) behöver man nu endast två gånger tillämpa Minkowskis olikhet

$$\left[\int_0^1 (H(x)+K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_0^1 (H(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^1 (K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Om man väljer $P_0\left(\ln\frac{1}{y}\right) = \sum_{k=0}^{M} P_{k+1}\left(\ln\frac{1}{y}\right)$, erhålles

$$\left[\int_0^1\left(g(y) - P_0\left(\ln\frac{1}{y}\right)\right)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_0^1\left(g(y) - \sum_{k=0}^{M} h_k y^k\right)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left[\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{M} h_k y^k - P_0\left(\ln\frac{1}{y}\right)\right)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_0^1\left(g(y) - \sum_{k=0}^{M} h_k y^k\right)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{k=0}^{M}\left[\int_0^1\left(h_k y^k - P_{k+1}\left(\ln\frac{1}{y}\right)\right)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Enligt den förut nämnda satsen av Weierstrass kan man välja M och $h_0, h_1, \ldots h_M$ så, att den första termen i högra ledet är $< \varepsilon$, och med $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ är enligt (B) även den resterande summan $< \varepsilon$. Polynomet P_0 är summan av polynomen $P_1, P_2, \ldots P_{M+1}$, och därmed är (A) bevisad.

För de läsare som ej äro förtrogna med Minkowskis olikhet gives till sist följande enkla härledning av den.

$$0 \leqq \int_0^1 \left[f(x) - g(x) \cdot \frac{\int_0^1 f(y)g(y)dy}{\int_0^1 (g(y))^2 dy} \right]^2 dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx + \frac{\left[\int_0^1 f(y)g(y)dy\right]^2}{\int_0^1 (g(y))^2 dy} -$$

$$- 2 \cdot \frac{\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx\right]^2}{\int_0^1 (g(y))^2 dy}$$

ger Schwarz' olikhet

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leqq \left[\int_0^1 (f(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (g(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Med hjälp härav får man

$$\int_0^1 \left[H(x) + K(x)\right]^2 dx = \int_0^1 H(x)\left[H(x) + K(x)\right]dx + \int_0^1 K(x)\left[H(x) + K(x)\right]dx \leqq$$

$$\leqq \left[\int_0^1 (H(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (H(x) + K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left[\int_0^1 (K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (H(x) + K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

varur man genom division med $\left[\int_0^1 (H(x) + K(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$ får Minkowskis olikhet.

Skruvlinjer.

Av CARL BODLUND.

Med skruvlinje eller skruv avses här en rymdkurva — den kan tänkas vara upplindad på en rotationsyta kring z-axeln — vars stigning $\frac{dz}{ds}$ eller riktningscosinus beträffande z-axeln är konstant. Saken kan även uttryckas så, att vinkeln θ mellan kurvan och xy-planet är konstant. Om kurvan projiceras i xy-planet och projektionens båglängd betecknas med σ, definieras alltså skruvlinjen av

$$\frac{dz}{d\sigma} = \operatorname{tg}\theta = k. \tag{1}$$

Härav erhålles

$$z = z_0 + k\sigma. \tag{1 a).}$$

Om tangenten i en punkt på skruven projiceras ned i planet $z = z_0$, blir subtangenten $= \frac{z - z_0}{k}$, och detta är enligt (1 a) projektionskurvans båglängd σ, räknat från skruvens skärningspunkt med planet. Orten för tangenternas skärningspunkter med detta plan är således en evolvent till projektionskurvan. Låter man z_0 variera, får man samtliga evolventer. Evolventens ekvationer bli

$$x = x_1 - \frac{dx}{dz} \cdot z_1; \quad y = y_1 - \frac{dy}{dz} \cdot z_1. \tag{2}$$

I det följande angivas skruvlinjer på rotationsytor av andra graden och därjämte de skruvlinjer, vilkas projektioner på xy-planet äro Arkimedes' spiral och hyperboliska spiralen. Vi utgå därvid från projektionskurvan i xy-planet, vilken må ha ekvationerna

$$x = \varphi(t); \; y = \psi(t),$$

varav

$$r^2 = \varphi^2(t) + \psi^2(t). \tag{3}$$

Från dessa härleda vi uttryck för z enligt (1 a), då vi få

$$z = \chi(t). \tag{4}$$

Genom elimination av t erhålles till sist ekvationen för rotationsytan (ekvationen för meridiankurvan).

I. *Skruv på en cylinder.* Projektionskurva är cirkeln

$$x = a\cos t; \qquad y = a\sin t; \qquad [r = a]$$
$$dx = -a\sin t\,dt; \qquad dy = a\cos t\,dt.$$

Enligt (1) erhålles $dz = kd\sigma = akdt; \qquad z = akt.$

Rotationsyta är cylindern

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

När $x_1 = a\cos t$, $y_1 = a\sin t$ och $z_1 = akt$, är enligt (2) cirkelns evolvent

$$x = a(\cos t + t\sin t); \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

II. *Skruv på en kon.* Projektionskurva är logaritmiska spiralen

$$x = ae^{mt}\cos t; \qquad y = ae^{mt}\sin t; \qquad [r = ae^{mt}]$$
$$dx = ae^{mt}(m\cos t - \sin t)\,dt; \quad dy = ae^{mt}(m\sin t + \cos t)\,dt.$$

Enligt (1) erhålles

$$dz = kd\sigma = ak\sqrt{1+m^2}\,e^{mt}dt; \qquad z = ak\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{mt} - 1).$$

Rotationsyta är konen

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{k\sqrt{1+m^2}}\cdot z + a\right)^2.$$

För $t = 0$ är $x = a$, $y = 0$ och $z = 0$. Konen skär xy-planet i cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$.

Logaritmiska spiralens evolvent är enligt (2)

$$x = \frac{a}{m}[m\cos t + (e^{mt} - 1)\sin t]; \quad y = \frac{a}{m}[m\sin t - (e^{mt} - 1)\cos t].$$

III. *Skruv på en paraboloid.* Projektionskurva är cirkelevolventen

$$x = a(\cos t + t\sin t); \qquad y = a(\sin t - t\cos t); \quad [r = a\sqrt{1+t^2}]$$
$$dx = at\cos t\,dt; \qquad dy = at\sin t\,dt;$$
$$dz = akt\,dt; \qquad z = \frac{1}{2}akt^2.$$

Rotationsyta är paraboloiden

$$x^2 + y^2 = \frac{2a}{k}z + a^2.$$

För $t = 0$ är $x = a$, $y = 0$ och $z = 0$. Paraboloiden skär xy-planet i cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ eller den cirkel, vars evolent är projektionskurvan. Då tecknet för z är oberoende av tecknet för t,

följer att skruven existerar blott på den ena sidan om xy-planet och börjar i punkten $(a;\ 0;\ 0)$. Derivatan $\frac{dz}{dr} = k\sqrt{1+t^2}$ ger stigningen för ytans meridiankurva. Denna derivatas värde för $t=0$ är k. Alltså tangeras meridiankurvan av skruven i denna punkt men avböjer sedan på grund av meridiankurvans allt brantare stigning. Liknande förhållande gäller för efterföljande skruvar.

Evolventens evolvent är enligt (2)

$$x = a(\cos t + t\sin t - \frac{1}{2}t^2\cos t);\quad y = a(\sin t - t\cos t - \frac{1}{2}t^2\sin t).$$

IV. *Skruv på en hyperboloid.* Projektionskurva är hypocykloiden

$$x = (R-a)\cos t + a\cos\frac{R-a}{a}t;\quad y = (R-a)\sin t - a\sin\frac{R-a}{a}t.$$

Här är R den fasta cirkelns radie och a den på innersidan av denna rullande cirkelns radie.

$$x^2+y^2 = (R-a)^2 + a^2 + 2a(R-a)\cos\frac{R}{a}t;$$

$$r^2 = (R-2a)^2 + 4a(R-a)\cos^2\frac{R}{2a}t.$$

$$dx = (R-a)\left(-\sin t - \sin\frac{R-a}{a}t\right)dt;$$

$$dy = (R-a)\left(\cos t - \cos\frac{R-a}{a}t\right)dt;$$

$$dz = 2k(R-a)\sin\frac{R}{2a}t\,.\,dt;\quad z = -k\cdot\frac{4a(R-a)}{R}\cos\frac{R}{2a}t.$$

Fig. 1.

Rotationsyta är den enmantlade hyperboloiden

$$x^2+y^2-\frac{R^2}{4ak^2(R-a)}\cdot z^2 = (R-2a)^2,\qquad (R>a)$$

eller, om man inför $R_0 = R-2a$ och sätter $x^2+y^2=r^2$,

$$r^2-\frac{R^2}{k^2(R^2-R_0^2)}\cdot z^2 = R_0^2.\qquad (R>R_0)$$

För $\frac{R}{2a}t = \frac{\pi}{2}$ är $z=0$, och man får i xy-planet ekvatorcirkeln $x^2+y^2=R_0^2$. Nedanför och ovanför denna begränsas hyperboloiden av ändcirklarna $x^2+y^2=R^2$ för $\frac{R}{2a}t=0$ och för $\frac{R}{2a}t=\pi$. I punkter på ändcirklarna tangerar skruven meridiankurvan. Skruven är ändlig, men om man staplar hyperboloid på hyperboloid och på varje lägger endast en båge av hypocykloiden, kan den göras hur lång som helst (fig. 1)).

Om man t. ex. tager $R = 4a$, är

$$x = a\,(3\cos t + \cos 3t); \qquad y = a\,(3\sin t - \sin 3t).$$

Projektionskurvan är en asteroid, och hyperboloiden är

$$3(x^2 + y^2) - \frac{4}{k^2} z^2 = 12a^2$$

med ekvatorcirkeln $x^2 + y^2 = 4a^2$ och ändcirklarna $x^2 + y^2 = 16a^2$. Man har $z = -3ak\cos 2t$ (fig. 1).

Är $R = 2a$, blir projektionskurvan en rät linje (diameter i den fasta cirkeln) med ekvationerna $x = 2a\cos t$ och $y = 0$. Man får $z = 2ak\cos t$. Hyperboloiden blir konen

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{k^2} z^2 = 0,$$

ekvatorcirkeln en punkt och ändcirklarna $x^2 + y^2 = 4a^2$.

V. *Skruv på en ellipsoid.* Projektionskurva är epicykloiden

$$x = (R + a)\cos t - a\cos\frac{R + a}{a} t; \quad y = (R + a)\sin t - a\sin\frac{R + a}{a} t,$$

där R är den fasta cirkelns radie och a den på yttersidan av denna rullande cirkelns radie.

$$x^2 + y^2 = (R + a)^2 + a^2 - 2a(R + a)\cos\frac{R}{a} t;$$

$$r^2 = (R + 2a)^2 - 4a(R + a)\cos^2\frac{R}{2a} t.$$

$$dx = (R + a)\left(-\sin t + \sin\frac{R + a}{a} t\right) dt;$$

$$dy = (R + a)\left(\cos t - \cos\frac{R + a}{a} t\right) dt;$$

$$dz = 2k(R + a)\sin\frac{R}{2a} t\, dt; \qquad z = -k \cdot \frac{4a(R + a)}{R}\cos\frac{R}{2a} t.$$

Rotationsyta är ellipsoiden

$$x^2 + y^2 + \frac{R^2}{4ak(R + a)} \cdot z^2 = (R + 2a)^2,$$

eller, om man inför $R_0 = R + 2a$ och sätter $x^2 + y^2 = r^2$,

$$r^2 + \frac{R^2}{k^2(R_0^2 - R^2)} \cdot z^2 = R_0^2. \qquad (R_0 > R)$$

För $\frac{R}{2a} t = \frac{\pi}{2}$ är $z = 0$, och man får i xy-planet ekvatorcirkeln $x^2 + y^2 = R_0^2$. På ömse sidor om denna begränsas ellipsoiden av

ändcirklarna $x^2 + y^2 = R^2$ för $\frac{R}{2a}\, t = 0$ och $\frac{R}{2a}\, t = \pi$. I punkter på ändcirklarna tangerar skruven meridiankurvan.

Ellipsoiden är en sfär, om koefficienten för z^2 är 1, d. v. s. om man tager

$$k = \frac{R}{2\sqrt{a(R+a)}}.$$

För t. ex. $R = a$ få vi cardioiden

$$x = a(2\cos t - \cos 2t); \qquad y = a(2\sin t - \sin 2t);$$

på ellipsoiden

$$8(x^2 + y^2) + \frac{1}{k^2} z^2 = 72a^2,$$

och $z = -8ak\cos\frac{t}{2}$.

Fig. 2.

För $R = 2a$ få vi »tvåvingen»

$$x = a(3\cos t - \cos 3t); \qquad y = a(3\sin t - \sin 3t),$$

som för $k = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right)$ ligger på sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16a^2.$$

$(z = -2a\sqrt{3}\cos t)$ (fig. 2).

VI. *Arkimedes' skruv.* Projektionskurva är Arkimedes' spiral

$$x = at\cos t; \qquad y = at\sin t. \qquad [r = at]$$

$$dx = a(\cos t - t\sin t)\,dt; \qquad dy = a(\sin t + t\cos t)\,dt;$$

$$dz = ak\sqrt{1+t^2}\,dt; \qquad z = \frac{1}{2}ak[t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})].$$

Rotationsytans form framgår av uttrycket för z och av $r = at$. Man har $\frac{dz}{dr} = k\sqrt{1+t^2}$, som ger stigningen för ytans meridiankurva. I origo är $\frac{dz}{dr} = k$.

VII. *Hyperboliska skruven.* Projektionskurva är hyperboliska spiralen

$$x = \frac{a}{t}\cos t; \qquad y = \frac{a}{t}\sin t. \qquad \left[r = \frac{a}{t}\right]$$

$$dx = a\left(-\frac{1}{t^2}\cos t - \frac{1}{t}\sin t\right)dt; \qquad dy = a\left(-\frac{1}{t^2}\sin t + \frac{1}{t}\cos t\right)dt;$$

$$dz = ak\cdot\frac{1}{t^2}\sqrt{1+t^2}\,dt; \qquad z = ak\left[-\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})\right].$$

Rotationsytans form (fig. 3) framgår av uttrycket för z och av $r = \frac{a}{t}$. Man har $\frac{dz}{dr} = -k\sqrt{1+t^2}$, som ger stigningen för ytans meridiankurva. Ytan har en asymptot, z-axeln.

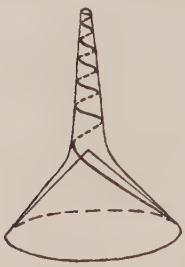


Fig. 3.

När t går mot 0, går z mot $-\infty$. Man får

$$\lim_{t=0}\left(z+\frac{ak}{t}\right)=\lim_{t=0} ak\left[\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}+\right.$$
$$\left.+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]=0.$$

Meridiankurvan har således för negativa z-värden en asymptot

$$z = -kr,$$

och rotationsytan har asymptotkonen

$$k^2(x^2+y^2)=z^2.$$

Apparat för upptagande av ångtryckskurvan för eter.

Av **GÖSTA W. FUNKE.**

De vanligen använda apparaterna för upptagande av eterns ångtryckskurva ha den nackdelen, att den kran, genom vilken etern införes, lätt blir otät. Hos den i figuren återgivna apparaten är denna nackdel eliminerad och den har ytterligare en mycket väsentlig förtjänst. Har man nämligen en gång satt ihop den, så står den sedan alltid färdig till omedelbar användning, utan påfyllning av eter eller något annat förberedelsearbete.

Apparatens konstruktion och sammansättning. Apparaten består av ett cylinderformat glaskärl (höjd 9 cm, diameter 5 cm) med kvicksilver, tillslutet med en gummipropp (fig. 1). Proppen är genomborrad på tre ställen: i ett hål inpassas en cykelventil, genom de båda andra insättas två tjockväggiga glasrör (barometerrör). Det ena glasröret är ca 1,3 m långt, det andra ca 1 m. Ventilen har två koner (fig. 2), en vanlig med ventilgummi på samma sätt som för en cykelring samt en annan med ett pålött ansatsrör, som medelst en vakuumslang kan anslutas till en vattensug. Den sistnämnda ventilkonen är försedd med ett kort ventilgummi, som endast tjänstgör som packning, men som icke täcker över ventil-

kanalens mynning. Det hela är uppsatt i ett trästativ och bakom vartdera glasröret är anbragt en skala (millimetergraderat stålmåttband). De bada skalorna utgå från en gemensam nollnivå upptill på stativet (graderingen skall alltså ga uppifrån och nedåt). Denna

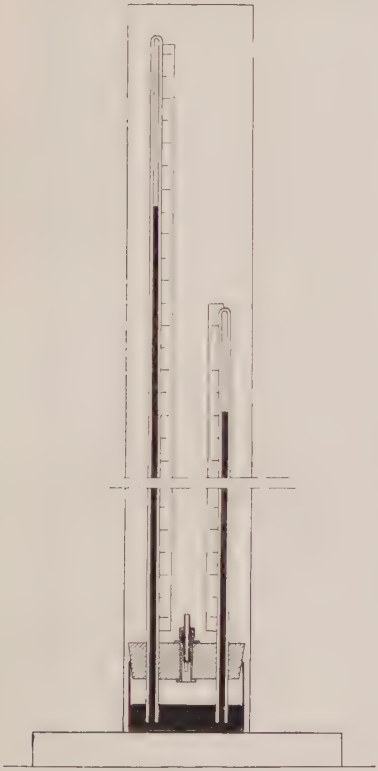


Fig. 1.

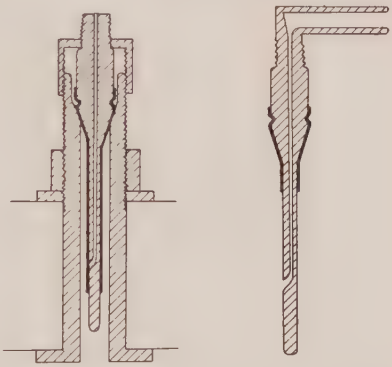


Fig. 2. T. v. cykelventilen, då övertryck råder i kvicksilverkammaren. T. h. konen i det fall, då undertryck råder i kvicksilverkammaren. I senare fallet tjänstgör ventilgummit endast som packning. Den i detta fall använda konen är försedd med ett pålött ansatsrör för anslutning till vakuumslang. Det snedstreckade i figuren är metall, det helt fyllda ventilgummi.

nollnivås läge är tämligen godtyckligt, men man bör välja det så, att det korta rörets övre (inre) ände slutar vid ett jämnt hundratal millimeter.

Apparaten sammansättes nu på följande sätt: 1. Cykelventilen sättes på sin plats, kvicksilver ifylles, glaskärlet och glasrören skjutas in i sina urborrningar, sedan de först fuktats med glycerin, så att de glida lätt. Gummiproppen sättes på sin plats. Rören skola *icke* doppa ned i kvicksilvret. Därefter utpumpas luften ovanför kvicksilvret och därmed också i rören noga med en oljepump.

2. Då evakueringen är färdig, nedskjutas glasrören i kvicksilvret och luft insläppes genom ventilen. Kvicksilvret stiger då upp i rören. Gummiproppen lyftes nu upp så mycket, att man med ett omböjt kapillärrör kan trycka in eter i det kortare av barometerrören (går mycket lätt att göra). Etermängden behöver icke avpassas på något sätt. Rörmynningarna måste givetvis hela tiden hållas under kvicksilverytan. 3. Gummiproppen skjutes nu åter ned i sitt normala läge i glaskärlet, och utrymmet ovanför kvicksilvret evakueras försiktigt, varvid överflödig eterånga bubblar ut genom kvicksilvret. Med detta förfarande är det synnerligen enkelt att få den lämpliga etermängden i röret. Apparaten är nu färdig att användas. Eftersom avspärrningen av etermängden ombesörjes av kvicksilverytan (icke av gummiproppen), erhålles förstklassig tätning. Det bör kanske anmärkas, att endast en obetydlig mängd kvicksilver behövs i apparaten.

Försökets utförande. Den inneslutna eterångan komprimeras genom att luft inpumpas i rummet ovanför glaskärlet med hjälp av en vanlig cykelpump. Kompressionen bör drivas så långt, att ett millimetertjockt lager av eter utfällts ovanpå kvicksilverytan i röret. Eterångans tryck fås nu direkt såsom skillnaden mellan kvicksilverytornas lägen i de båda barometerrören. Om skalornas nolläge valts som ovan angavs, fås eterångans volym synnerligen enkelt som skillnaden mellan ett avläst siffervärde och ett jämnt hundratal. Man sänker trycket etappvis genom att lätta på cykelventilen, tills trycket ovanför kvicksilvret nedgått till samma storlek som yttre lufttrycket. Den vanliga cykelventilkonen utbytes nu mot den med ansatsrör försedda (röret t. h. i fig. 2). Denna anslutes till en vattensug, och trycket sänkes ytterligare etappvis så långt som avläsningar kunna ske.

Om etermängden avpassats riktigt, kan man på detta sätt inom vida gränser variera eterångans volym och få med ett gott stycke såväl av kurvans horisontella del som av den hyperbelformade. Kurvan blir mycket vacker, och när man nästa år återkommer till detta kursmoment står apparaten klar till användning utan en minuts förberedelse.

Få måttenheter behandlas som algebraiska storheter?

Av ERIK INGELSTAM.

Denna enkla fråga är — liksom många liknande frågor som beröra grunderna för vår praxis — rätt så kvistig. Att man betraktar måttenheterna som algebraiska storheter, redan då man anger en hastighet i m/s eller ett tryck i kgf/cm², är obestridligt. Vid beräkningar, t. ex. inom elektricitetsläran, är det vanligt att räkna eller kontrollera på detta sätt: att $\Omega \cdot A^2$ ger effektenheten W, eller att kapacitansenheten F utfaller ur en räkning med sortkombinationen $\frac{As}{V}$ (amperesekunder : volt), osv. Några av mina läsare tillämpa säkerligen förfaringssättet sa flitigt och konsekvent, att den ställda frågan synes dem helt överflödig.

Så gör praktikern — ofta eller mera sällan, allteftersom han vant sig — men måhända med en liten aning av dåligt samvete, nämligen om han känner till, att tilltaget är en styggelse för hans kollega den strikte matematikern. Denne kan nämligen, stödd på sin egen insikt eller andras auktoritet, tala om, att algebran sysslar med rena tal och inte med sådana ur matematisk synpunkt dimmiga, hoc est odefinierade, ting som en kraft eller en strömstyrka. »Inte kan man dividera en längd med en tid!» — »Att säga att man multiplicerar ihop ett motstånd med en strömstyrka och får en spänning är ett talesätt utan mening, ett verkligt abrakadabra!» Närmare ansatt på den punkten, om han aldrig prövar en formel med hjälp av dess »dimensioner» på detta eller annat sätt, eller om ej den fysikaliska storhetsbestämningen är en tillräcklig motivering, medger den matematiskt striktare kollegan säkerligen, att det kan godtagas som ett räkneprov av en viss nytta, eller till och med att man kan tillåta sig behandla sorter *som om* de vore tal. Men han praktiserar detta lite i smyg och vägrar i varje fall och säkert med rätta att anse det som utan vidare matematiskt godtagbart.

Fysikern däremot vill beträda denna väg, och han vandrar den med större förtjusning i den mån han klarare överblickar sammanhangen och vill förenkla och därmed försköna dem för sig själv och sina elever. Han vill i formelbokstaven innefatta inte endast

det rena talet utan även dess karaktär, dess enhet. Han anser bland annat, att det är otillräckligt att lata en formel inom fysiken vara endast talalgebra, ty i så fall blir den endast en stympad räkneregel i stället for en stenografisk beskrivning av det fysikaliska sammanhanget, som den bör vara. Han vädjar kanske till sin matematiske vän att »uppfinna» en algebra för detta ändamål, om det inte finns någon. Det tillhör naturligtvis inte de större uppgifterna, men resultatet skall tacksamt anammas som stöd för en del inte oviktiga reformer. Mera härom senare.

En sadan undersökning föreligger numera i en liten avhandling av schweizaren professor Max Landolt.[1] Det tycks vara framför allt arbetena[2] av Wallot, de fysikaliska enheternas store man, som inspirerat honom att ta upp fragorna till matematisk behandling. Han genomför, tydligen med metoderna ur den högre algebrans gruppteori, en analys, som fullt motiverar det räknande med enheter som redan antytts och vars praktiska sida jag något mera skall beröra. Däremot avstår jag av flera skäl från att söka referera den teoretiska delen, trots att den innehåller väsentligheterna for den som vill förstå operationernas karaktär och till och med belyser elementarpedagogikens »innehålls-» och »delnings»-division. Den grundläggande ansatsen är

$$\text{storhet} = \text{mätetal} \cdot \text{enhet}, \tag{1}$$

alltså ett nytt slag av multiplikation, emellertid som sig bör med alla algebrans räkneregler gällande, t. ex.

$$\text{mätetal} = \frac{\text{storhet}}{\text{enhet}}, \tag{2}$$

och da utredningen väl är gjord med upprätthållen sträng skillnad mellan faktorernas respektive »intensiva» och »kvalitativa» karaktär, möter det inget hinder att blanda mätetal och enheter i algebraiska operationer, dvs. medtaga sorter vid insättning i formler, blanda dem med talfaktorerna, förkorta eller förlänga med sorterna, reducera sorter algebraiskt, allt fullt efter behag. Låt mig i all korthet diskutera några enligt min mening viktiga sådana operationer.

Storhetsekvationer. Med detta betraktelsesätt skall varje formelbokstav i ekvationen uppfattas som en storhet enligt (1). Ett mycket enkelt fall: I triangelytan $T = \frac{b \cdot h}{2}$ skall t. ex. insättas $b = 9$ cm,

[1] Max Landolt, Grösse — Masszahl und Einheit. Rascher Verlag Zürich 1943.

[2] Se t. ex. J. Wallot, Dimensionen, Einheiten, Massysteme, i Handbuch der Physik bd 2.

$h = 8$ cm, alltså i vartdera fallet en produkt av mätetalet och en heten, ej endast talen 9 och 8, och vi räkna efter algebrans regler

$$T = \frac{9 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = \frac{9 \cdot 8 \text{ cm} \cdot \text{cm}}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

Eller beräkningen av en genom värmeledning under fortfarighet, tillstånd transporterad värmemängd Q:

$$Q = \lambda \cdot \frac{t_1 - t_2}{d} \cdot A \cdot \tau, \text{ uträknat t. ex.}$$

$$Q = 0{,}08 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{cm} \cdot \text{s}} \cdot \frac{25^\circ}{2{,}4 \text{ cm}} \cdot 50 \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ s} = 1250 \text{ cal}.$$

I exempel som de valda äro de ingående enheterna samhöriga eller avstämda. Men i en *storhetsekvation* kan man även sätta in värden med icke samhöriga enheter, eftersom man fritt kan reducera enheter i själva formeln. Vi vilja beräkna effekten i hk eller i kW hos en transportanordning, som drager 600 kgf med hastigheten 10,8 km/h. Effekten beräknas ur ekvationen $P = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$ och i det numeriska exemplet

$$P = 600 \text{ kgf} \cdot 10{,}8 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 600 \text{ kgf} \cdot 10{,}8 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 600 \cdot 10{,}8 \cdot \frac{1000 \text{ kgfm}}{3600 \text{ s}}$$

$$= 600 \cdot 10{,}8 \cdot \frac{1000}{3600} \cdot \frac{1}{75} \text{ hk} \quad \underline{\underline{24 \text{ hk}}} = 24 \cdot 0{,}736 \text{ kW} \quad \underline{17{,}7 \text{ kW}}.$$

Här ha vi använt följande enhetsreduktioner eller *enhetsekvationer*:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$
$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$
$$75 \frac{\text{kgfm}}{\text{s}} = 1 \text{ hk}^1$$
$$1 \text{ hk} = 0{,}736 \text{ kW}.$$

Man skall observera, att reduktioner alltid böra skrivas i denna algebraiska form, varigenom de äro omedelbart nyttiga. Man substituerar helt enkelt sorten med hjälp av den lämpliga enhetsekvationen.

[1] I motsats till SÖ:s cirkulär användes beteckningen kgfm, eftersom endast denna är logiskt oantastlig på grund av relationen 1 kgfm = = 1 kgf · 1 m.

Mätetalsekvationer. Alternativet till detta sätt att räkna är att använda endast mätetalen och talalgebran, men i så fall kommer t. ex. beräkningen av det nyss sökta effekttalet i kW att beskrivas med formeln

$$P = \frac{F \cdot v}{367} \qquad (P \text{ i kW}, \quad F \text{ i kgf}, \quad v \text{ i km/h}).$$

Detta är en *mätetalsekvation,* användbar endast för de enheter som angivas i texten eller som här i en vid formeln tillfogad anteckning. De kunna vara nyttiga t. ex. om det gäller att rutinmässigt utföra en viss typ av beräkningar och förekomma därför ofta i tekniska handböcker. Men de äro begränsade till att vara snäva räkneregler, och pedagogiskt sett äro de vidriga i jämförelse med föregående klara metod.[1]

Enhetsreduktioner. Hur enhetsreduktioner böra tillgå, har redan berörts. Den algebraiska räkningen ersätter de gamla mer eller mindre väl formulerade reglerna om multiplikation eller division med reduktionsfaktorn alltefter enheternas storleksförhållanden. Särskilt besvärliga bruka ju fallen med sorter i nämnaren vara. Min egen matematiklärare i realskolan var djärv nog att genommotiverat och konsekvent lära ut algebraisk sortförvandling, en sak som jag haft stor nytta och glädje av. Hastighetsförvandlingar är kanske det i skolan först påträffade exemplet, men saken blir viktigare, ju mera komplicerade räkningarna bli. I min undervisning på högskole- och gymnasiestadiet har jag alltid sökt lära ut räkning med enheter i konsekvent metod, och eleverna synas verkligen ha haft föga besvär med behandlingen av enheterna. Allt kontrolleras ju automatiskt, och en reduktion inskränker sig till ett mycket enkelt räknehandgrepp.

Det är givet, att pedagogiken bör anpassas efter denna metod, om man principiellt accepterat den. På detaljernas klarhet beror ju det helas värde.[2] Men konsekvensen i storhetsekvationerna går

[1] Landolt föreslår i anslutning till Wallot i stället för dylika formler s. k. *avpassade storhetsekvationer,* t. ex. för detta fall

$$P = \frac{\dfrac{F}{\text{kgf}} \cdot \dfrac{v}{\text{km/h}}}{367} \text{ kW},$$

härledda ur den generella storhetsekvationen genom förlängning med sorter. Bråket i täljaren utgör enligt (2) mätetalet, men uttrycket är fortfarande en storhetsekvation, och ingen risk för förväxling av enheter föreligger.

[2] Redan i Elementa årg. *1,* s. 133, förekommer en metodisk uppsats av Ad. Meyers hand om dimensionsräkning vid elementarundervisningen.

lätt i blodet, och för min del har jag kommit att reagera emot icke matematiskt motiverade talfaktorer i fysikaliska formler. För att räkna ut värmeutvecklingen i en elektrisk strömbana vill jag t. ex. först beräkna energin i den elektriska enheten Ws: $W = R \cdot I^2 \cdot t$ och sedan reducera med 1 Ws = 0,24 cal i stället för att ge formeln $Q = 0{,}24\, R \cdot I^2 \cdot t$, för att nu nämna endast ett exempel, som läsaren måhända finner alltför trivialt.

Några omvärderingar. Helt allmänt konstaterar man, att kravet på riktiga och utsatta sorter på senare tid blivit alltmera beaktat, och detta särskilt i tekniskt betonad text. Man anger t. ex. ett varvtal ej som 1400 utan som 1400 r/min, ett svängningstal ej som 440 utan som 440 s^{-1} eller 440 p/s eller 440 hz. Specifika värmets enhet cal/g · grad utsättes osv.

Om man accepterar denna i sin konsekvens nya princip att räkna med storheter, är man benägen att se vissa hävdvunna beteckningar som reminiscenser från ett tidigare betraktelsesätt.

Det gäller till exempel den *mekaniska värmeekvivalenten*, definierad som det *antal* kgfm som motsvarar 1 kcal. Att 427 är ett av fysikens av alder fundamentala *tal* är obestridligt, men lika väl att det endast stämmer med dessa enheter. Reduktionsfaktorn mellan erg och cal har aldrig nått samma rang. Särskilt när den mekaniska värmeekvivalenten fått en egen formelbokstav i ekvationer, har den vållat en viss förvirring, förväxlats med sitt inverterade värde den *termiska arbetsekvivalenten* osv. Enligt min mening bör man i stället betrakta enhetsekvationen

$$1 \text{ kcal} = 427 \text{ kgfm}$$

som en helhet och avstå från att i en lång mening måla ut just vad talet 427 innebär. Matematikens koncisa språk i stället för prosans! Men vi böra ju gärna tala om, att mätetalet i denna ekvation av ålder kallats den mekaniska värmeekvivalenten.

Vida viktigare är frågan om *täthet — specifik vikt.* Vi ha alla fått lära oss, att specifika vikten är det *tal*, som anger ..., denna ingress lika i de två eller tre olika definitioner, som olika framställningar tillhandahålla. Den är ett *tal!* Och detta har fasthållits, icke endast där definitionen angivit den som förhållandet mellan två massor, utan även där den använts som kvoten mellan massa och volym, tydligen därför att ekvationen $s = \frac{m}{V}$ då uppfattats som mätetalsekvation.

Nu har man alltmera gått över till att låta denna angivelse innefatta sin enhet och benämna den *täthet.* Den definieras genom

storhetsekvationen $\varrho = \frac{m}{V}$ och får sin enhet normalt i g/cm³ eller kg/dm³ men kan även uttryckas i kg/m³, som t. ex. ångteknikerna företrädesvis göra. Att sorten här sättes ut är en nödvändig gärd åt den dimensionella riktigheten och medför alla de fördelar i form av räknekontroll och lätthet att reducera, som vi förut omtalat. Tekniska nomenklaturcentralens måttförteckning (TNC 1) upptager endast täthet, ej sp. vikt, och likaså Skolöverstyrelsens senaste förteckning. Men då böra också läroboks- och handboksförfattare draga konsekvenserna och klart räkna med tätheter. Den hittills gängse angivelsen sp. vikt kan sägas utgöra *täthetstalet,* dvs. det mätetal som ingår i storheten täthet, förutsatt att enheterna äro samhöriga.

Om huvudmeningen i dessa fragmentariska påpekanden kunnat bli någorlunda klar, framträder också deras syfte att fästa uppmärksamheten på de icke oviktiga pedagogiska detaljproblem, som här upprullas. Diskussioner vid provårsläroverken, gärna på grundval av Landolts bok, skulle säkert vara givande.

Teckenregler vid linsformeln.

Av **BIRGER GRUNDSTRÖM.**

För brytningen i en enkel, sfärisk yta gäller formeln

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_2-n_1}{r}, \qquad (1)$$

där n_1 och n_2 äro brytningsindices för ämnena omedelbart framför resp. omedelbart bakom den brytande ytan, a_1 och a_2 föremålets resp. bildens avstånd till linsytan och r linsytans radie. Begreppen fram- och baksida hos en linsyta fastställas entydigt med hjälp av ljusriktningen. Formeln skall användas i samband med följande teckenregler: a_1 är positiv, då föremålet ligger framför, och negativ, då det ligger bakom ytan; a_2 är positiv, då bilden ligger bakom ytan, och negativ, då den ligger framför; r är positiv, om ytan är konvex, då den betraktas i *ljusriktningen*, r är negativ, då ytan sedd i ljusriktningen är konkav.

För brytningen i en tunn lins, begränsad av två sfäriska ytor, användes ofta formeln

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\cdot\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right), \qquad (2)$$

där n_1 är omgivningens och n_2 linsmaterialets brytningsindex, a och b föremålets resp. bildens avstånd från linsen samt r_1 och r_2 linsytornas radier.

Vid formel 2 användas samma teckenregler som vid 1, tyvärr dock med ett undantag: ytornas radier tilldelas nu positiva tecken om ytorna äro konvexa, då de betraktas från *det omgivande mediet*. Denna inkonsekvens gör sig exempelvis gällande vid den bakre ytan i en bikonvex lins: enligt den första regeln skall radien här räknas negativ, enligt den andra regeln positiv. Genom att två teckenregler införas blir tydligen en radies tecken beroende av, om tillhörande yta behandlas såsom en isolerad brytande yta eller såsom ena sidan av en lins. Naturligtvis kan man nå fram till ett riktigt resultat genom att räkna på detta sätt, men nämnda teckenbyte har icke någon fysikalisk motsvarighet, alldenstund ytans

inverkan på strålgången är oberoende av, om den förekommer isolerad eller tillsamman med andra ytor. Tecknen böra vara entydigt definierade, och som lämpligaste alternativ framstår då den teckenregel, som användes vid ekv. 1. Denna regel kan lika bra användas för enkla ytor som för sammanställningen av två eller flera ytor.

Följande härledning av formeln för en tunn lins är enkel och allmängiltig. Vi göra här ingen som helst förutsättning angående linsytornas krökning utan skriva endast upp formlerna för brytningen i första och andra ytan:

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

$$\frac{n_2}{a'_1} + \frac{n_1}{a'_2} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}.$$

a_1, a_2 och r_1 äro föremålsavstånd, bildavstånd och radie hos den yta, som först träffas av ljuset, a'_1, a'_2 och r_2 äro motsvarande storheter för den andra ytan. Emedan linsen är tunn, gäller under alla förhållanden att $a_2 = -a'_1$. Exempel: är a_2 positiv, ligger bilden vid första ytan bakom denna yta och följaktligen även bakom den andra ytan. Denna bild utgör samtidigt föremål till den bakre ytan, alltså $a_2 = -a'_1$. Således är alltid

$$\frac{n_2}{a_2} + \frac{n_2}{a'_1} = 0.$$

Genom addition av de tre ekvationerna erhålles

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_1}{a'_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Införas beteckningarna $a_1 = a$ och $a'_2 = b$, erhålles linsformeln

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (3)$$

Observera minustecknet inom parentesen. Ekv. 3 begagnas med genomgående samma teckenregler som 1. Särskilt bör framhållas att r_1 är radien för den yta, som först träffas av ljuset och r_2 radien för den andra ytan.

Kolloidkemi.[1]

Av HERMAN RINDE.

I. Allmänna egenskaper och framställningsmetoder.

Såsom kolloidkemiens fader brukar man räkna Graham, som i Phil. Trans. 1861 publicerade sitt klassiska arbete om kolloider, men kolloida lösningar av olika slag voro kända långt dessförinnan. Som exempel härpå kan anföras Berzelius, vilken i sin lärobok i kemi 1834 säger om den gula lösning av arseniktrisulfid, som erhålles, då arseniktrioxidlösning behandlas med svavelväte, att den torde betraktas som en suspension av transparanta partiklar.

Graham införde den numera vanliga nomenklaturen inom kolloidkemin och indelar lösningarna i kristalloida och kolloida med hänsyn till deras diffusion och förmåga att passera semipermeabla membraner. Numera betraktar man icke i likhet med Graham de kristalloida eller kanske bättre uttryckt de lågmolekylära lösningarna och kolloiderna såsom artskilda utan anser, att det blott existerar en gradskillnad dem emellan.

I en kolloidal lösning äro partiklarna alltid elektriskt laddade på grund antingen av dissociation eller av adsorption av joner; partikeln tillsammans med sina adsorberade joner och molekyler brukar man kalla en »micell». Förlora partiklarna sin laddning, koagulerar solen. Koagulation kan astadkommas på flera olika sätt, t. ex. genom tillsats av elektrolyter, förändring av den kolloida lösningens pH-värde, ändring av koncentration eller temperatur m. m. De kolloida lösningarnas koncentration, uttryckt i antal partiklar per volymsenhet, är alltid liten i jämförelse med de lågmolekylära lösningarnas. Försöker man på ett eller annat sätt öka solens koncentration, finner man, att detta är möjligt i endast mycket begränsad omfattning, innan utfällning inträffar.

Om man skickar en ljusstråle genom en kolloidal lösning, kan man iakttaga ljusstrålens väg. Det av denna ljusstråle utsända ljuset, det s. k. Tyndalljuset, observeras genom ett mikroskop, uppställt vinkelrätt mot ljusstrålen och försett med ett objektiv för vattenimmersion. (Siedentopf och Zsigmondys ultramikroskop.) Under

[1] Föredrag för lärarkandidaterna i Stockholm v. t. 1944.

förutsättning att de kolloida partiklarna ej äro allt för små, synas i mikroskopet diskreta och i olika färger lysande punkter. Man iakttager härvid de böjningsfransar, som av det infallande ljuset alstras kring partikeln. I detta fall säges solen innehålla submikroskopiska partiklar (submikroner). Om man i en optiskt avgränsad volym av känd storlek genom partikelräkning bestämmer medelvärdet för det i denna uppträdande antalet partiklar samt känner solens koncentration, kan partikelstorleken beräknas. Då ultramikroskopet ej förmår upplösa Tyndalljuset i diskreta ljuspunkter, säges solen innehålla amikroskopiska partiklar (amikroner). För kolloida metallösningar ligger gränsen mellan amikroner och submikroner vid en partikeldiameter av cirka 10 mμ.

Karakteristiskt för de kolloida lösningarna är, att de alltid innehålla stora partiklar, men vill man exakt definiera, vad som menas med en kolloid, stöter man på svårigheter. I några läroböcker definieras en kolloidal lösning såsom en lösning, som innehåller partiklar med diametrar mellan 1 och 100 mμ, men många av de vanliga kolloida lösningarna innehålla säkert betydligt större partiklar, och någon övre gräns för partikelstorleken kan ej fastställas. Däremot har man mig veterligt aldrig kunnat framställa oorganiska kolloider med en mindre partikelstorlek än cirka 1 mμ, varför där en lucka synes förefinnas mellan de lågmolekylära och de kolloida lösningarna.

Partiklarna i en kolloidal lösning kunna antingen bestå av ett aggregat av molekyler, som äro olösliga i dispersionsmedlet, eller också av lösliga jättemolekyler. Endast i det senare fallet kan kolloiden vara monodispers, dvs. alla partiklar i lösningen äro lika stora. Soler, där partiklarna utgöras av molekylaggregat, äro alltid mer eller mindre polydispersa.

Det är icke möjligt att på den tid jag har till mitt förfogande ge en redogörelse för kolloidkemins olika grenar. Först och främst får jag utesluta de organiska kolloiderna, äggviteämnen, högmolekylära kolhydrater, ultravirus m. m., områden där betydande och intressanta undersökningar de sista två årtiondena utförts av Svedberg och Tiselius samt deras medarbetare vid Fysikalisk-Kemiska Inst. i Uppsala.[1] Jag får begränsa mig till att ge en översikt av de generella framställningsmetoderna för oorganiska kolloider, där dispersionsmedlet är en vätska, och till att visa, att kolloida lösningars fysikaliska egenskaper äro en funktion av partikelstorleken samt redogöra för, huru man i många fall kan bestämma denna utan tillhjälp av ultramikroskop eller ultracentrifug.

[1] Svedberg and Pedersen: The Ultracentrifuge. Oxford 1940.

Svedberg[1] indelar framställningsmetoderna för kollida lösningar i dispersionsmetoder och kondensationsmetoder. Vid dispersionsmetoderna pulvriseras större partiklar genom malning och under tillsats av lämpliga ämnen, tills partikelstorleken kommer inom det kolloida området. Ett exempel härpå är en metod för framställning av svavelkolloider. Ett gram svavelblomma och ett gram urinämne males tillsammans under cirka en kvart. Ett gram av denna blandning försättes med ett gram urinämne och males på nytt en kvart. Proceduren upprepas flera gånger, och blandningarna lösas i vatten. En serie svavelsoler med växande dispersitetsgrad erhålles därvid. Det har konstruerats särskilda kolloidkvarnar, där för tekniskt ändamål viktiga kolloider kunna framställas.

Talrikare och betydligt viktigare äro kondensationsmetoderna, där den dispersa fasen till en början har en mycket hög dispersitetsgrad, t. ex. tillföres i form av lösta molekyler eller såsom en gas, men sedan hastigt koagulerar. Då partiklarna kommit inom det kolloida området, avstannar av en eller annan anledning koagulationen, och en sol erhålles. Ett enkelt exempel på denna metod är framställning av mastixsoler, som erhållas, om man gjuter alkohollösningar av mastix i vatten. Perrin använde sig av på dylikt sätt framställda mastix- och gummiguttasoler vid sina klassiska och med Nobelpris belönade undersökningar över den Brownska rörelsen. Ett annat exempel på kondensationsmetoden är den elektriska kolloidförstoftningen. En ljusbåge eller gnista alstras mellan två metallelektroder nedsänkta i en vätska. På grund av den höga temperaturen utsprutas metallånga från elektroderna, kondenseras i den omgivande vätskan, koagulerar partiellt och övergår till en kolloid. Ett tredje exempel på denna metod är följande. Man inleder svavelväte i en utspädd lösning av ett salt av trevärd antimon. En orangeröd sol av antimontrisulfid erhålles, som kan renas och koncentreras genom dialys. Denna dialys kan lämpligen utföras i kollodiumsäckar, som framställas på följande sätt. Man löser kollodiumbomull i en blandning av lika delar alkohol och eter, så att en 4,5 %-ig kollodiumlösning erhålles. Denna hälles i en väl rengjord Erlenmeyerkolv och tömmes därefter försiktigt ur kolven, varvid denna hålles i rotation, så att en jämn kollodiumbeläggning erhålles på insidan av densamma. Då kollodiumhinnan torkat under fortsatt rotation av kolven, fylles kolven med destillerat vatten. Efter en stund har vattnet diffunderat genom kollodiumhinnan, som därvid lossnar från glaset, och en kollodiumsäck kan

[1] Svedberg: Colloid Chemistry. Wisconsin Lectures 1924.

dragas ut ur kolven. Ju längre kollodiumhinnan får torka på insidan av kolven, desto finare bli porerna i kollodiumsäcken. Vill man hava tjocka, täta kollodiumsäckar, slås kollodiumlösning flera gånger i kolven och uthälles, varvid hinnan får torka efter varje tillsats.

Med tillhjälp av en dylik kollodiumsäck kan en kolloidal lösning koncentreras på följande sätt. Säcken förses med en gummipropp, varigenom den längre skänkeln av en hävert passerar. Den kortare skänkeln av häverten är nedstucken i den kolloid, som skall koncentreras. Kollodiumsäcken och häverten fyllas med den kolloida lösningen. Vatten pressas ut genom porerna i säcken, och det bortrunna vattnet ersättes med kolloid, som strömmar till genom häverten. Proceduren kan fortsättas, tills solen börjar koagulera.

En dylik tät kollodiumsäck, som försetts med stigrör, fyllts med sockerlösning och nedsatts i destillerat vatten, lämpar sig även för demonstration av det osmotiska trycket. På en lektionstimme stiger nämligen vätskepelaren i stigröret flera decimeter.

II. Monodispersa guldsoler. Deras framställning och egenskaper.[1]

Alla de soler, som i det föregående omnämnts, äro mer eller mindre polydispersa. En kolloids säregenskaper äro emellertid en funktion av partiklarnas storlek och form, och det kan därför vara av ett visst intresse att undersöka, huru en sols fysikaliska egenskaper variera med partikelstorleken. Endast i ett fåtal fall är det möjligt att framställa något så när monodispersa soler av samma ämne men med olika partikelstorlek. De mest undersökta kolloiderna av denna typ äro guld och svavelkolloiderna. Guldkolloiderna ha varit föremål för ett stort antal undersökningar, varav de viktigaste utförts hos Zsigmondy i Göttingen och hos Svedberg i Uppsala.

Redan 1857 framställde och undersökte Faraday kolloida guldlösningar, undersökningar, som sålunda utförts och publicerats före Grahams klassiska arbete. Faraday framställde sina guldsoler genom reduktion av guldsaltlösningar med ferrosulfat, tennklorur eller socker, varvid blåa eller röda soler erhöllos. Han framställde även guldsoler genom reduktion av guldklorid med massiva stycken gul fosfor. Om man istället för fosforstycken använder lösningar av fosfor i kolsvavla, eter eller bättre en blandning av alkohol och eter, erhållas guldsoler av högsta kända dispersitetsgrad, vilka understundom kallas Faradaysoler.

[1] Zsigmondy-Thibssen: Das Kolloide Gold. Leipzig 1925.

Med utgångspunkt från en dylik Faradaysol kan man sedan framställa guldsoler enligt den av Zsigmondy utarbetade groddmetoden. Denna grundar sig därpå, att då guld utreduceras i en utspädd guldsaltlösning, guldet kommer att utfalla på i lösningen förefintliga partiklar. Om man därför till en Faradaysol eller en annan guldsol sätter ett lämpligt reduktionsmedel och därefter en utspädd lösning av guldklorvätesyra, kommer det utreducerade guldet att utfalla på redan i lösningen förefintliga partiklar, vilkas volym därigenom ökar. Partiklarna i den ursprungliga solen verka som groddar, vilka växa genom anlagring av det utreducerade guldet.

Om solerna antagas vara monodispersa och innehålla sfäriska partiklar med radien R, kan denna beräknas ur groddpartiklarnas radie r, vikten av utreducerat guld P och vikten av groddarna p. Om guldets täthet är ϱ g/cm³ och antalet groddar N, gäller:

$$p = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho N;$$

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho N - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho N;$$

$$p \cdot R^3 = (P + p) r^3. \qquad (1)$$

Om groddsolen och guldklorvätesyran ha samma koncentration, kan p och P i formeln helt enkelt betyda groddsolens och guldkloridens volymer. Guldklorvätesyrans koncentration får icke vara för stor, enär då spontan kärnbildning uppträder, d. v. s. det utreducerade guldet utfaller icke blott på groddarna utan nya kolloida guldpartiklar bildas, och solen blir polydispers. Reduktionen av guldkloriden sker lämpligen i svagt alkalisk lösning.

För framställning av guldsoler enligt groddmetoden har i Göttingen huvudsakligen formaldehyd använts som reduktionsmedel, under det att i Uppsala kemiskt ren perhydrol (30 %-ig vätesuperoxid) begagnats.

För att framställningen av guldkolloider enligt groddmetoden skall lyckas fordras ett synnerligen rent vatten. Ofta duger det destillerade vatten, som erhålles ur en god destillationsapparat, men vissa tider måste vattnet omdestilleras flera gånger för att bli användbart. Man kan pröva, om det destillerade vattnet kan begagnas för framställning av guldkolloider på följande sätt. Till 100 ml av en $5 \cdot 10^{-4}$ C guldkloridlösning sättes 10 droppar perhydrol. Om en tydlig utreduktion av guld ej inträffar förrän tidigast efter 10 minuter, är det destillerade vattnet, vari guldkloriden lösts, användbart för framställning av guldkolloider. Dessa böra

framställas och förvaras i kärl av alkalifattigt glas (Jena eller Pyrex), som rengjorts med kromsyra och ordentligt utångats.

Här nedan ges ett schema för framställning av en fullständig serie guldsoler med angivande av ungefärliga partikelradier. För soler H_5 — H_9 har partikelfördelningen bestämts experimentellt, och siffervärden och kurvor återfinnas i min inauguraldiss.[1] I nedanstående schema ha de experimentellt bestämda gränserna för partikelradierna i sol H_5 införts. Dessa ligga inom området 20—50 mμ med ett maximalt antal partiklar med radien 35 mμ. Med utgångspunkt från denna sol ha gränsvärdena för partiklarnas storlek i soler H_1 — H_4 och H_6 — H_9 beräknats enligt formel 1, och dessa siffror ha anförts inom parentes i schemat. Ett stort antal bestämningar av partikelfördelningen hos Faradaysoler visa, att dessa innehålla partiklar med 1,5 — 4 mμ radie, vilket stämmer väl överens med det teoretiskt beräknade värdet. För soler H_6 — H_9 ligga de experimentellt bestämda värdena ovan de teoretiskt beräknade, vilket kan bero på, att solen sakta spontant koagulerat och att partikelfördelningen ej kunnat bestämmas omedelbart efter solens framställning. Sol. H_1 har framställts genom reduktion av guldkloridlösningen med fosfor, som lösts i en blandning av lika delar alkohol och eter. Efter tillsats av fosforlösningen färgas guldklorvätesyran mörkt gul. Den upphettas raskt till kokning, varvid färgen slår om, och en ljust gulröd guldsol erhålles, som hastigt avkyles. I ultramikroskopet visar denna sol en svag Tyndallkägla och innehåller icke några submikroner, om reduktionen förlöpt tillfredsställande. I soler H_2—H_9 kan reduktionen utföras antingen med 10 droppar perhydrol eller med 4 ml av en formalinlösning, som man erhållit genom att späda 0,3 ml formaldehyd (Kahlbaum) med 100 ml vatten. I soler H_5—H_9 synas endast submikroner i ultramikroskopet. Försöker man framställa soler med större partiklar än sol H_9, inträffar lätt spontan kärnbildning, och en polydispers sol erhålles.

Guldsoler.

Au-lösning. (Lösning av guldklorvätesyra.) 10 ml $5 \cdot 10^{-3}$ C $HAuCl_4$, 2 ml 0,1 C K_2CO_3, 88 ml vatten.

Sol H_1 (1,3 — 3,5 mμ). 100 ml Au-lösning reduceras med fosforlösning. Om reduktionen förlöpt tillfredsställande, synes i ultramikroskopet svag Tyndallkägla men inga submikroner.

Sol H_2 (2,5 — 7 mμ). 70 ml Au-lösning. 10 ml H_1-sol. Red. Starkare Tyndallkägla. Inga submikroner.

[1] Rinde: Inauguraldiss. Upsala 1928.

Sol H_3 (5 – 13 mμ). 70 ml Au-lösning. 10 ml H_2-sol. Red. Amikroskopisk sol med submikroner synliga i ultramikroskopet.

Sol H_4 (10 — 25 mμ). 70 ml Au-lösning. 10 ml H_3-sol. Red. I ultramikroskopet synas submikroner och en svag ljuskägla av amikroner.

Sol H_5 (20 — 50 mμ). 70 ml Au-lösning. 10 ml H_4-sol. Red. Inga amikroner.

Sol H_6 (27 — 68 mμ). 60 ml Au-lösning. 40 ml H_5-sol. Red.

Sol H_7 (37 — 92 mμ). 60 ml Au-lösning. 40 ml H_6-sol. Red.

Sol H_8 (50 — 125 mμ). 60 ml Au-lösning. 40 ml H_7-sol. Red.

Sol H_9 (68 — 170 mμ). 60 ml Au-lösning. 40 ml H_8-sol. Red.

Minimipartikelstorleken i en guldsol kan bestämmas enligt följande metod. Man utväljer en sol, som sedimenterar lagom fort, och fyller den på ett väl rengjort provrör av Jenaglas, som försetts med en utvändigt pålimmad millimeterskala. Då solen vid sedimenteringen ytterst lätt störes av konvektionsströmmar, är det lämpligt att under sedimenteringen placera den i ett mörkt rum med konstant temperatur t. ex. ett mörkt, oeldat källarrum, eller nedföra sedimentationsröret i en glascylinder och stjälpa över detsamma en huv av papp för att utestänga ljuset. Vidare måste röret, där solen sedimenterar, vara slutet med en gummipropp, enär värmeförluster vid vattnets avdunstning orsaka konvektionsströmmar, som störa sedimentationen. Man mäter sedimentationshastigheten, d. v. s. den hastighet, med vilken gränsytan mellan sol och dispersionsmedel sjunker. Antag, att en sol innehåller partiklar med radien R cm, och att dessa sedimentera med en konstant hastighet av v cm/sek. På en dylik partikel verkar tyngdkraften P; om partikeln antages vara sfärisk, blir

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3(\varrho_p - \varrho_d)g,$$

där ϱ_p är partikelns och ϱ_d dispersionsmedlets täthet samt g acc. vid fritt fall. På grund av friktionen mellan partikeln och dispersionsmedlet verkar i rakt motsatt riktning en kraft P'; enligt Stokes lag är

$$P' = 6\pi\eta Rv,$$

där η är dispersionsmedlets viskositetskoefficient vid ifrågavarande temperatur. Då partikeln faller med konstant hastighet, blir $P = P'$, varur erhålles

$$R = \sqrt{\frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2(\varrho_p - \varrho_d)g}}. \qquad (2)$$

Ur det erhallna värdet på R kan groddsolens radie beräknas enligt formel 1.

Man kan enligt denna metod få ett approximativt värde på partikelstorleken i en mängd andra soler t. ex. alla metallsoler, arseniktrisulfid- och antimontrisulfidsoler m. fl., nämligen genom att låta partiklarna i dessa soler verka som groddar vid reduktionen av guldklorid. Man så att säga »förgyller» partiklarna, tills de bli så stora, att de sedimentera med mätbar hastighet. Villkoret för att denna metod skall vara användbar är, att den ursprungliga solen ej är alltför polydispers.

Antag, att r är radien och p vikten av groddarna samt ϱ_g tätheten hos det material varav groddarna bestå. R antages vara den »förgyllda» partikelns radie och P deras vikt samt ϱ_m medeltätheten hos den »förgyllda» partikeln. Antalet partiklar $= N$.

$$p = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_g N.$$

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_m N.$$

$$r = R \sqrt[3]{\frac{P \cdot \varrho_m}{P \cdot \varrho_g}}. \qquad 3$$

Medeltätheten för partiklarna kan i de flesta fall sättas approx. lika med tätheten för guld (ϱ_{Au}). Men om det är stor skillnad på tätheten hos guldet och det material, varav grodden består, kan man införa detta i räkningen, då partikelns volym är lika med summan av groddens volym och det utfällda guldets volym.

$$\varrho_m = \frac{\varrho_{Au}}{1 + \frac{p}{P}\left(\frac{\varrho_{Au}}{\varrho_g} - 1\right)}. \qquad 4$$

De enligt groddmetoden framställda guldsolerna äro röda, gulröda eller bruna till färgen allt efter partikelstorleken. Om man håller sig till det synliga ljuset, visa de finkornigaste guldsolerna ett mycket svagt Tyndalljus, men intensiteten hos detta växer till en början med stigande partikelstorlek hos solerna. Då partikelradien överskridit ett värde av cirka 50 mμ, avtager Tyndallljusets intensitet. Undersöker man den spektrala ljusfördelningen hos Tyndalljuset, finner man ett intensitetsmaximum i det rödgula området; detta ljusmaximum tilltager först men blir lägre och mera flackt vid stigande partikelstorlek. Ett liknande förhallande råder beträffande ljusabsorptionen. Denna har inom det syn-

liga spektralområdet ett absorptionsmaximum, som först ökar men sedan blir mera flackt och lägre, då partikelstorleken ökar. I genomsikt äro de finkornigaste solerna klart röda, men med växande partikelstorlek övergår deras färg i blått. I det ultravioletta området[1] avtager ljusabsorptionen med stigande partikelstorlek. Tyndalljuset[2] har ett kraftigt maximum inom området 270—320 mμ. Dess intensitet inom detta område ökar med partikelstorleken, tills partiklarna nått en radie av 50 mμ, men avtager därefter vid stigande partikelstorlek.

Guldsolerna äro synnerligen känsliga för elektrolyter och koagulera lätt, varvid färgen hos de röda solerna slår om till blå. Noggranna undersökningar ha utförts över guldsolernas koagulation, och de experimentella resultaten överensstämma väl med en av v. Smoluchowski utarbetad teori. Det är lätt att visa, att de lågdispersa solerna koagulera lättare vid elektrolyttillsats än de högdispersa, samt att metalljoner med högre valens koagulera solerna starkare än joner med lägre. Som exempel härpå kan nämnas, att för att koagulera 20 ml av en viss guldsol behövdes 2 ml av en 0,1 C NaCl-lösning, 3 ml av en 0,001 C $BaCl_2$-lösning och 3 ml av en 0,00001 C $AlCl_3$-lösning. Även likvärdiga joner koagulera guldsoler olika starkt, men de jonmängder, som i detta fall behövas för koagulationen, äro av samma storleksordning.

Tillsats av en del andra kolloider till en guldsol förhindrar dess koagulation. Dylika kolloider kallas skyddskolloider och utgöras av äggviteämnen, kolhydrater m. m. Sasom ett kvantitativt mått på dylika ämnens skyddsverkan har Zsigmondy infört det s. k. »guldtalet» (Goldzahl), varmed förstås den minsta mängd av skyddskolloiden, uttryckt i milligram, som förhindrar 10 ml av en viss guldkolloid att koagulera vid tillsats av 1 ml 10 %-ig koksaltlösning.

Elementära läroböcker i kemi upptaga vanligen kiselsyresoler som exempel på kolloider, ett enligt mitt förmenande olyckligt valt typexempel, då man om dessa soler vet, att de äro polydispersa och vid koagulation kontinuerligt övergå till geler. Avsikten med detta mitt föredrag har varit att fästa uppmärksamheten på det kolloida guldet, av vilket med lätthet approx. monodispersa soler kunna framställas, där partikelstorleken kan bestämmas utan tillhjälp av ultramikroskop eller ultracentrifug, och där solens fysikaliska egenskaper kunna visas vara funktioner av partikelstorleken.

[1] Rinde: Inauguraldiss. Upsala 1928.

[2] Rinde: Kolloid. Z. 1934.

Bokanmälningar.

Fredrik Ehrnst, *Satser och Problem.* Särtryck ur redogörelse för h. a. läroverket i Östersund 1943—44. Hübenettes bokhandel i distribution, Östersund 1944, 40 s., kr. 2:—.

Lektor Ehrnst har sammanställt ett antal elementargeometriska satser om trianglar och fyrhörningar samt fogat övningsuppgifter härtill.

Ur innehållet må anföras: Menelaos och Cevas satser, Eulers linje genom tre av en triangels centra (höjdernas, mittpunktsnormalernas och medianernas skärningspunkter), niopunktscirkeln genom höjdernas fotpunkter och sidornas mittpunkter, fotpunktstrianglar, isogonalt konjugerade punkter i en triangel, symmedianer i en triangel, satser om cirkelfyrhörningar, satser om läget av vissa av de till en triangel hörande centra för var och en av de deltrianglar, som kunna uttagas ur en fullständig fyrhörning respektive fyrsiding.

Arbetet framträder utan anspråk på att giva något väsentligt nytt, men sammanställningen kan vara av intresse för elever och lärare, då satserna omedelbart anknyta till gymnasiekursen. Många satser skulle kanske få sitt största intresse insatta i ett projektivgeometriskt sammanhang, men alla icke rent elementargeometriska synpunkter hava omsorgsfullt skjutits åtsidan. Det mesta av bevisföringen kan förstås på grundval av R I^3:s kurs. Elementa av analytisk geometri och trigonometri förutsättas endast i vissa avsnitt av framställningen.

Användes häftet för enskilt arbete, kan studiet påbörjas under sommaren före inträdet i det differentierade gymnasiet. Inga begrepp av ny och vansklig art möta eleven. Problemen lämpa sig därför väl för självstudier på ett tidigt stadium och ge en begåvad elev rika tillfällen att pröva sin geometriska fantasi och kombinationsförmåga. Väckes intresset, torde problem av denna art egga eleven till självständig intellektuell verksamhet långt mer än en kurs i integralräkning, som ofta väljes som enskilt arbete med hänsyn till framtida behov men gärna leder till ett tämligen schablonmässigt inlärande av metoder, vilka lämna eleven föga tillfälle att komma med egna påfund.

Elementargeometrien liksom den lägre talteorien är ett fruktbart fält för den fantasifulle amatören. Då elementargeometrien icke alls ingår i kursen för ämbetsexamen, borde häftet även kunna ge mången lärare anledning till ett roande studium. Matematik av detta slag studerar man av nöjeslystnad icke av hänsyn till dess omedelbara matnyttighet. Hur många ge sig nu tid till dylika nöjen?

Olof Stenström.

Martin Lien, *Övningsuppgifter i mekanik för tekniska läroverk.* Örebro 1943. Rekvireras från författaren, Rudbecksg. 42, Örebro, 40 s., kr. 1:—.

Boken innehåller 222 övningsuppgifter till följande delar av mekaniken: krafters sammansättning och uppdelning, tyngdpunkt, jämvikt med och utan friktion, enkla maskiner; hastighet och acceleration vid rätlinig rörelse, rotation, relativ rörelse, kaströrelse och plan rörelse; krafters verkan vid rätlinig rörelse, koniska pendeln; energi och effekt; stela kroppars rotation och rullning; svängningsrörelse; stöt.

Problemen synas mig vara väl valda och formulerade. De äro till större delen prövade vid skrivningar. Även ganska svåra problem förekomma. Att exempelvis oförberedd lösa exemplet 192 rätt på en provskrivning är en högskolemässig prestation.

Exempelsamlingen är ett värdefullt komplement till en lärobok av samme författare, jfr Elementa, årg. 26, s. 232, 1943.

O. H. Faxén.

E. S. Wessberg, *Mekanikproblem.* Gumperts bokhandel, Göteborg, 1944. 35 s., kr. 2:75; svar, 4 s., kr. 0:50.

Samlingen innehåller 50 goda övningsuppgifter på jämviktsproblem, hämtade ur tekniken: tång, kedjedrev, dävert, kranvåg, gripskopa m. m. Frågeställningen är enkel och naturlig. Vanligtvis bli lärare tvungna att göra alltför starka förenklingar eller overkliga frågeställningar i tentamensuppgifter för att få nya varianter av prov till genomgångna satser. I denna samling möta däremot konkreta problem i praktisk förenkling. Ett särskilt liv skänka de goda ritningarna till varje problem.

Otur är, att svaret just på första talet synes vara fel, eller också missförstår läsaren vad förf. avser med problemställningen.

O. H. Faxén.

Tentamensuppgifter i matematik för betyget B med lösningar och svar utgivna av Cotty Blom, Göran Kjellberg, Valter Schytt. Stencilerad upplaga. Stockholm 1943. 94 s., kr. 5: 50.

Exempelsamlingen omfattar uppgifter av alla de slag, som erfordras, med undantag av problem på analytisk geometri. Undantaget föranledes av att prof. F. Carlsons lärobok i geometri innehåller lämpliga uppgifter på detta område. — Lösningarna äro stundom endast korta anvisningar, men ofta mera utförliga (diskussioner och förklaringar). Tiden har ej medgivit mig att närmare studera dem, men det finns alla skäl att anta, att de äro vederhäftiga. — Trots det delvis otydliga trycket rekommenderas kompendiet härmed till de matematikstuderande. Det kan erhållas från Stockholms Högskolas matematiska bibliotek efter hänvändelse till någon av utgivarna Kjellberg eller Schytt.

Stig Comét.

T. Bjerge, *Lyslære.* Ejnar Munksgaard, København 1943, 148 s.

Boken utgör ett led i den serie läroböcker i fysik, som under de senare åren utarbetats för de studerande vid Danmarks tekniske Højskole och Hærens Officersskolers Specialklasser. Tidigare ha utkommit »Elektricitet og Magnetisme» (1941) av samme författare samt »Mekanisk fysik. Band I» (1941) av E. S. Johansen.

Innehållet, som närmast kan jämföras med 1-betygskursen i optik i vår kandidatexamen, grupperar sig kring följande huvudavsnitt: ljusmätning, geometrisk och fysikalisk optik, optiska instrument och slutligen ett avsnitt om ljus och energi.

Inledningsvis redogöres i korthet för de fotometriska grundbegreppen, vilka sedan flitigt användas inom olika delar av optiken, t. ex. vid studiet av ljusstyrkan hos strålknippen och vid bedömningen av optiska instrument.

Den geometriska optiken avslutas med en beskrivning av sfäriska och kromatiska avbildningsfel. De optiska instrumenten indelas i sådana, som alstra en objektiv bild av ett föremål, och de, som äro avsedda för subjektiv iakttagelse. I detta kapitel gives en beskrivning av optiska instrument, som är av stort praktiskt värde. Sålunda behandlas ingående begreppen synfält, förstoring, klarhet och upplösningsförmåga. Bländarnas betydelse diskuteras. Några sidor ägnas åt de i militärt avseende så viktiga avståndsmätarna.

Såsom avslutning finner man en kort men välskriven framställning av grunddragen i den Bohrska atomteorien, sambandet mellan energi, strålning och spektrum samt olika metoder för ljusalstring.

Värdet av en lärobok i optik beror i särskilt hög grad av bildmaterialet, och boken fyller i detta hänseende högt ställda krav. Den har genomgående erhållit ett i typografiskt hänseende vårdat utförande. Figurerna äro enkla och instruktiva. Önskvärt vore dock att flera figurer än vad som nu är fallet hade försetts med ljusriktningspilar.

Man kan alltså konstatera, att författaren inom den för boken fastställda ramen lyckats ge en både korrekt och medryckande framställning av optikens elementära grunder. Boken kan därför varmt rekommenderas.

Fysikalisk forskning har alltid intagit en rangställning inom danskt kulturliv. Detta förhållande gör sig inte minst gällande genom den rikhaltiga och värdefulla danska fysiklitteraturen. Man nöjer sig sålunda i Danmark icke med en lärobok i fysik utan man har utarbetat flera sådana för speciella ändamål: för tekniker, medicinare, militärer osv., medan det samtidigt inte finnes en enda större lärobok i ämnet på svenskt språk. Det är sannerligen hög tid att något göres åt detta missförhållande.

B. Grundström.

G. Gamow, *Mr. Tompkins i Drømmeland.* (Övers. av Sven Werner.) Gyldendal, Köpenhamn 1912, 95 s.

Den bekante ryske fysikern Gamow i Washington har skrivit »Mr. Tompkins in Wonderland» och tillägnat boken Lewis Carrol och Niels Bohr. Den amerikanska editionen är svåranskafflig under nuvarande förhållanden, men man torde fortfarande kunna erhålla den danska översättningen. Niels Bohr har försett denna med ett förord, ur vilket följande må anföras: »Den Fantasirigdom, der er Baggrunden for Gamows Opdagelser, er hos ham uadskilleligt forbundet med en sjælden Sans for Humor, der overalt, hvor han har virket, har været en rig Kilde til Inspiration. Det er netop denne Fantasi og Humor, der lyser ud af den foreliggende Bog, hvori Forfatteren — i Lighed med det Forbillede, som den engelske Matematiker Charles Doddson, under Pseudonymet Lewis Carrol, har skabt med sine berømte »Æventyr om Alice i Vidunderland» — med megen Finhed og menneskelig Forstaaelse benytter en Sammenstilling mellem Drømmenes og Dagliglivets Verden til at lette Indlevelsen i de nye saa fremmendartede Forestillinger.»

Bankbokhållaren Mr. Tompkins hör en professor föreläsa över relativitetsteori och kvantmekanik och drömmer efteråt, att han i professorns sällskap blir förflyttad till världar, där flera eller färre naturkonstanter äro av en helt annan storleksordning än i vårt universum.

Medan de vistas på en lilleputtplanet, där ljushastigheten endast är 30 m/sek, men tyngdaccelerationen en million gånger större än hos oss, händer det, att en meteorit slår anteckningsboken ur professorns hand. Men denne tar saken lugnt: »jeg venter min Bog tilbage i Løbet av en lille halv Time». Under det de båda herrarna vänta på att den improviserade månen skall fullborda sitt omlopp, roa de sig med att betrakta de mer eller mindre deformerade bilder av anteckningsboken och av dem själva, som visa sig ute i rymden till följd av ljusstrålarnas krökning i planetens starka gravitationsfält. — En annan gång hamnar Mr. T. i en stad, tillhörande en värld, som är helt lik vår egen jord utom att ljushastigheten är så liten som 4 m/sek. Alla fordon röra sig mycket sakta, och passagerarna synas för den på trottoaren stående Mr. T. vara tillplattade i rörelseriktningen. Han hoppar upp på en cykel men lyckas ej få någon fart; resultatet av en accelererande trampning blir bara, att gatukvarteren förefalla bli allt kortare.

En underlig historia var det också med biljardbollen, som var gjord av ett ämne, för vilket Plancks konstant råkade ha det enorma värdet 1 ergsec. När denna biljardboll lades i sin trekantiga träram, blevo härigenom dess lägeskoordinater tämligen väl bestämda, vilket resulterade i en betydlig obestämdhet beträffande dess hastighet. Träramen tycktes vara fylld av ett matt lysande elfenbensskimmer, och bollen for med stor hastighet av och an inne i ramen, tills den rätt vad det var, rann ut genom en av ramens sidoytor.

När Mr. T. sedermera kom med på en jaktfärd till en »kvantdjungel», där man överallt hade $h = 1$, fick han uppleva andra sensationer. Heisenbergs osäkerhetsrelation verkade på djungelns elefanter med deras stora massor inte mer än att man kunde tro dem vara långhåriga till följd av deras föga preciserade konturer. Annat var det med kvantmyggen, som var nästan omöjlig att lokalisera på grund av deras obetydliga massa.

När jägarna slutligen fingo se ett dussin gaseller komma utrusande på jämn front mellan bambustammarna i ett skogsbryn, brydde de sig inte om att skjuta, ty sannolikheten för träff var mycket ringa. Vilken figur skulle man väl skjuta på? I själva verket hade man blott att göra med ett enda djur, vilket, såsom vågmekaniken fordrar, tycktes uppföra sig alldeles som en ljusvåg, när den passerar ett transmissionsgitter.

Boken avslutas med tre små teoretiska kapitel, där några matematiska utredningar förekomma. Man måste beundra den elegans och den pedagogiska skicklighet, med vilken förf. även här förmår att behandla sitt svårtillgängliga ämne.

T. Edqvist.

R. W. Stott, *Electronic Theory and Chemical Reactions.* Longmans 1943. 112 s., kr. 7:20.

Arbetet — en av de få engelskspråkiga fackböcker som på senare år nått oss — behandlar i koncentrerad form elektronteoriens användning vid förklarandet av vissa lagbundenheter inom den oorganiska och framför allt inom den organiska kemien, syror, reagerande väteatomer, hydrolys, esterbildning, strukturen hos bensol och dess derivat samt hos andra aromatiska ämnen, lagbundenheter vid substitutioner i bensolringen ävensom användningen av isotoper vid utforskandet av reaktionsmekanismer. Rikhaltiga litteraturhänvisningar givas. Många partier äro av direkt intresse för gymnasiets kemilärare.

E. Nordefeldt.

Werner Heisenberg, *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft.* Vierte Auflage 1943. Verlag Hirzel, Leipzig. 95 s., kr. 5:15.

Den berömde nobelpristagaren publicerar i detta häfte sex föredrag, behandlande de sista årens växlingar i de exakta naturvetenskapernas grundprinciper, drag ur den fysikaliska naturförklaringens historia, principiella frågor inom modern fysik, den antika naturfilosofiens tänkesätt jämfört med nutidens, Goethes och Newtons färglära i belysning av modern fysik samt den naturvetenskapliga världsbildens enhet.

Avsikten är att ge bildad men ej fackkunnig publik en uppfattning om de märkliga situationer av naturfilosofisk art som nutida fysisk forskning ställes inför och som antyda möjligheten av en djupgående förändring av vår världsbild. För en filosofiskt intresserad fysiker är arbetet av intresse.

E. Nordefeldt.

Lennart Simonsson, *Vatten för tekniska ändamål.* Ångvärmeinstitutet, Ingenjörsvetenskapsakademien 1944, 42 s., kr. 2:—.

Den tilltagande industriella föroreningen av vattnet i sjöar och vattendrag samt ångpanneteknikens och livsmedelsindustriernas (öl, läskedrycker mm.) fordran på ett gott vatten gör analys, rening och kontroll härav till en viktig uppgift. Föreliggande publikation, utgörande särtryck ur årgången 1943 av tidskriften IVA, behandlar naturliga vatten, deras beståndsdelar, provtagning, rening, avhärdning, kontroll och analys samt är i första hand av intresse för driftledare och tekniker. De kemiska analysmetoderna äro av välgörande enkel art och gör häftet lämpligt även vid skolornas kemiundervisning.

E. Nordefeldt.

Anvisningar för bakteriologiska och fysikalisk-kemiska vattenundersökningar. Svenska Kommunal-Tekniska Föreningens Handlingar nr 6, år 1942, 110 s., kr. 4: 50.

På ett direkt och enkelt sätt beskrives hur bakteriologiska och fysikalisk-kemiska vattenanalyser göras och hur de behövliga reagenserna tillredas, varför några djupare kemiska kunskaper ej behövas för deras utförande. Boken lämpar sig därför att sätta i händerna på skolelever som önska specialisera sig på området, varvid dessa tack vare de noggranna direktiven mestadels kunna arbeta på egen hand.

E. Nordefeldt.

Paul Nylén, *Kemiska synpunkter på målningsmaterial.* Statens Hantverksinstitut, Skriftserie M 10. Stockholm 1943. 32 sid., 8 fig. Pris häft. kr. 1: 50.

— *Mjöl och bröd.* Samma skriftserie M 11. Stockholm 1943. 20 sid., 4 fig. Pris häft. kr. 1: —.

Det är endast det första av dessa små häften, som är av intresse för kemisten, men detta intresse är desto större. Man erhåller en i all sin korthet synnerligen värdefull översikt över ett område, som beröres i kemiundervisningen, men som den akademiske kemisten i allmänhet inte torde ha sysslat med. Ett par oriktigheter måste påtalas, ehuru de ej nämnvärt nedsätta arbetets värde. Den första, att schellack skulle vara av animaliskt ursprung och utgöra sekretet av en lus, som lever på vissa indiska träd. Det är i själva verket en avsöndring av dessa träds blad, orsakad av nämnda insekts styng. Vidare äro inte alla kopaler fossila; manila- och sydamerikanska kopaler erhållas av nu levande träd.

G. Starck.

Finsponga Bilder, Minnesskrift utgiven av Svenska Turbinfabriks Aktiebolaget Ljungström (STAL) till bolagets trettioårsjubileum 1943.

Intendent Torsten Althin vid Tekniska Museet har utarbetat och Nordisk Rotogravyr har tryckt denna lilla vackra skrift på 63 sidor, som icke föreligger i bokhandeln men som av STAL, Finspång, gratis sändes till intresserade. Minnesskriften ger ej blott en kortfattad industrihistoria kring orten, den ger även några vidare utblickar bl. a. på Sveriges järnhantering i äldre tider, på Louis de Geers och vallonernas insats och på betydelsen av intelligensindustrier i vårt land. Skriftens rika bildmaterial återger gamla vackra stick och teckningar, målningar och litografier, ävensom

nutida fotografier. De senare visa även STAL-turbiner och detaljer från sådana. Baserade som de äro på de höga hastigheternas princip kräva turbinerna största precision vid tillverkning och högsta kvalitet i material. Att vårt land kunnat möta alla sådana krav, bådar gott för framtiden.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

O. Snellman, *Some Measurements of Magnetic Double Refraction.* Uppsala 1944, 76 s. Disp. i Uppsala 24 maj 1944. Opponenter: docent O. Lamm och fil. lic. S. Claesson.

Avhandlingen innehåller en undersökning av Uppsala universitets elektromagnet samt några försök med densamma.

Elektromagneten har konstruerats av Dr Dreyfus, ASEA, i samarbete med den för ett par år sedan alltför hastigt bortgångne Dr Björnståhl vid Fysikalisk-Kemiska Institutionen.

Mätningar ha nu utförts med en precisionsmetod över de fält som erhålles vid de olika polskotyperna. De högsta fält man kan uppnå ligga omkring 70 000 oe vid en effektförbrukning av ungefär 140 kW. Luftgapsvolymen är emellertid då mycket liten (39 mm³). Vad som mest eftersträvas för våra försök är relativt stora men ändå starka, konstanta fält, och i detta avseende fyller magneten fordringarna. Avsikten är nämligen i första rummet att studera orienteringen av molekyler i magnetiska fält. Detta sker med dubbelbrytningsmetoder. Dubbelbrytningens beroende av fältet hos rena vätskor kan anges av den av Cotton-Mouton funna relationen

$$n_{11} - n_{\perp} = C \int_0^L H_{\perp}^2 dl.$$

$H_{\perp}$ är fältets styrka normalt mot ljusstrålens väg i mediet (L), och C är en materialkonstant, som kallas Cotton-Mouton konstanten. Vid Paris finnes en magnet byggd av franska vetenskapsakademien med tanke på samma slag av dubbelbrytningundersökningar, som vi här arbeta med. Denna, som väger ungefär 3 ggr så mycket som uppsalamagneten, ger dock ej ett lika gott värde på den optiska verkningsfaktorn, som uttrycket $\int H^2 dl$ benämnes.

För polskor med polytan 58 × 1 cm² och ett polavstånd på 1 cm

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

har uppsalamagneten ett värde på verkningsfaktorn av $8{,}3 \cdot 10^{10}$, medan parisermagneten under samma förhållanden ger ett värde av $5{,}4 \cdot 10^{10}$, bägge vid en effektförbrukning av 100 kW. I Paris har man senare satt hjälpspolar över själva polskorna och då kommit upp till ett värde av $10{,}4 \cdot 10^{10}$ på den optiska verkningsfaktorn. Effekten har dock samtidigt måst ökas till ett så stort värde som 480 kW.

I avhandlingen redogöres sedan för några försök att bestämma Cotton-Mouton-konstanten för några standardvätskor. Undersökningarna visa, vilket man ej tidigare observerat, att förbehandlingen ofta influerar på resultatet. Detta gäller särskilt den som standardvätska mycket använda nitrobensolen, vilken har en mycket stor Cotton-Mouton-konstant.

Här uppträda egendomliga åldringsfenomen, vilka antagligen bero på att associationen ändrar sig vid reningen. Nyss renad och åldrad nitrobensol kunna ha över 10 % olika Cotton-Mouton-konstanter. — Bäst visa sig bensol och toluol vara som standardsubstanser.

Avhandlingen innehåller även mätningar över dubbelbrytningen i hydrotropa lösningar. Hydrotropi innebär, att många i vatten svårlösliga ämnen få sin löslighet starkt ökad genom närvaro i hög koncentration av vissa salter, särskilt sådana av aromatiska karbonsyror och sulfonsyror. Detta egendomliga fenomen har tidigare varit föremål för många spekulationer utan att tillfredsställande tydning kunnat ges. Mätningarna ge vid handen, att det här troligen är fråga om ett associationsfenomen. Den hydrofoba delen av den organiska jonen ger med den svårlösliga komponenten molekylföreningar som sönderfalla och nybildas i ständig växling.

Slutligen behandlas dubbelbrytningen i kolloidala lösningar av vissa organiska färgämnen. Här uppställes först en matematisk teori för den magnetiska dubbelbrytningen i starkt absorberande kolloidala lösningar. Dubbelbrytningen befinnes vara en funktion av vissa materialkonstanter och av partikelformen.

Det experimentella materialet omfattar ett flertal färgämnen. En del färgämnen förhålla sig vid micellbildningen så som man har att vänta sig enligt teorien. Andra åter uppvisa stora anomalier. Till dem som visa avvikelse hör bl. a. azoblått. Här förändrar sig dispersionen av dubbelbrytningen med koncentrationen på ett ej förutsett sätt. Dispersionen rött till grönt sjunker sålunda med konc. i ett större intervall för att senare bli konstant, medan dispersionen violett till grönt ej ändrar sig. Detta kan ej förklaras på annat sätt än att en ändring av partikelstrukturen

äger rum med stigande koncentration och ökad storlek av partiklarna. Denna ändring äger rum på ett sådant sätt, att dispersionselektronerna influeras vid micellbildningen. Förmodligen ha vi ett nematiskt tillstånd i de mera koncentrerade lösningarna.

Ett annat slående exempel på de micellbildande krafternas inverkan i vissa fall på dispersionelektronerna är anilinblåtts förhållande i vattenlösning och som suspension i bensol. I förra fallet finner man plötslig ändring i dispersionskurva nomkring 500 mμ. Dubbelbrytningen ändrar sig här från negativt värde i violett till positivt i rött, medan vi i bensol hela tiden ha en normal dispersion med positiv dubbelbrytning.

Dessa mätningar visa, att här röner dubbelbrytningen inflytande allt eftersom dispersionskrafter från den hydrofoba kolväteresten eller de elektrostatiska krafterna deltaga vid kolloidpartikelns bildning.

Av mätningarna framgår vidare, att hos ett flertal färgämnen befinner sig en lågdispers del i jämvikt med en findispers del. Vid micellbildningen ordna sig molekylerna regelbundet. Bensolkärnan ligger nära vinkelrätt mot längsaxeln.

Kai Siegbahn, *Studies in β-Spectroscopy.* Stockholm 1944, 82 s. Disp. vid Stockholms Högskola den 20 maj 1944. Opponenter: fil. dr J. Tandberg och fil. lic. S. Eklund.

Vid studiet av β-spektra har man att skilja mellan två olika typer, kontinuerliga spektra och linjespektra. Dessa uppstå som bekant på väsentligt olika sätt. Den kontinuerliga energifördelningen utgöres av elektroner, som emanera direkt från kärnan vid sönderfallet, under det att linjespektra uppkomma genom att γ-kvanta från kärnan vid passagen genom atomhöljet slå ut elektroner härifrån. Dessa senare elektroner få därvid en energi, som är lika med γ-kvantums energi minskad med frigörelsearbetet för elektronen. På detta sätt uppkommer från varje γ-frekvens en hel serie av β-linjer, härrörande från K, L, M...-skalen i höljet.

Vid uppmätning av dylika β-linjers energi har man använt sig av en β-spektrograf, bestående av ett transversellt, homogent magnetfält. Elektroner av samma energi komma därvid att beskriva cirklar med samma krökningsradie, och genom att fotografiskt eller med Geiger-Müller-rör registrera dem efter ett halvt varvs omlopp erhåller man en viss fokussering. Genom att mäta upp linjens krökningsradie ϱ samt den rådande fältstyrkan H erhåller man alltså linjens $H\varrho$-värde. Av dessa två bestämningar är fältuppmätningen den vanskligaste att utföra. Författaren har

därför angivit en metod, som möjliggör en beräkning av fältstyrkan enbart ur mätningar av vissa linjers krökningsradier. Metoden grundar sig på den omständigheten, att energiskillnaden mellan två β-linjer, varav den ena härrör från K-skalet, den andra från L_I-skalet, är känd från röntgenspektroskopiska data med stor noggrannhet. På detta sätt har β-linjespektra från Ra B och Th B undersökts. Av visst intresse är, att beräkningen av fältstyrkan vid de höga elektronhastigheter det här gäller (≈ 70 % av ljushastigheten) är starkt beroende av i vilken utsträckning relativitetskorrektionen för massans tillväxt med hastigheten gäller. Resultaten visa, att ingen avvikelse från dessa formlers giltighet kan spåras. Genom att kombinera mätresultaten för två olika »linjepar» härrörande från två olika γ-kvanta har författaren bestämt elementarkonstantkombinationen $\frac{h}{m_0}$. Medelvärdet av dessa bestämningar gav $\frac{h}{m_0} = 7{,}275$. Detta värde är tydligen i god överensstämmelse med det värde, som fås ur $\frac{e}{m_0} = 1{,}7590 \cdot 10^7$ e. m. e. och $\frac{h}{e} = 1{,}3787 \cdot 10^{-17}$ e. s. e. (Ohlin), som ger $\frac{h}{m_0} = 7{,}270$.

Genom att mäta upp intensiteterna på de olika β-linjerna, som ingå i en β-linjeserie med Geiger-Müller-rör, kan man bestämma sannolikheten för att ett γ-kvantum skall slå ut en K, L, M ...-elektron. Detta problem har behandlats teoretiskt av Hulme med tillhjälp av Diracs relativistiska vågekvation. Författarens experimentella resultat stå i god överensstämmelse med dessa beräkningar.

För att åstadkomma en »ljusstarkare» fokussering än vad den tidigare omtalade semicirkulära metoden medger har författaren konstruerat en β-spektrograf i form av en stor magnetisk lins. Genom att variera strömmen genom linsen kan man få olika energier av β-spektrum att fokusseras vid spalten på Geiger-Müller-röret i spektrografen. Denna metod ger en avsevärd vinst i intensitetshänseende i jämförelse med den semicirkulära. Med denna spektrograf har författaren undersökt en del olika typer av kontinuerliga spektra, härrörande från C^{11} (positronstrålande), Na^{24} samt P^{32}. Ur formen på dessa spektra kan man draga vissa slutsatser angående mekanismen vid β-emissionen samt om kärnkrafterna över huvud taget. Energispektrums övre gräns visar t. ex., att den vid β-emissionen deltagande hypotetiska partikeln neutrinon måste ha massan $= 0$. En av Fermi uppställd teori för β-sönderfallet på basis av neutrinohypotesen har genom mätresultaten kun-

nat prövas. Det visar sig, att Fermis formel för energifördelningen i stort sett återger experimenten väl, ehuru man kan konstatera en avvikelse vid de lägre energierna i spektrum.

LENNART MINNHAGEN, *The Stark Effect of Certain Multiplets. A Study Based on Calcium and Barium Lines.* Lund 1944. Disputation vid Lunds universitet den 13 maj 1944. Opponenter: docent NILS RYDE och amanuens KURT LIDÉN.

Det elektriska fältets inverkan på en atoms energitillstånd kommer till synes vid spektroskopisk analys av ljusemissionen från atomen och yttrar sig såsom förskjutningar och uppspaltningar av spektrallinjerna i polariserade komponenter med åtföljande intensitetsändringar. Effekten har olika karaktär alltefter de fältorsakade energiändringarnas storlek, dels i förhållande till energiskillnaderna mellan de olika multiplettnivåerna, dels i förhållande till energidifferenserna mellan termer med olika azimutalt kvantumtal (L).

Den första kvantum-mekaniska teorien för de icke-vätelika atomernas Stark-effekt (Foster, Unsöld) tog ej hänsyn till multiplettstrukturen; det var först ett stycke in på 1930-talet (Condon och Shortley) som elektronens spin principiellt introducerades i Stark-effekt-teorien för nämnda atomslag. Senare ha numeriska beräkningar utförts för specialfall (Lochte-Holtgreven).

I den föreliggande avhandlingens teoretiska del behandlas Stark-effekt-teorien för Russel-Saunders' multipletter, och speciellt intresse har ägnats åt termerna $6d\ ^3D$ och $7p\ ^3P$ i bariums bågspektrum vid låga elektriska fält. Dessa båda termer ligga mycket nära varandra och delvis överlagrade; genom störningen mellan dem uppkommer ett tidigare ej behandlat fall av Stark-effekt, kännetecknat av att multiplettkomponenternas inbördes avstånd äro av samma storleksordning som avståndet mellan varandra störande multiplettnivåer, medan de fältorsakade förskjutningarna äro små i jämförelse därmed.

Den experimentella undersökningen har i huvudsak omfattat triplettgrupper i kalcium- och bariumspektra. För att bringa dessa metaller till ljusemission i elektriskt fält ha de vanliga metoderna icke använts, emedan kalcium och barium icke ingå i beständiga gasformiga föreningar. Det för ändamålet byggda urladdningsröret innehåller som jonkälla en hålkatod, vars innerväggar ha en beklädnad av kalcium eller barium. Jonerna passera genom en spalt i katodens botten ut i ett fältrum, där ena fältkondensatorplattan utgöres av den plana katodbottnen och den andra av en med denna parallell platta, som bringas på en hög

negativ potential. I denna platta är infälld en skiva av den undersökta metallen, och dennas spektrum framkommer genom förstoftning och excitering av materialet.

Ett flertal linjegrupper i kalciumspektrum ha undersökts för en serie fältstyrkor upp till 135 kV/cm.

Bariumtermen $6d\ ^3D$ har undersökts på gruppen $6p\ ^3P$ — $6d\ ^3D$, som enligt teorien uppdelas i 29 polariserade Stark-effektkomponenter; härvid har använts en stor autokollimations-glasspektrograf med hög upplösningsförmåga och en dispersion på 3 till 4 ÅE/mm inom ifrågavarande spektralområde (5400—5800 ÅE). Fältstyrkan har sträckt sig till 120 kV/cm. Av de enligt teorien väntade nio Stark-effekt-nivåerna i begynnelsetermen $6d\ ^3D$ ha åtta experimentellt separerats. De teoretiskt beräknade relativa förskjutningarna överensstämma tillfredsställande med de experimentellt bestämda.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1944: 5—7.

Ur innehållet: L. Smith, Oxidimetrisk bestämning av små alkoholmängder; T. Nilsson och L. Smith, Om de isomera epiklorhydrinerna; B. Sjögren, N. Ahrbom och H. Zimdahl, Astras centrallaboratorium; K. Myrbäck och Inga Vallin, Chemische Vitamin B_1-Bestimmung in Fleisch und Fleischkonserven; N. Hellström och B. Lindberg, Merkaptidogruppens reaktionsförmåga; K.-J. Karrman, Chlorination of Retene; L. G. Sillén and B. Andersson, An Arrangement for Potentiometric Titrations with a Glass Electrode; E. Söderbäck, Studien über heterocyklische Cyansulfide; C. Kullgren, Untersuchungen über Nitrocellulose; H. v. Euler, L. Ahlström und H. Hasselquist, Spaltung der Nukleoproteide und Nukleinsäuren aus Leber und Jensensarkom; S. Ställberg-Stenhagen, An easily assembled and adjusted mercury-sealed stirrer; Ur »Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor»: Forskningsverksamheten inom den svenska industrien; Den kemiska forskningen vid Asea; Den kemiska forskningsverksamheten vid AB Bofors, avd. Nobelkrut; Forskningsverksamheten vid Höganäs-Billesholms AB; Sockerbolagets centrallaboratorium; Forskningsverksamheten vid Skoghallsverken.

IVA, 1944: 2—3.

Ur innehållet: Om pyrolys av olika torvkomponenter och torvarter; Om destillat från träkolning; Planlösning och inredning av laboratorier; Ingenjörsvetenskapsakademiens försöksstation för bränsleteknisk forskning; Ledande principer vid tillbyggnaden av Aseas laboratorium i Västerås; Några nyare Göteborgslaboratorier; Mikroorganismerna; Apparat för bestämning av svavel i flytande bränslen; Om högmolekylära fettsyror i torvtjära.

ERA, 1944: 2—8.

Ur innehållet: Vilken spänning är farlig för människan?; Sidsjöns sjukhus; Storkraftöverföring; Svenska småmotorer; Blixtskador i lågspänningsanläggningar; Konsthartser som isolermaterial; Friledning med stålaluminium; Från dammsugarens barndom. Ett stort antal elnyheter.

Populär radio, 1944: 5—8.

Ur innehållet: Mottagningsantenner; Filter för likriktare; Radiostudions akustik; Halvvågslikriktare; Katodkopplat slutsteg; Synpunkter på frekvensdrift; Mätningar med impedansbrygga; Moderna batterimottagare; Orkesterklangen i radio.

Teknik för alla, 1944: 6—18.

Ur innehållet: Träkemiens möjligheter; Batterier på löpande band; Pulvermetallurgien; Radiomateriel; Astronomien och den moderna elektroniken; Kaolin; Magnetminor; Sverige gör Europas bästa flygkompass; Lufttorpeden; Moderna atomsprängningsmaskiner; Elektroteknisk avdelning i Tekniska Museet. Under rubriken »Händigt folk»: Hur man bygger en elgenerator; Hur man gör en enkel fuktighetsmätare; En 3-rörs allströmmottagare; Hemgjorda skjutmotstånd.

Fysisk Tidsskrift, København 1944: 1—3.

Ur innehållet: J. Olsen, Jordmagnetisme og beslægtede Fænomener; S. Werner, Lynet og andre elektriske Udladninger; B. Bjerke, Lufttemperaturens variasjon med høiden; T. Bjerge, Børgvald Johansen; J. A. Christiansen, Om en støkiometrisk Grundsætning, opstillet af J. W. Gibbs. Ur avd. »Fysik i Skolen»: K. W. Norbøll, Apparat til direkte Undersøgelse af det frie Fald; N. Wieth-Knudsen, Elektriske Svingninger; O. Rasmussen, En omskifter til katodstraaleoscillografen; S. Jakobsen, Et Apparat til Maaling af Centripetalkraft; E. Gjede, Effektiv- og Maximalspænding.

Naturens Verden, København 1944: 4—6.

Ur innehållet: H. Blegvad, Verdenshavenes Udforskning II; J. Olsen, Om Atmosfærens ledende Lag, Jonosfæren; A. Nørvang, Arktiske Frostrukturer fra Istidens Danmark.

Norsk Matematisk Tidsskrift, 1944: 2—3.

Ur innehållet: H. Bohr, Om S-næstenperiodiske Funktioner med lineært uafhængige Exponenter; V. Brun, Integrallogaritmen som uttryck for antall primtall under x; W. Ljunggren, Om framstilling av hele tall ved binære bikvadratiske former av spesiell klasse; T. Nagell, En elementær metode til å bestemme gitterpunktene på en hyperbel; J. Popken, Over de irrationaliteit van de tangens van een rational getal; A. Selberg, Bemerkninger om et multipelt integral; S. Selberg, Antallet av ustrøkne ledd ved Eratosthenes sold; Th. Skolem, Utvidelser av et par setninger av C. Størmer; R. Tambs Lyche, En egenskap ved de symmetriske funksjoner av de n første oddetallen; N. E. Nørlund, Hydrostatisk Nivellement over Store Bælt.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1944: 2.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Nobelpristagere i kjemi: W. Ramsay, E. Rutherford, W. Ostwald; Aadne Ore, En utbredt forvirring i mekanikken; K. A. Wingårdh och Gunnel Wingårdh, Demonstration av dämpade och odämpade svängningar och verifiering av Thomsons formel med hjälp av katodstråleoscillograf; J. Knudsen, Litt om meteorologiske observasjoner og deres representativitet; L. Rosenfeld, Utviklingen av årsaksbegrepet.

Naturen, Bergen 1944: 5—6.

Ur innehållet: L. C. Godske, Regn; E. Rustung, Såkalte »styrkemidler»; L. Vegard, Koronadannelser og deres fysikaliske forklaring.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1346) *Man bildar punktföljden A_0, A_1, A_2 sålunda: A_0, A_1, A_2 äro hörnen i en rätvinklig triangel med hypotenusan A_0A_1; i fortsättningen är A_{n+1} fotpunkten för normalen mot $A_{n-2}A_{n-1}$ från A_n. Visa, att den punkt P, mot vilken A_n tenderar, ligger där den linje, som förenar A_1 med det fjärde hörnet Q i rektangeln $A_0A_3A_2Q$, skär cirkeln $A_0A_3A_2Q$ för andra gången.* F. Ehrnst.

1347) *Fyra sfärer tangera ett plan och varandra utantill. Om planets tangeringspunkter behållas, i vilket förhållande skola sfärernas radier ändras, för att sfärerna skola råkas i en och samma punkt?* N. J.

1348) *En cirkel tangerar en given liksidig hyperbel och går genom dess centrum. Sök orten för cirkelns medelpunkt.* X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

Obs! Uppg. 1340 bör lyda: Vilken är ekvationen för den största cirkel som tangerar ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i vertex $(-a; 0)$ men för övrigt ligger inuti ellipsen?

1349) Visa, att om i en triangel såväl a, b och c som r, r_a och r_b bilda aritmetiska serier, så är triangeln egyptisk.

1350) Bevisa, att för triangelstorheterna r, r_a, r_b och r_c gäller $9r \leq r_a + r_b + r_c$.

1351) Visa, att ekvationen $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x = 0$ saknar reella rötter.

1352) I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Visa, att $\overline{BC}^2 + \overline{AH}^2 = 4R^2$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1349—1351, 1355 äro insända av *B. Svenonius;* 1352—1354, 1356—1357 av *F. E.;* 1358—1360 av *B-r;* 1361 av *P.*

1353) I triangeln ABC är $C = 90°$. Bissektrisen till A skär BC i B_1. Bissektrisen till vinkeln AB_1C skär AC i A_1. Bissektrisen till vinkeln B_1A_1C skär B_1C i B_2. Man fortsätter på samma sätt att draga bissektriserna till vinklarna $A_{n-1}B_nC$ och B_nA_nC. Undersök, om de vinklar som dessa bissektriser bilda med AC och BC tendera mot några bestämda gränsvärden och bestäm i så fall dessa.

Svar: 60°.

1354) I en regelbunden tetraeder med kanten a lägges genom en baskant ett plan, som med basytan bildar en vinkel av 60°. Beräkna snittytans storlek.

Svar: $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.

1355) Sök på höjden i en given pyramid, vars basyta är en n-hörning av godtycklig form, en punkt sådan, att summan av kvadraterna på dess avstånd till pyramidens alla hörn är ett minimum.

Svar: Avståndet från basytan är $\frac{h}{n+1}$.

1356) Om en cirkel skär kurvan $xy = a^2$ i punkterna $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ och $(x_4; y_4)$, så gäller $x_1x_2x_3x_4 = a^4$.

1357) Bestäm a i ekv. $y = ax^3 - 3x$ så, att kurvan tangerar $y = x + 4$.

Svar: $a = \frac{16}{27}$.

1358) I en given cirkel med centrum O drages en fast diameter AB samt en korda AC. Radien OD drages parallell med AC. Om $\sphericalangle BAC < 60°$, kommer en korda genom D parallell med AB att skära AC i E. Bestäm $\sphericalangle BAC$ så, att ytan av den figur som begränsas av DE, EC och bågen CD blir så stor som möjligt.

Svar: 36°.

1359) En föränderlig parabel har sin axel utefter negativa y-axeln och går genom punkten (2; 3) samt skär x-axeln i A och B. Parabelns vertex är C. Bestäm triangelytan ABC:s minimivärde.

Svar: $9\sqrt{3}$ ytenheter.

1360) Den utdragna parametern i en hyperbel skär ena asymptoten i F. En linje genom P parallell med den andra asymptoten är normal till hyperbeln. Beräkna dennas excentricitet.

Svar: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

1361) En cirkel med centrum $(c;\ 0)$ går genom parameterns ändpunkter i parabeln $y^2 = 4ax$ och skär dessutom parabeln i två andra punkter. För vilket värde på c blir dessa punkters sammanbindningslinje diameter i cirkeln?

Svar: $c = 5a$.

Lösn. till uppg. 1316—1318.

1316) *I vilka serier är* $t_1^3 + t_2^3 - t_3^3 + \ldots + t_n^3 - t_1 + t_2 - t_3 + \ldots + t_n)^2$ *för alla positiva heltalsvärden på n?* *X.*

För $n = 1$ fås $t_1^3 = t_1^2$; $\because t_1 = 0$ eller $t_1 = 1$. Av $t_1^3 + t_2^3 + \ldots + t_n^3 = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)^2 = s_n^2$ och $t_1^3 + t_2^3 + \ldots + t_{n+1}^3 = (s_n + t_{n+1})^2 = s_n^2 + 2t_{n+1} \cdot s_n + t_{n+1}^2$ fås genom subtraktion $t_{n+1}^3 - t_{n+1}^2 - 2t_{n+1} \cdot s_n = 0$, varav $t_{n+1} = 0$ (serien 0, 0, 0 . . .) och $t_{n+1}^2 - t_{n+1} = 2s_n$. Av denna ekv. och $t_n^2 - t_n = 2s_{n-1} = 2s_n - 2t_n$ fås genom subtraktion $t_{n+1}^2 - t_n^2 - t_{n+1} + t_n = 2t_n$ eller $(t_{n+1} + t_n)(t_{n+1} - t_n) - (t_{n+1} + t_n) = 0$, varav $t_{n+1} + t_n = 0$ (serien 1, − 1, 1, − 1 . . .) och $t_{n+1} - t_n = 1$ [serien (0), 1, 2, 3, 4 . . .]. Utom dessa »skolserier» finnas följande allmännare lösningar: I. Den »nollfria» serien 1, t_2, t_3 . . ., där $t_{n+1} = t_n + 1$ *eller* (efter godtyckligt val) $t_{n+1} = -t_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots N-1$, dock så att en event. term $N-1$ följes av 1 (och icke 0), om serien skall fortsättas; för $n > N$ är $t_n = 0$. II. Den allmännaste lösningen erhålles ur I, om godtyckligt långa rader nollor tillfogas före och mellan de icke försvinnande termerna där.

Löst av *B. Svenonius* och *Bertram.*

1317) *Huru stora äro toppvinklarna i en regelbunden n-sidig pyramid, om en sfär, som tangerar alla kanterna och a) den omskrivna sfären, b) en sfär, som tangerar alla ytorna, ha samma medelpunkt?* *N. J.*

a) En kant i basytan är AB, M är mittpunkten på AB, P pyramidens topp och H höjdens fotpunkt samt O den (på PH belägna) gemensamma medelpunkten för omskrivna sfären och den sfär, som tangerar alla kanterna. Från O fälles normalen ON mot AP. Av $OP = OA$ framgår, att N är mittpunkten på AP. Men $AN = AM$ (tangenter från A till den sfär, som tangerar kanterna) eller $AP = AB$ och triangeln APB liksidig. Toppvinklarna i pyramiden äro således 60°. Basytan kan ha tre, fyra eller fem kanter.

b) Beteckningar som förut, men O betyder nu den gemensamma medelpunkten för den sfär, som tangerar alla kanterna, och för

den, som tangerar alla ytorna. Från O fälles normalen OQ mot MP. Sätt $AM = a$, $AP = s$, $\angle AHM = v$, $\angle APM = x$. Den sfär, som tangerar sidorna eller deras förlängningar i triangeln APB, ger som skärning i denna triangel en inskriven, resp. vidskriven cirkel. Q är denna cirkels medelpunkt. Men $MH = MQ$ (tangenter till samma sfär) $= a \cot v$ och $QP = s \cot v$ (bissektrissatsen). Pytagoras sats ger $\cot^2 v(s \pm a)^2 = s^2 - a^2$, varav $\cot v = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ eller $\cot v = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. För $n = 3$ fås $v = 60°$ och $x = 30°$, för $n = 4$ fås $x = 0°$, för $n = 5$ fås $\cot^2 36° = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ eller $\frac{1}{\cos 72°} = \frac{1}{\sin x}$ och $x = 18°$, för $n = 6$ fås $x = 30°$. Toppvinklarna äro således 60°, 36°, (0° och 60°). Fallen $n = 3$, 4, 5 visa det triviala förhållandet, att den alla kanterna tangerande sfären har samma centrum som den inskrivna sfären för en regelbunden tetraeder, en kub och regelbunden dodekaeder. För fallet $n = 6$ falla alla ytorna i ett plan; polyedern reducerar sig till ett sexhörningsnät. På samma sätt svarar i problem a) fallen $n = 3$, 4, 5 och 6 mot den reg. tetraedern, oktaedern och ikosaedern samt nätet av liksidiga trianglar.

B. Svenonius.

Anm. Problemförfattaren förutsätter icke i sin lösning regularitet hos basytan.

1318) *I triangeln ABC är* $a = \sqrt{5} - 1$, $h_a = 1$ *och vinkeln* $A = 63°$. *Beräkna exakta värdet på vinklarna B och C.* *X.*

Kallas en av de sökta vinklarna för x, så erhålles ekvationen $\cot x + \cot(117° - x) = \sqrt{5} - 1$. Efter övergång till sinus och cosinus fås $\cos(2x - 117°) = \frac{2 \sin 63°}{\sqrt{5} - 1} - \cos 63° = 2 \sin 63°$. $\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \cos 63° = 2 \sin 63° \cos 36° - \cos 63° = \sin 99° + \sin 27° - \cos 63° = \cos 9°$, varav $2x - 117° = \pm 9°$. Vinklarna B och C äro alltså 63° och 54°.

Löst av *B. Svenonius* och *E. Smn.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1944.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en oändlig geometrisk serie med positiva termer är summan av de första sex termerna 63 och summan av alla de därpå följande 1. Bestäm seriens kvot och första term.
2. Konstruera kurvan $2y + 2x^2 + 8x + 5 = 0$ och räta linjen $2y + 4x + 5 = 0$. Bestäm medelst algebraisk metod koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvan och linjen. Visa medelst diagrammet eller på annat sätt, att en av skärningspunkterna är maximipunkt på kurvan.
3. De tre skärningslinjer mellan golv och väggar i ett rum, vilka utgå från ett hörn O, äro vinkelräta mot varandra. På skärningslinjerna äro tre punkter, A, B och C, en på vardera linjen, så belägna, att $OA = 3$ m, $OB = 2$ m och $OC = 1$ m. Beräkna den största vinkeln i triangeln ABC.
4. Bestäm de reella lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x^2y + x^2 = 5y - 2, \\ 5x^2y + y = 2x^2 + 4. \end{cases}$$

5. I en triangel, vars yta är 8 cm², är en vinkel 30°. Bissektrisen till denna vinkel delar den motstående sidan i förhållandet 1 : 2. Beräkna längden av denna sida.
6. I en cirkel med radien 5 cm är en fyrhörning inskriven, vars diagonaler skära varandra under rät vinkel. Den ena diagonalen delas av den andra i delarna 2 cm och 4 cm. Beräkna den andra diagonalens längd.
7. I en triangel ABC är $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm och vinkeln $C = 22°$. Bissektrisen till vinkeln A råkar BC i D. Bestäm längden av AD i de båda fall, som äro möjliga.
8. I en triangel är en sida aritmetiskt medium till de båda andra. Den inskrivna cirkelns radie förhåller sig till den omskrivnas som 2 : 5. Bevisa, att triangeln är rätvinklig.

Resultat: 1. Kvoten $= \frac{1}{2}$; första termen $= 32$. 2. Skärningspunkterna äro $(0; -2{,}5)$ och $(-2; 1{,}5)$ av vilka den senare är max. 3. Vinkeln $ACB = 81°{,}87$. 4. $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$. 5. $\sqrt{80 - 32\sqrt{3}} = 4{,}957$ cm. 6. $\sqrt{96} = 9{,}798$ cm. 7. 5,73 cm eller 10,23 cm. 8. Triangeln är egyptisk.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. I en triangel ABC äro sidorna AB och AC lika stora. Hörnet A är beläget i punkten (2; 5) och hörnet B i punkten (4; 1). Höjden mot sidan BC går genom punkten (0; 1). Beräkna koordinaterna för hörnet C.
2. Visa, att kurvorna $8x^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ och $x^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ ha endast en punkt gemensam och att de i denna punkt ha samma tangent. Angiv ekvationen för denna tangent och upprita kurvorna.
3. Lös ekvationen $2 \sin 2x + 2 \sin x + 2 \cos x + 1 = 0$.
4. I en tetraeder $ABCD$ äro sidoytorna ABC och ABD vinkelräta mot varandra. Vidare är $AB = 6$ cm, $AC = BC = 7$ cm och $AD = BD = 9$ cm. Bestäm vinkeln mellan sidoytorna ACD och BCD.
5. I en rät cirkulär kon lägges genom höjdens mittpunkt ett plan parallellt med basytan. I den härigenom uppkomna parallellt stympade konen kan man inskriva ett klot, som tangerar den stympade konens mantelyta och båda plana begränsningsytor. Bestäm konens toppvinkel.
6. Från en godtycklig punkt A_1 på sidan BC i en triangel ABC dragas A_1B_1 parallellt med AB. Från B_1, som ligger på AC, dragas B_1C_1 parallellt med BC. Från C_1, som ligger på AB, dragas C_1A_2 parallellt med CA. På motsvarande sätt dragas därefter A_2B_2, B_2C_2 och C_2A_3 parallellt med AB, BC respektive CA. Punkterna B_2, C_2 och A_3 ligga på AC, AB respektive BC. Bevisa, att A_1 och A_3 sammanfalla. Vad är villkoret för att A_1 och A_2 skola sammanfalla?
7. Upprita kurvan $y = x^2(3 - x)$ i dess huvuddrag. Två punkter på kurvan, A och B, ha positiva koordinater, och deras sammanbindningslinje går genom origo. Projektionerna på x-axeln av A och B äro A_1 och B_1. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av parallelltrapetset AA_1B_1B varierar, då linjen AB vrider sig kring origo.
8. En skuld amorteras under ett visst antal år genom lika stora annuiteter, vilka inbetalas vid varje års slut. Räntefoten är hela tiden densamma. I varje annuitet ingår dels ränta, dels amortering. Visa, att de successiva amorteringarna bilda en geometrisk serie med räntefaktorn som kvot.

Resultat: **1.** C ligger i $(-2{,}4;\ 4{,}2)$. **2.** Tangentens ekv. är $4x+8y+7=0$. **3.** $\pm 120° + n\cdot 360°$, $210° + n\cdot 360°$; $330° + n\cdot 360°$. **4.** $61°{,}22$. **5.** $38°{,}94\left(\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}\right)$. **6.** A_1 skall ligga i BC:s mittpunkt. **7.** Om AB:s vinkelkoeff. $= k$, blir ytan $\frac{3k}{2}\sqrt{9-4k}$. Funktionen har ett max. $= \frac{9\sqrt{3}}{4}$ för $k=\frac{3}{2}$. Ytan varierar från värdet 0 (för $k=0$) över maximet till värdet 0 $\left(\text{för } k=\frac{9}{4}\right)$, då AB tangerar kurvan. **8.** Vid början av det år, då p inbetalningar återstå, är skuldens storlek, $S_p=\frac{a}{R}+\frac{a}{R^2}+\ldots+\frac{a}{R^p}$, där a är annuiteten och R räntefaktorn. Amorteringsandelen i detta års annuitet är $= a-(R-1)S_p=\frac{a}{R^p}$. Man får även direkt, att nämnda andel är $=$ $= S_p - S_{p\ 1}=\frac{a}{R^p}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Två lika stora kvadrater, $ABCD$ och $AB_1C_1D_1$, ha hörnet A gemensamt. Sidorna AB_1 och AD_1 utgöra förlängningar av AB respektive AD. En ellips går genom kvadraternas alla hörn utom A. Bestäm excentriciteten för denna ellips.
2. På en konstruktionsritning till en kraftöverföring medelst drivrem från en maskinaxel till en annan äro två remskivor, mellan vilka drivremmen utan korsning skall spännas, inritade som två cirklar. I ett rätvinkligt koordinatsystem, som inlagts i konstruktionsritningen, ha dessa cirklar ekvationerna $x^2+y^2=1$ och $x^2+y^2-30y+221=0$. Angiv ekvationerna för de räta linjer, som i konstruktionsritningen representera drivremmens raka delar.
3. Från en punkt P på en cirkelsektors båge dragas normalerna PQ och PR mot sektorns radier. Sök maximivärdet för ytan av triangeln PQR, då sektorns radie är r och dess medelpunktsvinkel $g°$ $(g<180)$.
4. Genom punkten $(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ dragas i hyperbeln $x^2-3y^2-2x-6y+$ $+1=0$ en korda, som delas mitt itu i punkten. Beräkna ytan av

den triangel, som bildas av kordan och av tangenterna till hyperbeln i kordans ändpunkter.

5. En rät linje vrider sig kring en fix punkt på x-axeln i ett koordinatsystem. Den del av linjen, som ligger mellan koordinataxlarna, tages till diameter i en cirkel. Sök orten för mittpunkterna på de båda halvcirkelbågar, som ligga på ömse sidor om denna diameter.

6. Bevisa, att den korda i en parabel, som går genom brännpunkten och är parallell med tangenten i en punkt P på parabeln, är fyra gånger så lång som brännpunktsradien till P.

7. Upprita kurvan

$$y = \frac{2\,x^2 - 1^2}{x^3}.$$

Från en punkt P på kurvan drages normalen mot den asymptot, som ej är parallell med y-axeln. Normalen träffar asymptoten i Q. Undersök, hur längden av PQ varierar, då punkten P genomlöper kurvan, och åskådliggör detta grafiskt i ett särskilt diagram.

Resultat: **1.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.** $y \pm 4x\sqrt{14} + 15 = 0$. **3.** $r^2 \cdot \sin^3\frac{g}{2} \cdot \cos\frac{g}{2}$ ytenh. **4.** $\frac{1}{2}$ ytenh. Diametern genom $(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ har vinkelkoeff. $= -1$, varför kordans blir $-\frac{1}{3}$, ty $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$. Kordan går genom vertex $(1;\ 0)$, varför x-axeln blir ena tangenten; den andra går genom origo, ty tangenterna i en kordas ändpunkter råkas på diametern. Diametern halverar triangelytan. — Man behöver således ej söka koord. för kordans andra ändpunkt. **5.** Orten utgöres av axelvinklarnas bissektriser. — Linjen från bågens mittpunkt till origo bildar med axlarna vinklar, som stå på lika stora bågar. **6.** Drag normaler mot styrlinjen från kordans ändpunkter och från dess mittpunkt; den senare går genom P. **7.** Kurvan har max. i $(-1;\ 0)$ och min. i $(1;\ 0)$; asymptoter äro $x = 0$ och $y = 2x$. Origo är medelpunkt för kurvan, varför det är tillräckligt att undersöka PQ:s variation i första kvadranten. Man finner $PQ = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4x^2 - 2}{x^3}$, där det tecken väljes, som gör $PQ > 0$. Med växande x avtar PQ från ∞ till 0 (för $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, där kurvan skär asymptoten) för att sedan växa till ett max. $= \frac{8\sqrt{30}}{45}$ i $\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ samt därefter avtaga mot 0. — Det fullständiga PQ-diagrammet har asymptoterna $x = 0$ och $y = 0$ och maxima i $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{8\sqrt{30}}{45}\right)$ och minima (*hörn*) i $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1 och 5—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. I en vägg finnes en lucka, som består av en jämntjock, homogen, rektangulär järnskiva, 11 dm lång, 7 dm bred och 1,0 cm tjock. Den är förenad med väggen medelst två lika högt belägna gångjärn vid ena långsidan och hålles i horisontellt läge genom två stycken 12 dm långa linor, som utgå från var sin ända av den andra långsidan och äro fästade i väggen ovanför luckan. Linorna äro belägna i var sitt av de båda vertikalplanen genom luckans kortsidor; fästpunkterna i väggen kunna anses ligga rakt ovanför skivans vridningsaxel. De båda linorna äro lika starkt spända. Beräkna spänningen i en av dem. Järnets täthet antages vara 7,1 g/cm^3.
2. När en flygare efter en störtdykning åter rättar upp sitt flygplan, påverkas han, utom av tyngdkraften, av de starka krafter, som åtfölja en snabb rörelseändring. Man brukar anse, att han icke bör utsätta sig för ett större sammanlagt kraftfält än 9 gånger det normala tyngdkraftfältet. Lägsta delen av hans bana kan med tillräcklig noggrannhet anses som en vertikal cirkelbåge, och hastigheten i banan antages vara konstant 540 km/tim, under det denna båge beskrives. Vilken är den minsta radie bankurvan får ha?
3. Elektronerna i ett smalt katodstraleknippe hade praktiskt taget samma hastighet och medförde per sekund genom ett godtyckligt tvärsnitt av knippet en elektricitetsmängd av tillsammans 0,110 mikrocoulomb och en rörelseenergi av tillsammans 200 erg. Beräkna deras hastighet. Förhållandet mellan elektronens laddning och massa är $1{,}76 \cdot 10^8$ coulomb/g. 1 mikrocoulomb $= 10^{-6}$ coulomb.
4. Ett i ett berg insprängt rum har en volym av 210 m^3. Bergväggarna ha en temperatur av $+ 7{,}0°$ C, och luften i rummet är mättad med fuktighet. Den yttre luftens temperatur är $+ 20{,}4°$ C och dess relativa fuktighet 80 %. För att få en uppfattning om de fuktighetsmängder, som utfalla vid luftväxling, önskar man veta, huru mycket vatten, som skulle utfalla, om luften i rummet helt ersattes med utifrån inströmmande luft, utan att luftmassorna blandades. Beräkna denna vattenmängd. Lufttrycket är både inne och ute 764 mm kvicksilver. Vattenångans täthet i förhållande till luft av samma tryck och temperatur är $\frac{5}{8}$. Behövliga uppgifter om vattenångans mättningstryck hämtas ur räknetabellerna.

5. En astronomisk tub, vars objektiv och okular ha en brännvidd av respektive 100 cm och 3,0 cm, är först inställd för direkt observation av solfläckar, varvid observatören ackommoderar ögat för seende på oändligt avstånd. Därefter vill han med kikarens hjälp alstra en stor solbild på en skärm bakom okularet. Huru mycket skall han utdraga okularet, för att det skall ge en skarp solbild med diametern 10,0 cm? Solens diameter på himlavalvet upptager en synvinkel av 32′. Objektiv och okular betraktas som tunna linser.
6. En ampèremeter, vars motstånd anges till 0,018 Ω, mäter strömstyrkor upp till 6 A. Man vill tillfälligt använda den för mätning av något större strömstyrkor och ämnar därför klämma fast en trådbit som shunt mellan ampèremeterns anslutningsskruvar. Shunten skall avpassas så, att instrumentet gör fullt utslag för 15 A. Man har en tråddimension av legeringen kanthal, som tål den avsedda strömstyrkan, och på en etikett som åtföljer tråden står »0,144 Ω per meter». Hur stor längd av denna tråd skall vid fastklämningen falla mellan skruvarna, om själva klämställena utformas så, att intet nämnvärt extra motstånd uppkommer vid de anliggande ytorna?
7. Man ville undersöka, huru den elektromotoriska kraften hos ett visst slags element beror av temperaturen. Två element, båda av den sort, som skulle undersökas, kopplades ihop med sina negativa poler, varpå de positiva polerna förbundos med en ledning, som i serie innehöll en galvanometer och ett enohmsmotstånd. Galvanometern befanns då strömlös, men när det ena elementet avkyldes från rumstemperaturen, + 18° C, till 0° C, medan det andra bibehölls vid oförändrad temperatur, uppkom en ström genom galvanometern. Man anslöt nu till ändarna av enohmsmotståndet en grenledning, som i serie innehöll en blyackumulator, ett skjutmotstånd och en milliampèremeter; ackumulatorns och det avkylda elementets positiva poler voro därvid kopplade till samma ända av enohmsmotståndet. Slutligen uppsökte man en sådan inställning av skjutmotståndet, att galvanometern åter blev strömlös. Milliampèremetern visade då 21 mA. Den elektromotoriska kraften för det avkylda elementet var vid + 18° C 1,429 V. Hur stor är den vid 0° C?
8. Styrkan av jordmagnetismens horisontalkomposant kan bestämmas på följande sätt. En liten kompassnål är upphängd i centrum av en cirkulär strömbana, bestående av ett enda trådvarv. Strömbanans plan sammanfaller med det magnetiska meridianplanet. Om en ström släppes genom strömbanan,

kommer nålen att avvika ur magnetiska meridianplanet och intaga ett nytt jämviktsläge. Nålens utslag avläses medelst kikare och skala. Vid kompassnålen är fördenskull en liten spegel fastgjord på sådant sätt, att nålens vridningsaxel ligger i spegelns plan. Skalan är en horisontell millimeterskala, uppställd strax nedom objektivet i ett mot kikarens axel vinkelrätt plan. Om strömbanan är strömlös, befinner sig spegelnormalen i vertikalplanet genom kikarens optiska axel. När försöket utfördes, sände man en ström av 500 mA genom strömbanan och avläste då i kikaren ett utslag av 425 mm. Avståndet mellan spegel och skala utgjorde 195 cm; strömbanans diameter var 40,0 cm. Beräkna jordmagnetismens horisontalkomposant på orten.

Resultat: **1.** 16,8 kgf. **2.** 287 m. **3.** $8{,}0 \cdot 10^8$ cm/s. **4.** 1,53 kg. **5.** 2,8 mm. **6.** $8\frac{1}{3}$ cm. **7.** 1,450 V. **8.** 0,146 gauss.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1943—1944.

Göteborg: lektor S. Friberg, 1. Geometrisk optik. 2. Laborationsövningar till växelströmsläran; adjunkt J. Lundberg, Några av det kemiska laboratoriets viktigaste experimentella hjälpmedel och deras användning; lektor R. Nyhlén, Geometriens aritmetisering.

Lund: lektor A. Leide, Demonstrationsteknik för fysikaliska försök; adjunkt O. Palmgren, Valda delar av den organiska kemien på realgymnasiet; lektor B. Svensson, Om geometriundervisningen företrädesvis å realskolan.

Stockholm: adjunkt S. Comét, Funktionsbegreppet på gymnasiet; lektor G. Funke, Demonstration av fysikalisk materiel tillverkad vid Bromma läroverks fysiska institution; lektor B. Gustaver, 1. Den moderna atomteorien i skolans kemikurs. 2. Den kemiska nomenklaturen; lektor H. Rinde, Kolloidkemi; rektor B. Wahlström, Metodiska synpunkter på matematikundervisningen.

Umea: lektor A. Guntsch, Energilagens behandling i gymnasiets fysikkurs; lektor K. Persson, Några synpunkter på gymnasieundervisningen i funktionslära.

Uppsala: lektor G. Bolinder, Om matematikundervisningen på gymnasiet; adjunkt P. Granath, Några synpunkter på fysikundervisningen i realskolan; lektor B. Hedenstedt, Om fysikundervisningen på gymnasiet; adjunkt V. Lenander, Några synpunkter på geometriundervisningen i realskolan.

Uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1943—1944.

F. Ehrnst, Satser och problem (Högre allm. lärov. i Östersund); rec. detta häfte s. 168.

Om ekvationen $t^n + at = b$.

Av AGNE WAHLGREN.

För någon tid sedan blev jag tillfrågad, om man kunde erhålla den positiva roten till ekvationen

$$t^n + at = b \qquad (a > 0,\ b > 0) \tag{1}$$

genom upprepad användning av rekursionsformeln

$$t_{r+1}^n + at_r = b. \tag{2}$$

Detta är ett specialfall av en metod, som kan tillämpas på ekvationer av allmännare form.[1] Jag skall emellertid inskränka mig till att mera i detalj undersöka metoden för ekvation (1) och först som avslutning nämna något om det allmänna fallet. Jag skall utföra undersökningen för både positiva och negativa rötter samt för positiva och negativa värden på a och b. Emellertid visar det sig, att det i st. f. (2) i många fall blir rekursionsformeln

$$t_r^n + at_{r+1} = b, \tag{3}$$

som leder till målet.

Antag till en början, att a och b äro positiva. Om n är udda, har ekvationen (1) en enda rot T, och den är positiv. Antag att kurvorna A_1A_2 och B_1B_2 (fig. 1) motsvara ekvationerna

$$x^n + ay = b, \tag{A}$$

$$y^n + ax = b. \tag{B}$$

Kurvorna äro omvänt kongruenta med linjen $y = x$ som symmetriaxel. Deras skärningspunkt D på denna axel motsvarar $x = y = T$. Använder man nu (3), visar likheten

$$t_r^n + at_{r+1} = T^n + aT,$$

att vartannat t-värde blir mindre, vartannat större än T. Väljes $t_1 = OC$, erhålles $t_2 = CP = C_1Q_1$ enligt (A). Av (B) erhålles sedan $t_3 = OC_1$, varefter (A) ger $t_4 = C_1P_1 = C_2Q_2$ o. s. v. Det är tydligt, att lim $t_r = T$.

[1] Se t. ex. WHITTAKER-ROBINSON, The Calculus of Observations, Ch. VI.

Utgår man från $t_1 = OG$, får man $t_2 = GQ_1' = G_1P_1'$, $t_3 = OG_1$, $t_4 = G_1Q_2'$ o. s. v. samt lim $t_r = T$. Men detta ger intet nytt. På grund av symmetrien är det likvärdigt med att man i förra fallet börjar med $t_2 = C_1Q_1$. Väljes $t_1 = OH$, erhålles $t_2 = HR = H_1S_1$, $t_3 = OH_1$, $t_4 = H_1R_1$ o. s. v. Tydligen blir lim $t_{2r-1} = -\infty$, lim $t_{2r} = \infty$. Och symmetriskt härmed får man lim $t_{2r-1} = \infty$, lim $t_{2r} = -\infty$, om man börjar med $t_1 = OL$. För att rekursionsformeln (3) skall leda till roten T, måste man således börja med x-värdet för en punkt mellan E och E'.

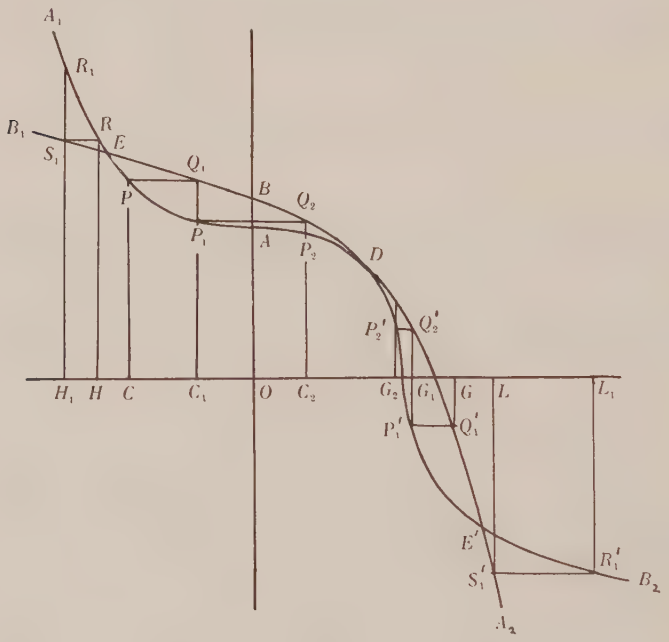


Fig. 1.

I fig. 1 ligger A-kurvan nedanför B-kurvan närmast till vänster om D. Villkoret härför är, att vinkelkoefficienten för A-kurvans tangent i D är ≥ -1.

$$\because -\frac{nT^{n-1}}{a} \geq -1; \qquad T \leq \sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}; \tag{4}$$

$$b \cdot T^n + aT \leq \left(\frac{a}{n} + a\right)\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}};$$

$$b^{n-1} \leq \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot a^n = C(n) \cdot a^n. \tag{5}$$

Om likhetstecknet gäller i (5), tangera kurvorna varandra i D. Men villkoret för att punkten A skall ligga nedanför B är

$$\frac{b}{a} < \sqrt[n]{b} \quad \because \; b^{n-1} < a^n; \tag{6}$$

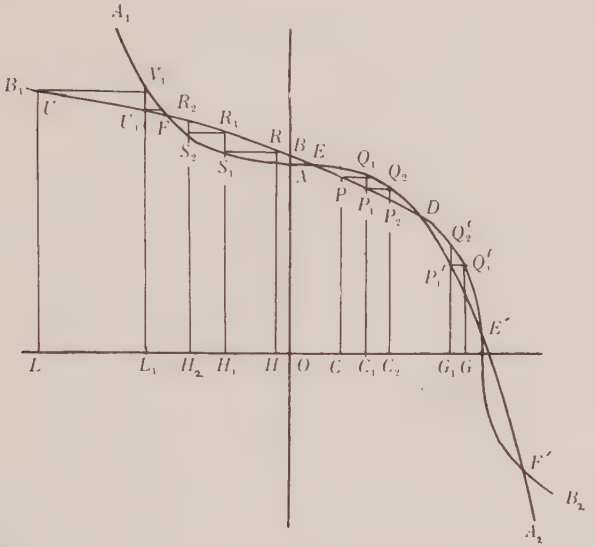


Fig. 2.

och att detta villkor är uppfyllt, följer av (5). Man ser nämligen lätt, att $C(n) < 1$ för alla heltalsvärden > 1. För övrigt kan detta fall betraktas som gränsfall till fig. 2, när E sammanfaller med D. I detta specialfall är emellertid approximationsmetoden onödig, ty (4) ger omedelbart roten

$$T = \sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}.$$

Om däremot villkoret

$$b^{n-1} > C(n) \cdot a^n \tag{5a}$$

är uppfyllt, erhålles fig. 2, där A-kurvan ligger ovanför B-kurvan närmast till vänster om D. Vi funno i fig. 1, att om till t_1 valdes ett x-värde inom ett intervall, där A-kurvan låg nedanför B-kur-

van, gav (3) en rad växande t-värden. För de intervall, där A-kurvan låg överst, blevo t-värdena avtagande. Om man således använder (3) och för t_1 väljer x-koordinaten för en punkt mellan E och D i fig. 2, blir E gränspunkt för punkterna P_i. Börjar man inom intervallet mellan D och E', blir E' gränspunkt. Ekvationerna (3) leda således ej till roten T. Men metoden är reversibel. Använder man därför i stället (2) och utgår från $t_1 = OC$ eller

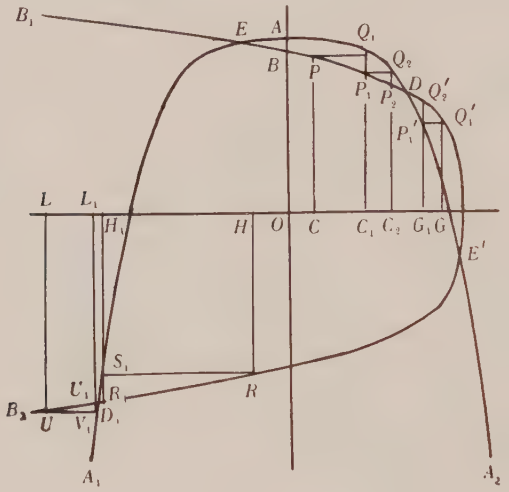


Fig. 3.

$t_1 = OG$, får man lim $t_1 = T$. Utgår man däremot från $t_1 = OH$ eller $t_1 = OL$, får man lim $t_{2r-1} = X$, lim $t_{2r} = Y$, om $F = (X, Y)$. På grund av symmetrin är $F' = (Y, X)$, och utgår man från en punkt till höger om E', får man lim $t_{2r-1} = Y$, lim $t_{2r} = X$. Formeln (2) ger således roten T, endast om man utgår från en punkt mellan E och E'. Om villkoret

$$b^{n-1} > a^n \tag{6a}$$

är uppfyllt, ligger A ovanför B och således E till vänster om y-axeln. I detta fall kan man för t_1 välja hur litet positivt värde som helst. Emellertid kunna skärningspunkterna E och F saknas, i det att A-kurvan i hela sin sträckning till vänster om D ligger ovanför och till höger om D nedanför B-kurvan. Då ger (2) lim $t_r = T$, hur man än väljer t_1.

Om n är jämnt, har (1) en positiv rot T och en negativ $-T_1$. Punkterna $D = (T, T)$ och $D_1 = (-T_1, -T_1)$ bliva skärningspunk-

terna mellan kurvorna (*A*) och (*B*). Vi antaga först, att villkoret (5a) är uppfyllt. Då ligger *A*-kurvan ovanför *B*-kurvan närmast till vänster om *D* (fig. 3). Använder man (2) och för t_1 väljer x-koordinaten för en punkt mellan *E* och *E'*, får man lim $t_r = T$. Om speciellt villkoret (6a) är uppfyllt, ligger punkten *A* ovanför *B* såsom i figuren och således *E* till vänster om y-axeln. Man kan då utgå från hur små positiva t_1-värden som helst.

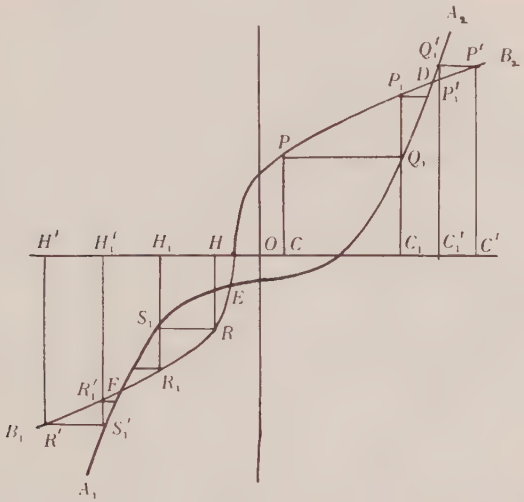


Fig. 4.

Om däremot olikheten (5) gäller, ligger *A*-kurvan nedanför *B*-kurvan mellan y-axeln och punkten *D* (jfr fig. 1). För att bestämma den positiva roten använder man (3) och utgår lämpligen från ett t_1-värde, som är positivt eller 0 och ger ett positivt t_2-värde:

$$0 \leq t_1 < \sqrt[n]{b}.$$

Liksom vid udda n finner man då, att lim $t_r = T$.

Vare sig (5) eller (5a) gäller, måste man för att erhålla den negativa roten $-T_1$ använda (2) och naturligtvis varje gång välja den negativa n:te roten. Man får då lim $t_r = -T_1$.

Vi övergå nu till ekvationen

$$t^n - at = b. \qquad (a > 0,\ b > 0) \qquad (7)$$

För jämna n återkomma vi till (1) genom att utbyta t mot $-t$. För udda n har (7) alltid en positiv rot men kan även ha två negativa, eftersom funktionen $t^n - at - b$ får negativt värde för $t = 0$ och

har ett maximum för

$$t = -\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}.$$

Rötternas antal blir 3, om maximet är positivt, vilket ger villkoret

$$\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

I fig. 4 motsvara kurvorna A_1A_2 och B_1B_2 ekvationerna

$$x^n - ay = b; \qquad (A_1)$$

$$y^n - ax = b. \qquad (B_1)$$

Skärningspunkterna D, E och F motsvara $x = y = T_1$, $x = y = T_2$ och $x = y = T_3$, där T_i äro rötterna till (7). Av figuren synes, att (2) ger lim $t_r = T_1$, om man väljer $t_1 > T_2$, och lim $t_r = T_3$, om man utgår från $t_1 < T_2$. För att erhålla roten T_2 får man använda (3) och välja t_1 mellan T_3 och T_1. Om (7) har endast en rot, saknas skärningspunkterna E och F. Formeln (2) ger då lim $t_r = T_1$, hur man än väljer t_1.

Slutligen skola vi betrakta det fall, då b är negativt i (1) eller (7). Om n är udda, återkomma vi till positivt b genom att utbyta t mot $-t$. Om n är jämnt, kan ekvationen, eventuellt efter utbyte av t mot $-t$, skrivas

$$t^n - at + b = 0. \qquad (a > 0,\ b > 0) \qquad (8)$$

Eftersom vänstra membrum är positivt för $t = 0$ och får minimum för ett positivt t-värde, kan ekvationen sakna rötter eller ha två positiva rötter T och T_1. För det senare fallet fordras, att minimet är negativt, vilket ger villkoret

$$\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

Kurvorna A_1A_2 och B_1B_2 i fig. 5 motsvara ekvationerna

$$ay = x^n + b;$$
$$ax = y^n + b.$$

Skärningspunkterna äro $D = (T, T)$ och $D_1 = (T_1, T_1)$. Använder man (3) och utgår från ett positivt t_1-värde $< T$, blir lim $t_r = T_1$ (se fig.). Använder man (2) och väljer $t_1 > T_1$, blir lim $t_r = T$.

Resultaten kunna sammanfattas i följande regel: Man använder (2) eller (3), allteftersom vinkelkoefficienten för A-kurvans tangent i den mot roten svarande punkten uppfyller villkoret $|k| > 1$ eller $|k| < 1$. För att lättare förstå övergången till det allmänna fallet skriva vi A-kurvans ekvation

$$y = \frac{b - x^n}{a} \tag{9}$$

och observera, att rötterna kunna betraktas som skärningspunkter mellan A-kurvan och linjen

$$y = x. \tag{L}$$

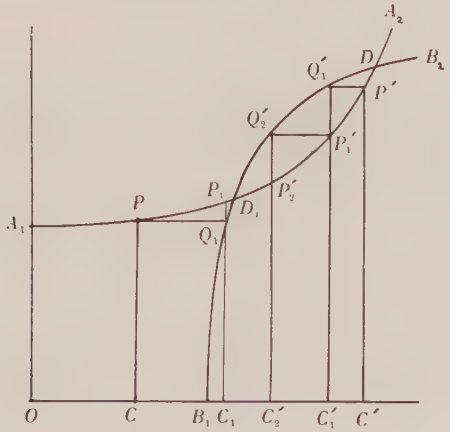


Fig. 5.

Vi se t. ex. på fig. 1 och tänka oss B-kurvan borttagen och ersatt med linjen L. Utgå vi från $t_1 = OC$, erhålles som förut $t_2 = CP$. Från P drages linjen $y = t_2$, som träffar L i N_1 (ej utritat i figuren). Från N_1 drages linjen $x = t_2$, som träffar A-kurvan i Q_1', och man får $t_3 = GQ_1'$. Från Q_1' drages linjen $y = t_3$, som träffar L i N_2, och från N_2 linjen $x = t_3$, som träffar A-kurvan i P_1. Man har då $t_4 = C_1P_1$ o. s. v. Punkterna P, N_1, Q_1', N_2, P_1 ... närma sig spiralformigt till punkten D.

Metoden kan nu generaliseras till att gälla för en ekvation

$$f_1(x) = f_2(x),$$

där godtyckliga (även transcendenta) funktioner kunna förekomma. Om X är en rot och

$$|f_1'(x)| \leq |f_2'(x)| \tag{10}$$

inom ett intervall (x_0, X), ger rekursionsformeln

$$f_1(x_r) = f_2(x_{r+1})$$

roten X, om utgångsvärdet för x väljes inom detta intervall. Om $f_1'(x)$ och $f_2'(x)$ ha samma tecken, får man en trappstegslinje, lik-

nande $PQ_1P_1Q_2\ldots$ i fig. 1. Om derivatorna ha olika tecken, får man en spirallinje, liknande den nyss beskrivna $PN_1Q_1'N_2P_1\ldots$ I senare fallet är det angivna villkoret ej alltid tillräckligt. Om det ej gäller för tillräckligt stort område på *båda* sidor om X, kan det hända, att x_3 faller utanför intervallet $x_1\ldots X$. Å andra sidan är villkoret ej nödvändigt. Tillämpar man det på ekvationen (9), finner man, att villkoret för att rekursionsformeln (2) eller (3) skall kunna användas, skulle vara

$$|k|>1, \text{ resp. } |k|<1, \tag{11}$$

om k är A-kurvans vinkelkoefficient. Emellertid visa figurerna, att man kan utgå från x-värden, som ligga utanför det intervall, där villkoret (11) är uppfyllt. Metodens användbarhet förutsätter naturligtvis, att ekvationen $f_2(x)=a$ är lätt att lösa. Såsom ett exempel anför jag efter Whittaker-Robinson en av Newton angiven metod för beräkning av kvadratrötter: för beräkning av $x=\sqrt{N}$ användes rekursionsformeln

$$x_{n+1}=\tfrac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right).$$

Ekvationen $x^2=N$ kan ju skrivas

$$x=\tfrac{1}{2}\left(x+\frac{N}{x}\right).$$

Om anpassning av polynom enligt minsta kvadratmetoden.

Av GUNNAR BLOM.

Fil. lic. S. Hilding gav i tidskriftens septemberhäfte ett bevis för en sats om approximation av en funktion i ett oändligt intervall och använde därvid en hjälpsats, som i sin allmänna form lyder:

Om $P(y)$ är ett givet polynom, kan man för ett godtyckligt litet $\varepsilon > 0$ finna ett polynom $Q(y)$, så beskaffat att

$$\int_0^1 \left[P(y) - Q\left(\ln \frac{1}{y}\right)\right]^2 dy < \varepsilon. \tag{A}$$

Förf. härledde denna sats med hjälp av ortogonala polynom samt en Fourier-transformation. Följande båda bevis, som äro i princip identiska, bygga på minsta kvadratmetoden.

a) Liksom i den nämnda uppsatsen bevisas satsen först för specialfallet $P(y) = y^{k-1}$. Sätt

$$J(n,k) = \int_0^1 \left[y^{k-1} - Q_k(x)\right]^2 dy, \tag{1}$$

där $Q_k(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ och $x = \ln \frac{1}{y}$, och sök minimum för J, då $a_0 \ldots a_n$ variera. Genom att sätta derivatorna i avseende på $a_0 \ldots a_n$ lika med noll finner man

$$\int_0^1 y^{k-1} x^i dy = \int_0^1 (a_0 x^i + a_1 x^{i+1} + \ldots + a_n x^{i+n}) dy \quad (i = 0, 1 \ldots n).$$

Om den i:te ekvationen i detta system multipliceras med a_i och ekvationerna adderas, erhålles

$$\int_0^1 y^{k-1} Q_k(x) dy = \int_0^1 Q_k^2(x) dy.$$

Härav följer

$$J_{\min} = \int_0^1 y^{2k-2} dy - 2 \int_0^1 y^{k-1} Q_k(x) dy + \int_0^1 Q_k^2(x) dy =$$

$$= \frac{1}{2k-1} - \int_0^1 y^{k-1} Q_k(x) dy. \tag{2}$$

Den sista integralen, som betecknas S_n, kan beräknas på följande sätt. Av

$$\int_0^1 y^{k-1}x^i dy = \int_0^\infty e^{-kx}x^i dx = \frac{i!}{k^{i+1}}$$

och

$$\int_0^1 x^{i+} \, dy = (i+j)!$$

följer, att, med införande av beteckningen $p = \frac{1}{k}$, ovanstående ekvationssystem samt S_n kunna skrivas

$$\begin{aligned}
a_0 + \quad & 1!\,a_1 + \quad 2!\,a_2 + \ldots \quad n!\,a_n = p \\
1!\,a_0 + \quad & 2!\,a_1 + \quad 3!\,a_2 + \ldots (n+1)!\,a_n = 1!\,p^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n!\,a_0 + (n+1)!\,a_1 + (n+2)!\,a_2 + \ldots \quad & (2n)!\,a_n = n!\,p^{n+1} \\
p a_0 + \quad 1!\,p^2 a_1 + \quad 2!\,p^3 a_2 + \ldots n!\,p^{n+1} & a_n = S_n .
\end{aligned}$$

Detta ekvationssystem i $a_0 \ldots a_n$ är överbestämt, varför determinanten över alla koefficienterna är noll. Om de $(n+1)$ första raderna och kolonnerna i denna divideras med $1, 1!, 2! \ldots n!$, erhålles

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & p \\
1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \ldots & \binom{n+1}{1} & p^2 \\
1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \ldots & \binom{n+2}{2} & p^3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & \binom{n+1}{n} & \binom{n+2}{n} & \ldots & \binom{2n}{n} & p^{n+1} \\
p & p^2 & p^3 & \ldots & p^{n+1} & S_n
\end{vmatrix} = 0.$$

Denna determinant transformeras med hjälp av formeln $\binom{n}{m} \binom{n-1}{m} - \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{m-1}$ på följande sätt: den $(n+1)$:sta kolonnen minskas med den n:te, den n:te med den $(n-1)$:sta etc., t. o. m. den andra med den första, därefter på nytt den $(n+1)$:sta med den n:te etc., t. o. m. den tredje med den andra etc. Därefter behandlas de $(n+1)$ översta raderna på samma sätt. Om slutligen den sista raden och den sista kolonnen divideras med p, erhålles

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & p-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & (p-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (p-1)^n \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & \dots & (p-1)^n & \frac{S_n}{p^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Genom att minska den sista kolonnen med summan av de föregående, i ordning multiplicerade med 1, $p-1$, $(p-1)^2 \dots (p-1)^n$ kan man lätt räkna ut denna determinant. Man finner

$$S_n = p^2\left[1 + (p-1)^2 + \dots + (p-1)^{2n}\right], \tag{3}$$

varav följer

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p^2}{1 - (p-1)^2} = \frac{1}{2k-1}$$

och enligt (2) $\lim_{n\to\infty} J_{\min}(n, k) = 0$.

$Q_k(x)$ kan alltså bestämmas så, att för ett godtyckligt $\varepsilon_k > 0$

$$\int_0^1 \left[y^{k-1} - Q_k(x)\right]^2 dy < \varepsilon_k. \tag{4}$$

Återstoden av beviset överensstämmer i princip med det i den nämnda uppsatsen givna. Då emellertid den allmänna satsen där icke kommer till uttryck explicit, genomföres här den enkla räkningen.

Om $P(y) = c_0 + c_1 y + \dots + c_m y^m$ och man väljer $Q(x) = c_0 Q_1(x) + c_1 Q_2(x) + \dots + c_m Q_{m+1}(x)$, följer av (4) och av Minkowskis olikhet

$$\left[\int_0^1 (P(y) - Q(x))^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_{k=1}^{m+1} |c_{k-1}| \left[\int_0^1 (y^{k-1} - Q_k(x))^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} < \sum_{k=1}^{m+1} |c_{k-1}| \sqrt{\varepsilon_k}.$$

Om man för de k-värden, för vilka $c_{k-1} \neq 0$, väljer $\sqrt{\varepsilon_k} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2^k |c_{k-1}|}$

erhålles

$$\sum_{k=1}^{m+1} |c_{k-1}| \sqrt{\varepsilon_k} = \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) < \sqrt{\varepsilon},$$

varmed satsen är bevisad.

b) Samma resultat kan — med något längre räkningar — erhållas utan införande av polynomen $Q_k(x)$. Om nämligen integralen i (A),

$$J(m, n) = \int_0^1 \Big[P(y) - Q(x)\Big]^2 dy,$$

där $P(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_m y^m$ och $Q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, behandlas på samma sätt som (1), erhållas de med (2) och (3) analoga uttrycken

$$J_{\min}(m, n) = \int_0^1 (P(y))^2 dy - \int_0^1 P(y)\, Q(x)\, dy = \sum_{i,k=1}^{m+1} \frac{c_{i-1} c_{k-1}}{i + k - 1} - S_n \quad (5)$$

och

$$S_n = s_1^2 + \ldots s_n^2,$$

där

$$s_i = \sum_{k=1}^{m+1} c_{k-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1\right)^i.$$

Efter omformning erhålles

$$S_n = \sum_{i,k=1}^{m+1} \frac{c_{i-1} c_{k-1}}{ik} \left[1 + \left(\frac{1}{i} - 1\right)\left(\frac{1}{k} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1}{i} - 1\right)^n \left(\frac{1}{k} - 1\right)^n\right] =$$

$$= \sum \frac{c_{i-1} c_{k-1}}{i + k - 1} \left[1 - \left(\frac{1}{i} - 1\right)^{n+1} \left(\frac{1}{k} - 1\right)^{n+1}\right],$$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{i,k=1}^{m+1} \frac{c_{i-1} c_{k-1}}{i + k - 1}$ och enligt (5) $\lim_{n \to \infty} J_{\min}(m, n) = 0.$

Några exempel på katodstråleoscillografens användning.

Av EINAR BERGQUIST och BIRGER GRUNDSTRÖM.

I anslutning till artikeln i marsnumret i år över katodstråleoscillografens konstruktion och arbetssätt,[1] skola vi här nedan visa några exempel på katodstraleoscillografens användning, särskilt med hänsyn till undervisningen i läroverk och tekniska skolor.

De kommersiella typer av katodstråleoscillografer, som numera föras i marknaden, äro bekväma att använda och lätta att transportera. Alla erforderliga delar äro inbyggda i en gemensam kåpa, och apparaterna äro komplett färdiga att anslutas till nätet. Tidigare bestod oscillografen av ett antal separata delar, som vid användandet först maste hopkopplas, varigenom dess användning blev betydligt mera tidsödande än vad som nu är fallet. Bortsett från alla andra fördelar är katodstråleoscillografen således mycket tidsbesparande vid gymnasieundervisningen i jämförelse med exempelvis forna tiders strängoscillografer.

Katodstråleoscillografen matas med växelström 50 p/s och är i regel omkopplingsbar för olika spänningar mellan 110—250 V. Den är ett mekaniskt tåligt instrument, som uthärdar avsevärda skakningar och stötar utan att taga skada. Beträffande de spänningar, som kunna anslutas till oscillografen, hänvisa vi till respektive fabrikanters bruksanvisningar.

Finnas flera jorduttag på oscillografen, bör man se till, att spänningsförande ledningar med olika potential ej samtidigt anslutas till dessa kontakter. Vidare böra spänningsförande ledningar ej komma i beröring med chassiet. Man bör ej heller låta elektronstrålen stå och bränna på en enda punkt på skärmen under någon längre tid.

Med katodstråleoscillografen kan en mångfald företeelser av grundläggande betydelse inom fysik och elektroteknik instruktivt åskådliggöras, såsom fasförskjutning, induktionsfenomen, rörlikriktning, hysteresiskurvor, rörkarakteristiker, klanganalys etc., och vi skola här nedan visa några enkla kopplingar, som härvid kunna

[1] E. BERGQUIST, Katodstråleoscillografen, Elementa *27*, (1944), s. 13.

användas. De i samband med de olika försöken angivna värdena på motstånd, spolar, kondensatorer etc. ha vid försök använts av författarna, men givetvis kunna även andra kombinationer prövas.

Katodstråleröret förutsätta vi har en känslighet av 0,5 mm/V, och i figurerna ha vi endast schematiskt inritat de 4 avböjningsplattorna.

1. Statisk avböjning av elektronstrålen.

Önskar man förskjuta elektronstrålen i horisontell riktning på skärmen, anslutes ett batteri på t. ex. 60 V mellan plattorna P_1 enligt fig. 1. P_1 betecknar det plattpar, horisontalplattorna, vilket åstadkommer horisontell avböjning. I anslutningsögonblicket gör punkten på skärmen ett språng i riktning mot den positiva plattan.

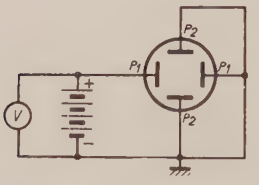


Fig. 1. Statisk avböjning av katodstrålen.

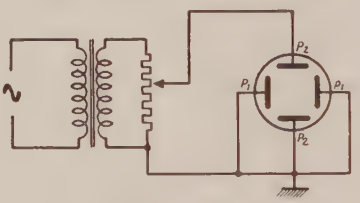


Fig. 2. Uppmätning av en växelspännings amplitud.

Avböjningens storlek är direkt proportionell mot spänningen på plattorna, och utslaget blir i detta fall $60 \times 0{,}5 = 30$ mm. Växlar man om anslutningssladdarna till ingången på oscillografen, avböjes elektronstrålen i motsatt riktning. På liknande sätt åstadkommes avböjning i vertikal riktning genom anslutning till plattparet P_2, de s. k. vertikalplattorna.

2. Växelspänningens amplitud.

Man ansluter en växelspänning om ca 60 V till vertikalplattorna P_2. Denna spänning kan erhållas från växelströmsnätet med hjälp av en transformator (fig. 2). Under inverkan av växelfältet kommer den lysande punkten att förflytta sig mycket snabbt upp och ned på skärmen, och då ögat, på grund av sin tröghet, ej kan följa denna rörelse, kommer man att uppfatta punktens förflyttning som en heldragen, lysande linje. Linjens längd är direkt proportionell mot växelspänningens amplitud och alltså ett mått på denna. Är effektiva spänningen t. ex. 60 V, är amplituden $60 \times \sqrt{2} = 85$ V, och då utslaget på skärmen äger rum i två riktningar, blir linjens längd $2 \times 85 \times 0{,}5 = 85$ mm.

Vid mindre skärmdiameter måste givetvis en motsvarande lägre spänning väljas. Ett större utslag än skärmdiametern skadar dock ej röret, så länge den angivna maximalspänningen ej överskrides.

3. Växelströmskurvans form.

Med den i föregående försök använda kopplingen får man ej fram växelströmskurvans form. För att få en uppfattning härom kunde vi ha betraktat den löpande punktens rörelse i en roterande spegel, som användes till äldre oscillografer. Det är emellertid enklare att använda katodstråleröret självt för att betrakta kurvformen genom att inkoppla tidsaxelanordningen.

Till plattorna P_2 (fig. 3) ansluta vi åter en växelspänning, t. ex. från belysningsnätet, med ett värde av ca 60 V. Till plattorna P_1 ansluta vi därefter kippspänningen från den i oscillografen in-

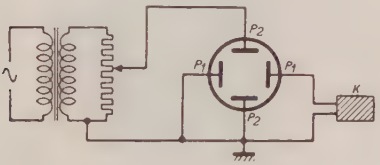


Fig. 3. Återgivning av en växelspännings kurvform.

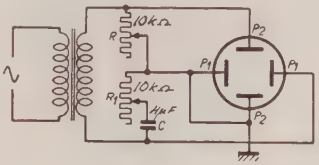


Fig. 4. Koppling för åskådliggörande av fasförskjutning mellan resistans och kapacitans.

byggda kippapparaten, K. Denna kippapparat har närmare beskrivits i ovan nämnda artikel om katodstråleoscillografen (sid. 19). Om kippspänningen är synkron med spänningen mellan plattorna P_2, erhålla vi på fluorescensskärmen den kända sinuskurvan, som återgiver belysningsnätets kurvform.

Om kippspänningen ej är synkron med mätspänningen, erhålles en rörlig figur, ett slags fortskridande vågrörelse, på skärmen.

Väljer man kippfrekvensen hälften så stor som frekvensen hos den spänning, man skall undersöka, erhålles två hela sinussvängningar efter varandra. Lika många gånger som kippfrekvensen är lägre än frekvensen mellan plattorna P_2, lika många hela sinussvängningar erhålles efter varandra på skärmen.

Då nätfrekvensen i regel ej är rent sinusformad, kan man iakttaga avvikelser från den ideala sinusformen (översvängningar) och härigenom bilda sig en uppfattning om spänningskurvans renhet.

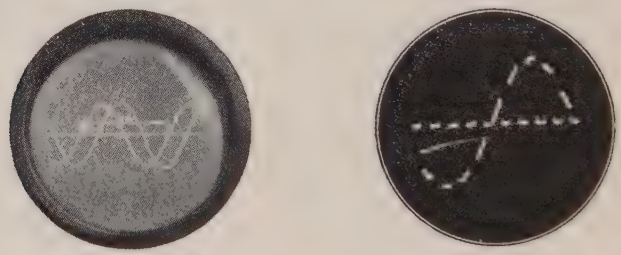
4. Fasförskjutning.

Fasförskjutning i induktiva och kapacitiva kretsar kan åskådliggöras på följande sätt.

a. Lägger man en spänning på vardera plattparet i oscillografen men med olika fas och amplitud, kommer man på skärmen att erhålla en bild (Lissajou-figur), som är direkt bestämd till sin form av de båda spänningarnas fas- och amplitudförhållanden.

I fig. 4 har angivits, hur man kan tillföra spänningar med olika fas och amplitud till de båda plattparen.

På plattparet P_2 ligger den växelspänning, som erhålles över motståndet R (variabelt upp till 10 000 ohm), medan på det andra plattparet P_1 ligger spänningen, som erhålles över ett variabelt motstånd R_1 om 10 000 ohm och en kondensator C_2 om 4 μF, vilka



a *b*

Fig. 5. Registrering av två förlopp samtidigt med hjälp av elektronkopplare. *a.* fasförskjutning avläses direkt; *b* visar hur elektronkopplaren arbetar.

kopplats i serie. Dessa värden äro avpassade för en frekvens av 50 p/s. Till att börja med urkopplas motståndet R_1. Inställes nu motståndet R så, att motstånden i R och C äro lika stora, likaså spänningarna över R och C, erhålles på skärmen en cirkel, om spänningarna äro sinusformade. Spänningarna äro då 90° fasförskjutna i förhållande till varandra. Avvikelser från sinusformen yttra sig som oregelbundenheter i cirkelformen.

Ändrar man därefter inställningen på motståndet R, blir fortfarande fasförskjutningen 90°, men spänningarna över R och C äro ej längre lika stora, och cirkeln övergår i en ellips. På liknande sätt kan fasförskjutningen genom självinduktion demonstreras, om kondensatorn utbytes mot en spole.

Slutligen kan man dessutom helt eller delvis inkoppla R_1, varigenom fas och amplitud hos spänningen på plattorna P_1 ändras.

b. Med hjälp av en s. k. elektronkopplare eller en dubbelstråleoscillograf kan man samtidigt visa två förlopp, t. ex. växelspänningarna över R och C i fig. 4, som funktion av tiden. Härvid får man även fram fasförskjutningen mellan de två kurvorna (fig. 5 a).

Vid användning av elektronkopplare ansluter man båda mätspänningarna till denna, varefter elektronkopplaren anslutes till ingången på katodstråleoscillografen.

Elektronkopplaren utgöres i princip av en multivibrator med två förstärkarrör, som arbeta växelvis med en omkopplingsfrekvens av 10 000 p/s. I fig. 5 b kunna vi se, hur de båda förstärkarrören arbeta växelvis, och hur kurvorna sammansättas av korta streck. Väljes tidaxelfrekvensen låg i förhållande till omkopplingsfrekvensen, sammansmälta de korta strecken till heldragna linjer.

5. Undersökning av magnetfält och induktionsfenomen.

Vill man visa, hur ett magnetfält inverkar på en solenoid eller hur kraftlinjerna förlöpa i ett magnetfält, kan man gå till väga på följande sätt:

Man skaffar sig en högohmig solenoid, vilken anslutes till ingången på oscillografen. Kippspänningen i oscillografen sättes så låg som möjligt. Föres en magnet raskt fram och tillbaka förbi solenoidens ena ända, kan man iakttaga en sinusformad svängning på katodstrålerörets skärm. Placeras en liten järnbit inuti spolen, ökar utslaget på skärmen avsevärt. Om en stämgaffel gnides mot en magnet samt därpå sättes i svängning i närheten av solenoiden, kan man se en tydlig, sinusformad kurva på skärmen, vars frekvens beror av stämgaffelns svängningstal.

En till oscillografen ansluten solenoid hålles i närheten av en annan solenoid, som matas med växelström. Oscillografen registrerar då den inducerade växelspänningen. Införes ett järnstycke i de två solenoiderna, ökar spänningen i sekundärkretsen och utslaget på skärmen, vilket visar fördelen av att använda en järnkärna i en transformator. Ändrar man avståndet mellan de två spolarna, åskådliggöres verkan hos en variometer.

Har man en spole ansluten till en växelspänning och håller en annan liten spole i närheten, kan man se, vilken riktning kraftlinjerna från den första spolen har genom att vrida den andra spolen i olika riktningar. Alltefter som den andra spolens axel ligger parallellt med eller vinkelrätt mot kraftlinjernas riktning får man maximi- eller minimiutslag.

6. Hysteresis.

De sedvanliga magnetiseringskurvorna för järn kunna lätt återgivas på en katodstråleskärm. Fig. 6 visar en härför lämplig koppling. Den magnetiserande kraften på järnet är proportionell mot magnetiseringsströmmen, och därför göres den horisontella avböjningen proportionell mot denna. I fig. 6 sker detta genom att ett motstånd insättes i serie med magnetiseringslindningen. Spänningen över detta motstånd, förstärkt om så behövs, anslutes till horisontalplattorna. Jordas en av huvudpolerna, bör en kondensator på 1 μF inkopplas i vardera ledningen för att förhindra kortslutning.

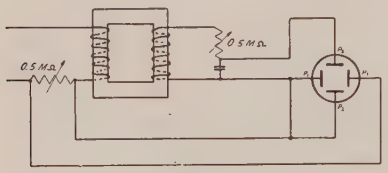


Fig. 6. Upptagning av en magnetiseringskurva för järn.

Fältintensiteten bestämmes genom att mäta spänningen, som induceras i en sekundärlindning. För exakthetens skull bör denna sekundärlindning vara liten och skild från primärlindningen, så att den endast motsvarar flödet, som finnes i järnkretsen. Den momentana inducerade spänningen V är proportionell mot flödesändringen $\frac{dB}{dt}$, och det är därför nödvändigt att integrera spänningen, $B = \int V dt$, för att erhålla en avböjning proportionell mot B. Detta kan ske genom en inkoppling av motstånd och kondensator såsom visas i fig. 6.

För demonstrationsändamål kan man använda en lämplig transformator med ett motstånd i serie med primärlindningen. Spänningen för den vertikala avböjningen uttages från en lämplig sekundärlindning kopplad över ett fasförskjutande element. Det bör observeras, att om magnetiseringsströmmen är otillräcklig för att mätta järnet, kommer kurvan som erhålles endast att bli en lätt förvriden ellips.

7. Akustiska svängningar.

Undersökning av ljudkurvors form (klanganalys) kan ske med hjälp av en kristallmikrofon eller elektromagnetisk högtalare, vilken anslutes till oscillografen.

Använder man en elektromagnetisk högtalare, måste man se till, att belastningsimpedansen svarar mot ingångsimpedansen i oscillografen. Lämpligt värde på impedansen kan erhållas genom inkoppling av en lämplig transformator (högtalartransformator) mellan högtalaren och oscillografen, varigenom även känsligheten avsevärt kan höjas. Sätter man högtalaren i svängning genom att alstra en

ton av något slag omedelbart framför densamma, kan man på skärmen iakttaga kurvformen.

8. Elektronrörets karakteristik.

Ett viktigt användningsområde för katodstråleoscillografen är upptagandet av rörkarakteristiker, och vi skola här visa exempel på en koppling, fig. 7, som kan användas för åskådliggörande av anodströmmen som funktion av gallerspänningen (I_a / V_g-karakteristiken) hos en triod vid konstant anodspänning. Vid försöket användes lämpligen ett rör av typen Philips E 424 N.

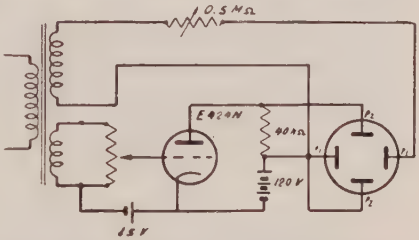
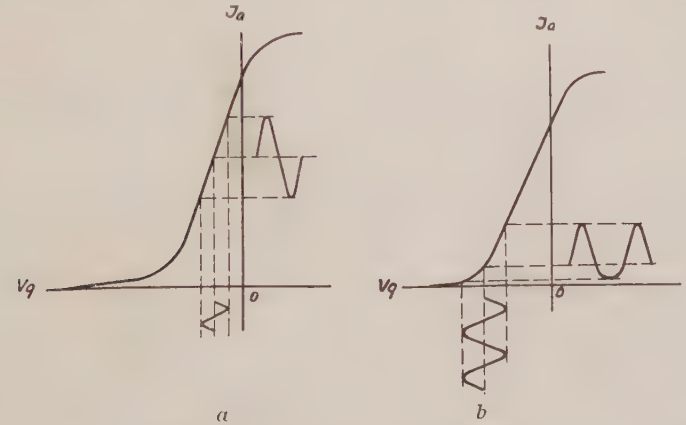


Fig. 7. Upptagning av karakteristiken för ett radiorör.

Till ingångsgallret anslutes, förutom den negativa gallerförspänningen på 1,5 V, en växelspänning med en amplitud på ca 2 V. En växelspänning med samma frekvens och fas bör med lämplig amplitud, t. ex. 50 V, läggas mellan plattorna P_1. Anodspänningen inställes på 120 V.

Spänningen över anodmotståndet är proportionell mot anodströmmen och lägges mellan plattorna P_2.

Vid det ovan angivna röret bör man välja ett anodmotstånd på ca 40 000 ohm för att få lämplig höjd på kurvan.



a *b*

Fig. 8. Distorsionsfri (*a*) och förvrängd (*b*) återgivning av spänningen på ett radiorörs galler.

Vill man undersöka, hur röret arbetar som förstärkare, kan man koppla bort växelspänningen från plattorna P_1 och i stället koppla in kippspänningen. Avpassas nu den negativa gallerförspänningen så, att man arbetar på karakteristikens raka del (ca $-1{,}5$ V), kommer röret att på anodsidan återgiva växelspänningen på gallret så som fig. 8 a visar. Vi se således, att växelspänningsamplituden på anodsidan blir större än på gallret, om röret har en brant karakteristik.

Öka vi nu den negativa gallerförspänningen, så att arbetspunkten flyttas till karakteristikens nedre del, se vi, hur kurvan förvränges och distorsion uppträder (fig. 8 b). Vid för låg negativ gallerförspänning (exempelvis 0 V) förvränges kurvan på liknande sätt. Härvid blir det dock de positiva amplituderna, som undertryckas.

9. Elektronröret som likriktare.

Elektronrörets likriktarverkan kan instruktivt visas med hjälp av katodstråleoscillografen. Kopplingen framgår av fig. 9 a. Till sekundärsidan på en transformator kopplas en duodiod, och ut-

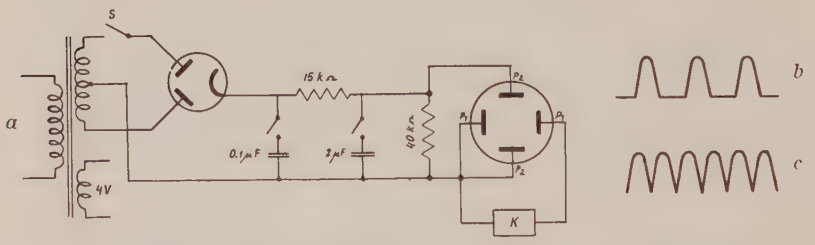


Fig. 9. Radioröret som likriktare: *a*. koppling; *b* och *c* den likriktade växelströmmen vid halvvågs- resp. helvågslikriktning.

gångsspänningen från röret anslutes över ett motstånd R till plattparet P_2 i katodstråleoscillografen. Inkopplas nu kippspänningen synkront med den ursprungliga växelspänningen, få vi en stillastående bild på skärmen. Vid öppen strömbrytare s (enkel likriktning) erhålles en kurva enligt fig. 9 b, och vid sluten strömbrytare (dubbel likriktning) erhålles en kurva enligt fig. 9 c. Inkopplas därefter kondensatorerna C_1 och C_2 efter varann, se vi, hur kurvan mer och mer får formen av en rät linje, d. v. s. spänningen filtreras. Såsom värden på kondensatorer och motstånd kunna exempelvis väljas $C_1 = 0{,}1\ \mu$F, $C_2 = 2\ \mu$F och $R = 40\ \text{k}\Omega$. För bättre filtrering inkoppla vi ett motstånd $R_1 = 15\ \text{k}\Omega$.

10. Dämpade svängningar.

Svängningskretsen, fig. 10 a, består av en kondensator C, som stegvis kan varieras mellan värdena 0,05, 0,1 och 2 μF, samt en spole P på omkring 300 varv, vilken samtidigt utgör primärspole i transformatorn, vars sekundärspole S, 1 200 varv, kopplas till vertikalplattorna i oscillografen. Som transformator användes exempelvis den i våra skolor vanliga Phywe-transformatorn. Kippspänningen K anslutes till horisontalplattorna. I svängningskretsen insättes även ett motstånd R på några få ohm, för att man skall kunna visa dämpningens beroende av motståndet. Svängningskretsen matas med likspänning. Då strömbrytaren B står i läge I laddas konden-

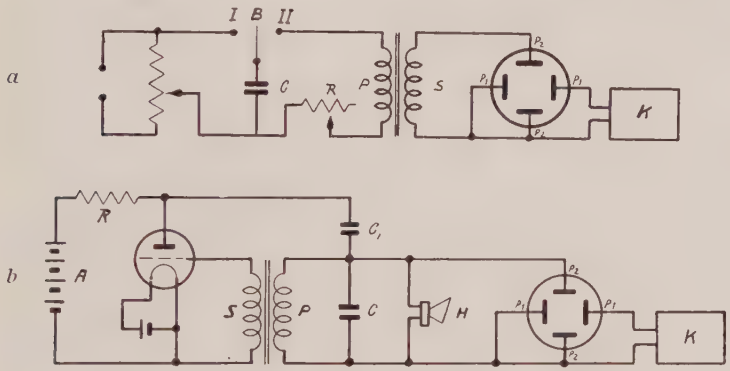


Fig. 10. Alstring av dämpade (a) och odämpade (b) svängningar.

satorn upp, och i läge II laddas den ur genom P, varvid ett kortvarigt svängningsförlopp erhålles. Upp- och urladdningen sker sålunda för hand. Givetvis kunde man istället för strömbrytaren B använda en brytareanordning, synkroniserad med kippspänningen; svängningsförloppet kommer då att automatiskt avbildas var gång lyspunkten föres över oscillografskärmen. Man når emellertid ett gott resultat även med det här angivna enkla förfarandet.

11. Elektronröret som generator av odämpade svängningar.

Ur undervisningssynpunkt kan det vara lämpligt att koppla in samma svängningskrets, som användes för dämpade svängningar, i anodkretsen hos ett elektronrör, t. ex. Philips B 409, eller Tungsram L 414. Givetvis kunna även andra variationer än de i fig. 10 b angivna prövas. C_1 är en relativt stor kondensator, 1 μF, som tillåter lågfrekvensen att passera men hindrar likström från anod-

batteriet A att gå genom svängningskretsen. R är ett stort motstånd, 10 000 ohm, som förhindrar att lågfrekvensen kortslutes genom batteriet. Genom att stegvis variera kondensatorn C eller också självinduktionen L, vilket enklast sker genom att sakta lyfta av oket hos transformatorn, erhålles odämpade svängningar med variabelt svängningstal. Med den här beskrivna, enkla anordningen erhållas sinusformade kurvor för svängningar upp till minst 5 000 p/s. Vid högre frekvenser förorsakar järnkärnan i transformatorn mer eller mindre kraftig distorsion i kurvformen. Det är mycket instruktivt att samtidigt med oscillografen koppla in en högtalare H. Auditoriet kan då på samma gång både höra och »se» ljudet.

Litteratur: John F. Rider, The cathode-ray tube at work; J. H. Reyner, Cathode-ray oscillographs.

Om uppg. 6 i allmän kurs, nov. 1944.

Vid några tidigare tillfällen har påpekats, att man vid lösning av rymdgeometriska uppgifter ej så sällan har god nytta av kunskap i projektionsritning.[1] Ovannämnda uppgift är ett nytt exempel härpå. Med hjälp av projektion erhålles en enklare lösning än den å sid. 248 i detta häfte anförda. Beträffande beteckningar hänvisas till nämnda lösning.

Kuben projicieras på ett plan vinkelrätt mot kubdiagonalen $CD(=d)$. Då alla kubens kantlinjer (a) bilda samma vinkel med $d\left(\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, bli deras projektioner lika $\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Om punkten O är d:s projektion, bli projektionerna av de sex kantlinjer, som träffa d, radier i en cirkel med O till medelpunkt; projektionerna av de sex kantlinjer, som ej träffa d, bli sidor i en i denna cirkel inskriven regelbunden sexhörning.

Låt P_1, A_1, B_1, M_1 vara projektionerna av P, A, B, M; då är OA_1B_1 en liksidig triangel med sidan $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ och $OP_1=h$. Man får då omedelbart $h_{\max}=OA_1=OB_1=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ och $h_{\min}=OM_1=$ $=a\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Sätt $P_1M_1=x_1$, där $x_1=x\sqrt{\frac{2}{3}}$ är projektionen av x, så erhålles $h^2=\overline{M_1O}^2+\overline{P_1M_1}^2=\frac{a^2}{2}+\frac{2x^2}{3}=\frac{3a^2+4x^2}{6}$ och $y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3a^2+4x^2}$. Se för övrigt svaret sid. 248.

Red.

[1] Se t. ex. Elementa, *26* (1943), s. 63.

Demonstrationsförsök med glimlampa.

Av BÖRJE SVENSSON.

Vid den av Kursverksamheten vid Stockholms Högskola sommaren 1943 anordnade kursen i fysik för folkskolans och läroverkens lärare utförde jag en del demonstrationer av elektriska försök med hjälp av signalglimlampor. Efter en kort beskrivning av glimlampans konstruktion och verkningssätt lämnas här en redogörelse för de utförda försöken, vilka kräva endast ringa hjälpmedel. En utförlig beskrivning av glimlampan och dess användning för vissa speciella uppgifter återfinnes i en artikel av C. E. Blom i Elementa, årg. *6*, 1922—23, s. 13 och 100.

En glimljuslampa, enligt nyare benämning glimlampa, är ett urladdningsrör i miniatyr. Vid en glimurladdning i ett rör, som drives med likström, kan man vid lämpligt tryck urskilja följande delar (fig. 1). Från anoden (*A*) räknat har man anodglimljus (*a*), positiva ljuspelaren (*b*), Faradays mörka rum (*c*), negativa glimljuset (*d*), Hittorfska eller Crookska mörka rummet (*e*) och första katodskiktet (*f*). Ett vanligt geisslerrör kräver ju som bekant hög spänning. Urladdningsspänningen bestämmes av flera faktorer: gasfyllningen och dess tryck, elektrodmaterialet och dess behandling, elektrodernas form och inbördes avstånd, urladdningsrörets storlek och form. Genom att lämpligt välja dessa faktorer lyckades Schröter 1918 konstruera en glimlampa med neonfyllning, som tände vid 150—200 volt.

I en glimlampa, som drives med likström, är katoden överdragen med ett lysande skikt, det negativa glimljuset. Övriga delar av glimurladdningen ha eliminerats. Ljusets färg beror av gasfyllningen; neon ger rött ljus. Uppkomsten av det negativa glimljuset får sin förklaring, om man beaktar, att de positiva gasjonerna ha ringa hastighet i jämförelse med elektronerna. På grund härav befinna sig gasjonerna i urladdningsrummet längre tid än elektronerna; mellan anoden och katoden utbildas därför en positiv rymdladdning, som ger upphov till en ojämn potentialfördelning i röret (fig. 1). Vid katoden uppträder ett stort potentialfall, katodfallet, där de från katoden utgående elektronerna erhålla stor hastighet. Omedelbart framför katoden äger därför en kraftig

jonisation rum, atomer och molekyler exiteras och ljus utsändes. Det är katodfallet, som bestämmer den spänning lampan behöver. Dess storlek beror såväl av gasens natur och tryck som av katodmaterialet. Katodfallet är mindre ju mer elektropositiv gasen är och ju lättare katoden avger elektroner. Lämpliga katodmaterial äro järn och aluminium. Genom att överdraga elektroderna med legeringar av jordalkalimetaller har man nått ned till en spänning

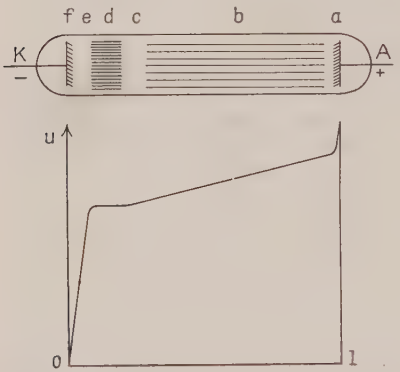


Fig. 1. Urladdning och potentialfördelning i ett Geisslerrör.

Fig. 2. Signalglimlampa.

på 70 volt. — Vid små strömstyrkor är endast en del av katoden överdragen med ljus. Inom vissa gränser är katodskiktets storlek ett mått på strömstyrkan, vilket utnyttjas vid den s. k. glimljusoscillografen.

En glimlampa har inom visst område en fallande karakteristik, dvs. spänningen över lampan minskar, då strömstyrkan ökar. Ohms första lag gäller inte. En utredning av den fallande karakteristiken och av nödvändigheten, att en glimlampa anslutes till en spänningskälla över ett motstånd, återfinnes i den ovan nämnda artikeln av C. E. Blom, till vilken jag hänvisar. Motståndet är vanligen inbyggt i sockeln till de i handeln förekommande lamporna.

Vid mina försök ha använts signalglimlampor, typ LG3 enligt Lumas katalog 1943—44, dels för 100—130 volt, dels för 200—230 volt[1]; pris kr. 3:15. De kunna erhållas i elektriska installationsaffärer och fattningen (liten Edison) i radioaffärer. Lamporna ha

[1] Enligt katalogen finnas signalglimlampor av denna typ för följande spänningsområden: 100—115, 115—130, 130—145, 145—160, 200—230, 230—260 volt; lamporna levereras på begäran utan motstånd.

cylindrisk form, längd 55 mm, diameter 16,5 mm. Den ena elektroden utgöres av en liten cirkelringskiva, den andra sitter några millimeter högre än denna och har formen av en cirkelskiva (fig. 2).

Först beskrivas några försök, som belysa lampans egenskaper, varefter följa demonstrationsförsök, där lampan tjänstgör som ett kvalitativt mätinstrument.

1. Tändspänning och släckspänning.

En glimlampa tänder vid en viss spänning, tändspänningen, och slocknar vid en viss, lägre spänning, släckspänningen. Den förra är mer konstant än den senare. Vid bestämning av dessa spänningar kan man använda en potentiometerkoppling enl. fig. 3 a

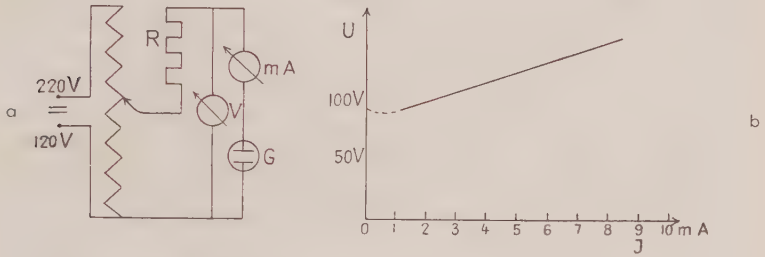


Fig. 3. Bestämning av karakteristiken för en glimlampa: *a.* koppling *b.* ström-spänningsdiagram.

(*R* i figuren utgår). Vill man samtidigt mäta strömstyrkan genom lampan, bör voltmetern anslutas så, som anges i figuren. Glimlampans motstånd är nämligen stort, kanske av samma storleksordning som voltmeterns. När lampan lyser, är strömstyrkan av storleksordningen några milliampère. Med en känslig galvanometer (10^{-6}—10^{-8} A) kan man påvisa ström genom lampan även då spänningen är lägre än tändspänningen; en s. k. mörk urladdning äger då rum.

2. Karakteristik.

För upptagande av en ström-spänningskarakteristik erfordras en lampa utan inbyggt motstånd. Ett högohmigt motstånd *R* (5 000—20 000 ohm), inkopplas enl. fig. 3 a. Det är av största vikt, att detta stora motstånd är inkopplat, ty om det saknas, utbildas omedelbart efter lampans tändning en bågurladdning, varvid lampans elektroder smälta ned; med stor sannolikhet förstörs även ampèremetern.

Man varierar *R* och får sålunda en serie sammanhörande ström-spänningsvärden. Vid en signalglimlampa torde det vara svårt att

få några punkter på den fallande delen av karakteristiken (fig. 3 b). Härför erfordras relativt hög spänning och ett mycket stort motstånd. För den stigande delen av karakteristiken (fig. 3 b) gäller approximativt $U = a + b\,I$, där a och b äro konstanter, varav framgår, att motståndet $= \frac{U}{I} = \frac{a}{I} + b$ är beroende av strömstyrkan; det minskar vid ökad spänning.

3. Demonstration av likström och växelström.

Lyser mittskivan vid en viss polning, lyser ringen vid omkastad polning. Glimlampan kan alltså användas som polsökare. I en likströmansluten glimlampa lyser den ena elektroden kontinuerligt; betraktas lampan i en roterande polygonspegel, ser man ett sammanhängande ljusband. Drives lampan med växelström, lysa elektroderna växelvis, och man ser i den roterande spegeln ett ljusband med avbrott, omväxlande smalare och bredare ljusa delar. Samma iakttagelser kunna göras utan roterande spegel; man behöver endast föra lampan hastigt fram och tillbaka framför ögat.

Ljusutvecklingen i glimlampan sker för frekvenser upp till 10 000 hertz nästan utan tröghet, dvs. ingen nämnvärd fasförskjutning uppträder mellan strömstyrka och ljusutveckling. Själva urladdningen utbildas på ca 10^{-7} sek. Detta betyder, att tändspänningen för växelström är praktiskt taget densamma som för likström, vilket utnyttjas i följande försök.

4. Bestämning av förhållandet mellan maximal och effektiv spänning.

Man bestämmer lampans tändspänning, U_0, för likström, varvid man observerar, att denna kan vara något olika för de båda elektroderna. Härefter bestämmes den effektiva spänning, U_{eff}, vid vilken lampan tänder för växelström. Härvid kan användas en potentiometerkoppling såsom i fig. 3 a, varvid voltmetern för likström utbytes mot en dylik för växelström (och R och milliampèremetern borttagas). Lampan tänder, då den maximala spänningen är U_0; U_{eff} befinnes vara mindre än U_0, och för sinusformad växelström får man med god approximation (1 à 2 %) $U_0 : U_{eff} = 1\ \overline{2}$.

5. Spänningstransformation.

Man kan lämpligen använda i skolorna befintliga spolar av vanlig typ, om 300, 600 och 1 200 varv. Kopplingen framgår av fig. 4; glimlamporna skola alla vara lika. Den från potentiometern uttagna spänningen ökas gradvis; alla lamporna tända praktiskt taget samtidigt. Enligt kopplingen fig. 4 fördubblas alltså spänningen;

fyrfaldig upptransformering kan visas med en sekundärspole på 1 200 varv och fyra seriekopplade lampor anslutna parallellt till spolen. Nedtransformeringen kan demonstreras på motsvarande sätt. Man visar alltså experimentellt, att vid tomgång spänningarna förhålla sig som spolarnas varvtal.

6. Självinduktion.

Kopplingen framgår av fig. 5. Man kan använda en spole på 1 200 varv (motstånd 15—20 ohm) med slutet ok eller fältmagnetspolarna till en shuntmotor. Man sluter strömmen och reglerar det seriekopplade motståndet R så, att lampan nätt och jämnt slocknar, dvs. så att spänningen över lampan blir mindre än tändspänningen, dock ej mindre än att lampan tänder, då spolen frånkopplas.

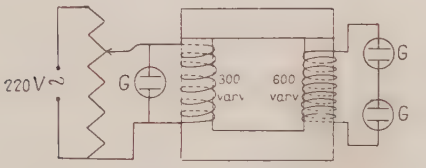


Fig. 4. Spänningstransformation.

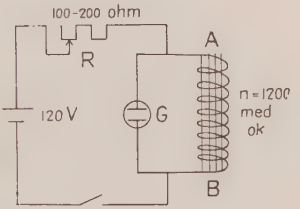


Fig. 5. Demonstration av självinduktion.

Man utprovar till vilken ände av spolen AB den lilla plana skivan resp. ringen i lampan är ansluten. När nu strömmen slutes, induceras i spolen en motelektromotorisk kraft, som har den verkan, att strömmen i kretsen ej genast når sitt fulla värde. Spänningsförlusten i motståndet R är därför i början liten, och glimlampan erhåller under ett ögonblick den för tändningen behövliga spänningen; den till B anslutna elektroden lyser upp. När strömmen brytes, induceras en elektromotorisk kraft, som är större än tändspänningen, och den till A anslutna elektroden lyser upp.[1] — Vill man endast demonstrera ljusglimten vid strömbrytningen, kan man som strömkälla använda ett ackumulatorbatteri på 6—10 volt, som ger en ström genom spolen på 1—2 amp.

7. Fasförskjutning mellan ström och spänning i en växelströmskrets.

För dessa försök iordningsställes lämpligen en bräda, 12 cm × 18 cm. På denna fästas i rad, intill varandra, fyra lampfattningar.

[1] En liknande anordning är beskriven av T. Wetterblad i Elementa, årg. 11, 1927—28, s. 148.

I brädan fastgöres en metallstång, med vars hjälp brädan placeras i ett stativ så, att lamporna komma rakt över varandra.

a. *Endast ohmskt motstånd i kretsen.* Anordningen framgår av fig. 6 a. Två glimlampor placeras över varandra och betraktas i

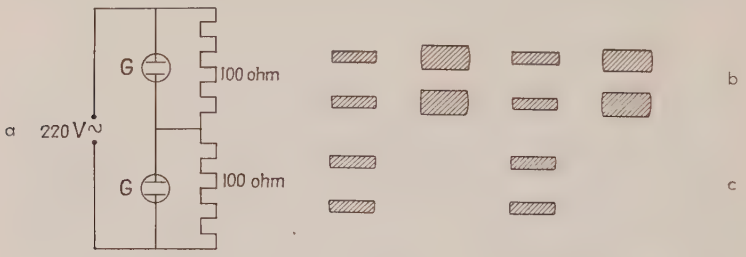


Fig. 6. Endast ohmskt motstånd i kretsen: *a.* koppling *b.* båda elektroderna lysa *c.* endast ena elektroden lyser.

en roterande spegel. Man ser, att i de två ljusbanden motsvarande ljusa och mörka delar ligga exakt över varandra (fig. 6 b). Spänningarna över de båda motstånden ligga i fas med varandra och med strömstyrkan genom motstånden.

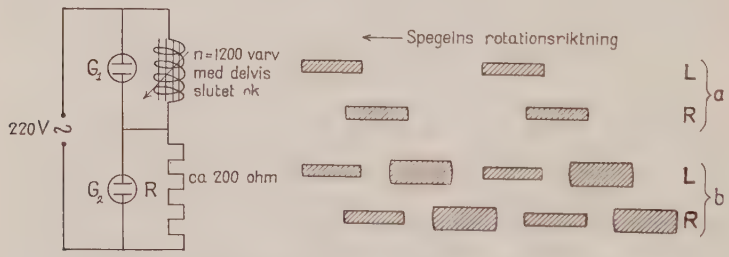


Fig. 7. Fasförskjutning mellan ström och spänning i en induktionsspole.

Det har visat sig fördelaktigt att i följande försök avskärma ljuset från den ena elektroden, lämpligast från den ringformade. Detta kan ske genom att över lampan anbringa en cylinder av svart papp i vars botten gjorts ett hål med 2—3 mm diameter.[1] I den roterande spegeln ser man nu endast ljuset från den skivformade elektroden, och avstånden mellan de ljusa partierna bli större (fig. 6 c).

[1] Ännu lämpligare är att använda en glimlampa med endast en lysande elektrod, en rund skiva. Den andra elektroden består av en trådända, som ligger tätt bakom skivan och skymmes av denna. Dylika lampor kunna erhållas genom Norstedt & Söners skolavdelning.

b. *Ohmskt motstånd och självinduktion.* Motståndet och självinduktionen avvägas så, att spänningarna över dem bli i det närmaste lika stora (fig. 7). Självinduktionen regleras genom att oket slutes mer eller mindre. Glimlampan G_1 registrerar spänningen över självinduktionen (L), och G_2 registrerar spänningen över motståndet R. I R, som är induktionsfri, är spänning och ström i fas med varandra. I R och L, som äro seriekopplade, är strömstyrkan i varje ögonblick lika; lampan G_2 registrerar alltså strömmen genom spolen.

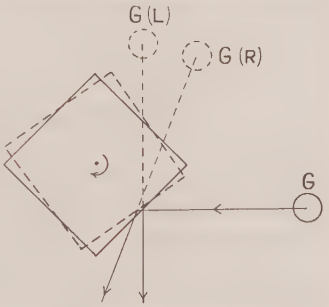


Fig. 8. Bildernas rörelseriktning i en roterande polygonspegel.

I den roterande spegeln (fig. 7 a, fig. 8) syns bilden av G_1 fasförskjuten i spegelns rotationsriktning, i det närmaste 90° i fas före bilden av G_2, vilket betyder, att strömmen i spolen är 90° efter spänningen över spolen.

Att fasförskjutningen har denna storlek framträder kanske bäst, om den avskärmande pappcylindern över lampan avlägsnas; centra i det ena bandets ljusa partier befinnas då ligga mitt över centra i det andra bandets mörka partier (fig. 7 b).

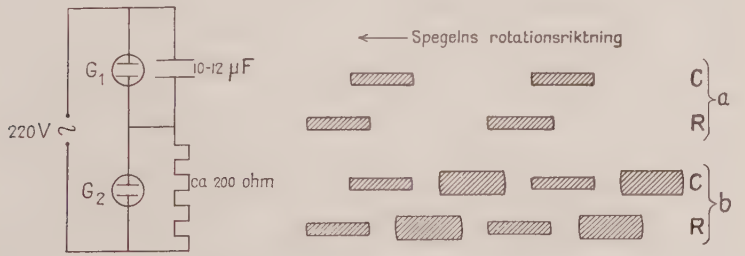


Fig. 9. Fasförskjutning mellan ström och spänning i en kondensator.

c. *Ohmskt motstånd och kapacitet.* Motståndet och kondensatorns kapacitet regleras så, att spänningarna över båda bli i det närmaste lika (fig. 9). I den roterande spegeln synas bilderna av glimlampan, som är kopplad prallellt med kondensatorn, förskjutna mot spegelns rotationsriktning (fig. 9 a och b). Spänningen över kondensatorn är 90° efter strömstyrkan.

8. **Spänningsresonans.**

Kopplingen framgår av fig. 10. Glimlamporna G_2 och G_3 över induktionsspolen resp. kondensatorn lysa, men lampan G_4, som anger totalspänningen över dessa, lyser icke. Anledningen är, att spänningarna över spolen och kondensatorn äro fasförskjutna i förhållande till varandra i det närmaste 180°. Glimlampan G_1 anger strömstyrkan. Av spegelbilderna i fig. 10 framgår det nämnda fastillståndet.

9. **Likriktning av växelström.**

a. *Elektrolytisk envägslikriktare.* Likriktaren består av fyra provrör, fyllda med ammoniumfosfatlösning (50 g ammoniumsulfat löses i 1 liter vatten). I varje provrör äro nedsatta en blytråd och en aluminiumtråd. De fyra baden seriekopplas. Strömmen kan i likriktaren endast gå från bly till aluminium, i motsatt riktning spärras den. I föreliggande fall kan man ej koppla glimlampan och lik-

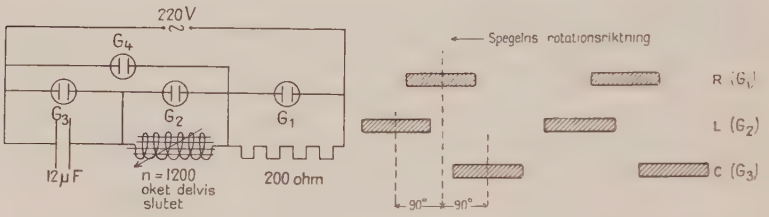


Fig. 10. Spänningsresonans.

riktaren i serie, beroende på att glimlampan ej tillåter tillräckligt stor strömstyrka för att badets likriktarverkan skall uppträda.

En lämplig koppling återges i fig. 11. Om ledningen med likriktaren är öppen, lysa glimlampans båda elektroder, men icke den seriekopplade glödlampan, ty strömstyrkan är alltför liten beroende på den seriekopplade glimlampans stora motstånd. Slutes grenledningen innehållande likriktaren, lyser glödlampan liksom glimlampans ena elektrod. Vid ena strömriktningen är glimlampan kortsluten över likriktaren. Vid motsatt strömriktning går ingen ström genom likriktaren; en potentialdifferens uppstår mellan dennas elektroder, varvid glimlampans ena elektrod lyser.

Betraktas glimlampan i en roterande spegel, dels när grenledningen med likriktaren är öppen, dels när den är sluten, ser man, att avståndet mellan ljusglimtarna i det senare fallet är dubbelt så stort som i det förra. — Likriktningen kan även påvisas med hjälp av två glimlampor såsom i nästa försöksbeskrivning. Den elektrolytiska likriktaren kan utbytas mot en kopparoxidullikriktare.

b. *Envägs elektronrörlikriktare.* En glimlampa, G_1 i fig. 12 a, anslutes till den inkommande spänningen, och en lampa G_2 kopplas i serie med elektronröret; man kan använda vilket dylikt som helst, t. ex. RGN 354. Vid uppvärmd katod lyser blott den ena elektroden i lampan G_2. Ljusbanden, som erhållas i en roterande spegel, då de båda glimlamporna placeras över varandra, återges i fig. 12 b.

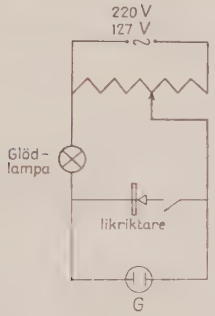


Fig. 11. Likriktning av växelström (elektrolytisk el. kopparoxidullikriktare).

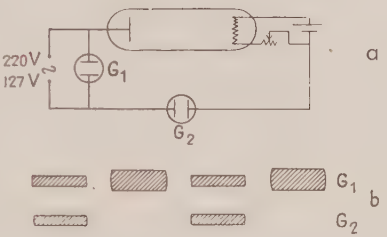


Fig. 12. Envägs elektronrörliktare.

c. *Tvåvägs elektronrörlikriktare.* Antingen kan två skilda likriktarrör användas (fig. 13 a eller också ett dubbelanodrör (fig. 14). Endast G_2:s ena elektrod lyser, men mot varje ljusglimt i G_1 erhålles en glimt i G_2. Växelvis erhåller G_2 spänningsimpulser från båda rören. Ljusbandens utseende i en roterande spegel avbildas i fig. 13 b.

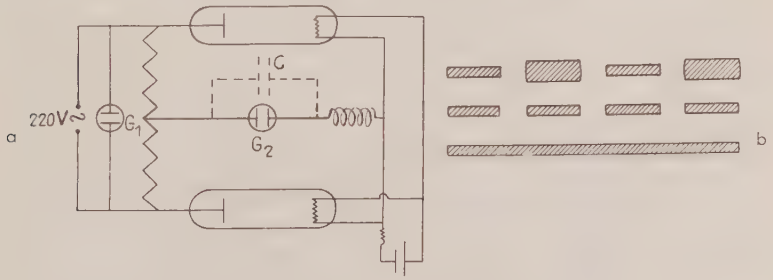


Fig. 13. Tvåvägs elektronrörliktare.

Den likriktade strömmen kan utjämnas. I serie med G_2 anbringas en spole på t. ex. 12 000 varv med slutet ok; G_2 lyser då kontinuerligt. Utjämning kan även åstadkommas med en kondensator på 2—4 mikrofarad, kopplad parallellt med G_2.

10. Kippsvängningar.

En lämplig anordning återges i fig. 15. Motståndet R och kapaciteten C kunna varieras inom vida gränser. Är t. ex. R 1-3 megohm och C 1-2 mikrofarad, blinkar lampan 1—2 ggr i minuten. Uppladdningen av kondensatorn tager en viss tid i anspråk. När spänningen uppnått glimlampans tändspänning, urladdas konden-

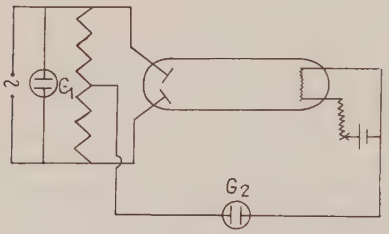


Fig. 14. Dubbelanodrör för likriktning.

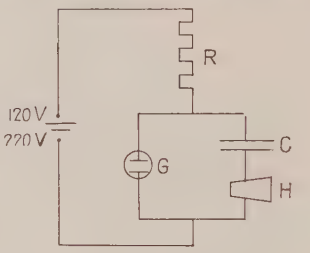


Fig. 15. Anordning för kippsvängningar.

satorn genom glimlampan, varefter processen upprepas. Samtidigt med urladdningen höres en knäppning i högtalaren (H), som i vissa fall vid högre frekvenser hellre anslutes parallellt med kondensatorn. Svängningstalets beroende av R och C kan lämpligen studeras. Inkopplas t. ex. en kondensator på 1 800 cm och ett motstånd på 1 megohm, erhålles hög frekvens, och en ton höres i högtalaren.

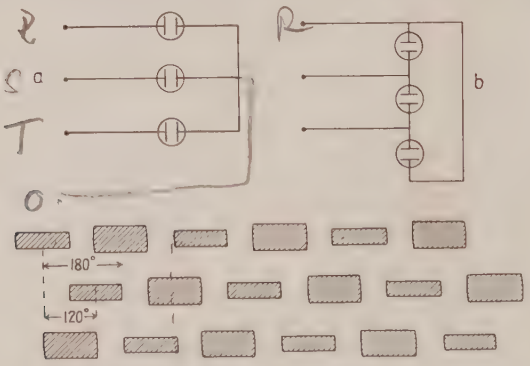


Fig. 16. Fasförskjutning vid trefasström: *a.* stjärnkoppling *b.* triangelkoppling.

11. Trefasströmmar.

Tre icke avskärmade glimlampor anslutas till ett trefassystem, i stjärnkoppling (fig. 16 a), resp. triangelkoppling (fig. 16 b). I en

roterande spegel erhållas tre avbrutna ljusband, och fasdifferensen framträder tydligt. Genom avskärmning av ena elektroden kunna något bättre bilder erhållas, men fasförskjutningens storlek framträder då icke lika bra.

Som framgår av de beskrivna försöken är glimlampan ett utmärkt och billigt hjälpmedel inom elementär fysikundervisning. I de beskrivna försöksanordningarna har jag icke angivit storleken av de motstånd, som användas vid potentiometerkopplingarna. De kunna ju väljas inom vida gränser. Ett flertal skolor ha kopplingstavlor med inbyggda motstånd för potentiometerkoppling, vilka med fördel kunna användas. Vidare har jag icke angivit de använda glimlampornas spänningsområden, ty dessa bero av de tillgängliga nätspänningarna.

Kungl. Överstyrelsen för yrkesutbildning.

Kungl. Överstyrelsen för yrkesutbildning inrättades från den 1 januari 1944 genom beslut av 1943 års riksdag. Enligt sin instruktion (SF 963/1943) utgör överstyrelsen den centrala statsmyndigheten på yrkesundervisningens område. Den har att utöva högsta inseende över yrkesundervisningen i riket ävensom den yrkesutbildning, som med bidrag av statsmedel bedrives inom näringslivet. Det åligger också överstyrelsen att genom initiativ, råd och vägledning verka för främjande av yrkesutbildning samt att vidtaga eller hos Kungl. Maj:t föreslå de åtgärder, som härför kunna vara erforderliga.

De läroanstalter, som stå under överstyrelsens inseende äro *dels* tekniska läroverk och handelsgymnasier, *dels* av landsting med statsunderstöd drivna centrala verkstadsskolor, *dels* kommunala och statsunderstödda enskilda anstalter för yrkesundervisning, vilka avse industri, hantverk, handel och husligt arbete, *dels* vissa särskilda anstalter för yrkesundervisning, nämligen Tekniska skolan i Stockholm, Grafiska institutet i Stockholm, Bergsskolan i Filipstad, Textilinstitutet i Borås samt Lennings textiltekniska institut i Norrköping, *dels* anstalter för utbildning av lärare för yrkesundervisning *dels ock* de övriga anstalter för yrkesundervisning, som enligt beslut av Kungl. Maj:t stå under överstyrelsens inseende.

Överstyrelsen har som chef en överdirektör, vilken samtidigt är överstyrelsens ordförande. I övrigt består överstyrelsen av följande ledamöter, nämligen: ämbetsverkets tre byråchefer, en av Kungl. Maj:t för tre år i sänder utsedd representant för vardera

av skolöverstyrelsen och arbetsmarknadskommissionen samt sju av Kungl. Maj:t likaledes för tre år i sänder förordnade representanter för näringsliv och arbetsmarknad, utsedda en efter förslag av svenska arbetsgivareföreningen, en av Sveriges hantverks- och småindustriorganisation, en av handelskamrarnas nämnd, en av de anställdas centralorganisation, två av landsorganisationen i Sverige samt en, vilken bör vara kvinna med erfarenhet från det husliga arbetet, av representativa kvinnoorganisationer.

Överstyrelsens chef är överdirektören Ryno Lundquist. Överstyrelsens adress är Sturegatan 24, Stockholm 5.

Bokanmälningar.

E. Giljam, *Lärobok i nomografi.* Andra upplagan. Stockholms Tekniska Institut, Stockholm 1943. 168 s., kr. 13: 60 (inkl. oms.).

Trots att nomografi särskilt inom tekniska områden kommit till vidsträckt användning, torde denna gren av den tillämpade matematiken vara främmande för flertalet matematiklärare. I regel torde endast ett enda slag av nomogram vara välbekant, den vanliga räknestickan. Nomografiens problemställningar erbjuda dock så mycket av intresse, att en närmare bekantskap därmed kan anbefallas även ur matematisk synpunkt. Som exempel kan nämnas, att funktionsläran får användning vid hithörande problem, koordinatbegreppet (krokliniga koordinater) får en god illustration och likaså lineära transformationer (matrisräkning).

En orientering inom nomografien kunna vi lätt skaffa oss, då det sedan några år tillbaka föreligger en svensk lärobok i ämnet, nämligen den i rubriken angivna. Då den är direkt skriven för att användas vid Stockholms Tekniska Institut, behandlar den ämnet ur både teoretiska och praktiska (t. ex. rittekniska) synpunkter. Sålunda handlar första kapitlet om olika slag av funktionsskalor, principerna för gradering och olika sätt för skalors uppritande. Ett kort avsnitt om dubbelskalor leder över till ett kapitel om funktionsnät, dvs. åskådliggörande av samband mellan två variabler i rätvinkliga koordinatsystem med på vissa sätt graderade koordinataxlar. Därpå lämnas en framställning av grunderna för projektiv avbildning, vilka ha stor betydelse för nomografien. De följande kapitlen behandla den egentliga nomografien, i det att syftlinjenomogram, nätnomogram och specialräknestickor beskrivas och exemplifieras i en utförlig framställning. Till grund ligger problemet att i planet åskådliggöra samband mellan tre variabler. Hur ett större antal variabler nomografiskt behandlas,

visas även. Till sist visas i ett kort, intressant kapitel, hur enligt dualitetsprincipen två av de nämnda nomogramtyperna matematiskt sammanhänga med varandra. Boken avslutas med en rikhaltig litteraturförteckning — hurpass lätt åtkomliga de däri upptagna verken för närvarande äro, det är dock en annan fråga.

Då någon kännedom om nomografi säkert är nyttig för oss lärare, och då den refererade bokens innehåll på olika sätt kan ge goda impulser åt matematikundervisningen, får jag livligt rekommendera densamma.

Stig Comét.

Kurs i mätteknik. Teknisk Tidskrifts Förlag, Stockholm. Norrköping 1944, 156 s. A 4-format. Kr. 18:— + porto.

Svenska Teknologföreningens avdelning Tekniska Fysikers Förening anordnade år 1943 en talrikt besökt föreläsningskurs i mätteknik. Föredragen ha nu samlats i kompendie- eller rättare bokform. Det torde vara mest upplysande att återge innehållsförteckningen: Doc. T. Swensson, Tekniska enheter (1); prof. G. Ising, Galvanometrar och elektrometrar — några drag av deras teori och allmänna egenskaper (2); civ.-ing. R. Thorburn, Hur göra de elektriska visarinstrumenten mångsidigt användbara? (3), Skrivande instrument och oscillografer (4), Fotografering av snabba förlopp (5); civ.-ing. S. E. Lindberg, Konstruktiva synpunkter på elektriska visarinstrument (6); civ.-ing. P. Hammarlund, Undersökning av strömningsförlopp och kroppars struktur med slirmetoden (7); civ.-ing. S. Dahlstedt, Mätförstärkare (8); civ.-ing. S. Överby, Bryggor och kompensationskopplingar för växelström (9), Speciella teletekniska mätmetoder (10); fil. lic. E. Fredlund, Akustiska mätmetoder (11); fil. dr H. Hellström, Ljusmätning (12), Färgmätning (13); fil. mag. J. Nyström, Temperaturnormaler och kalibrering av temperaturmätningsinstrument (14); civ.-ing. T. Widell, Temperaturmätning i gaser och mätning av yttemperatur (15); fil. mag. H. Rådström, Bestämning av höga och snabbt föränderliga temperaturer (16); prof. W. Weibull, Mätning och registrering av mekaniska svängningar och stötförlopp (17), Mätning av korta tider och stora hastigheter (18); civ.-ing. C. Schaub, Mätmetoder inom hållfasthetsläran (19), Spänningsoptiska mätningar (20); civ.-ing. S. Englesson, Mätning av vätske- och gasmängder (21); civ.-ing. S. E. Gudmundson, Aerodynamiska mätmetoder (22).

Det säger sig självt, att dessa uppsatser ej äro enhetligt upplagda, byggda som de äro på föredrag över högst olika avsnitt ur mättekniken. Så långt anmälaren kan bedöma innehållet efter närvaro under en del av kursen och ur det som nu föreligger i tryck,

äro framställningarna genomgående av hög kvalitet. Man kan urskilja översiktsartiklar med en såvitt utrymmet medgivit uttömmande disposition av gängse moderna metoder (4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21 och 22), vidare professor Isings teoretiskt lagda uppsats och doc. Swenssons uttömmande artikel om tekniska enheter, vilken redovisar äldre och nyare måttsystem och objektivt kommenterar dem, samt resten uppsatser av mera monografiskt-teknisk karaktär.

Det kan förefalla, som om en dylik samling av artiklar i huvudsak skulle vara nyttig på samma sätt som den klassiska »Kohlrausch», som ett uppslagsverk när man planlägger för en konkret experimentell undersökning. Särskilt för de nyare och ej så väl kända områdena fylla artiklarna i regel väl uppgiften att vara introducerande i detta avseende, och de kunna i vissa fall hänvisa till utförligare litteratur. Men i anknytning till den maxim, som en fysiker har präglat, att »det fysikaliska fenomen, som man inte kan mäta, det vet man inget om», eller snarare dess positiva omvändning, kan man konstatera, att man på flera håll möter nyttigt fysikaliskt vetande i konkret form. För den konstruktivt begåvade fysikern-teknikern erbjuda särskilt en del av monografierna, såsom 5, 7, 16, 17 och 18, njutbar och uppslagsrik läsning. Uppslagen kunna även av den därför intresserade utnyttjas i teknisk och naturvetenskaplig undervisning. Särskilt de elektriska mätmetodernas alltmera framträdande plats inom all mätteknik är ju ett karakteristiskt drag i en utveckling, som ibland löper alltför fort för att den enskilde skall kunna hinna med. Översikter av just denna typ fylla därför ett verkligt behov för sådan aktuell information.

De talrika figurerna äro liksom typografin — Teknisk Tidskrifts tryck — av god klass. Nomenklaturen visar en del ojämnheter, men det kanske är ganska få, för vilka detta betyder något.

Erik Ingelstam.

The Svedberg 1884—1944, festskrift med anledning av professor The Svedbergs sextioårsdag den $^{30}/_{8}$ 1944. Almqvist & Wicksell, Uppsala 1944, 731 s., kr. 25:—.

Professor Svedberg började som pioniär på kolloidkemiens område redan för närmare 40 år sedan och nu, när han passerar de 60 åren, står han fortfarande i förgrunden och utför banbrytande arbeten, trots att kolloidkemien svällt ut till en vetenskap, i vilken oräkneliga skrifter publiceras varje år.

Hyllningsskriften är utgiven av en redaktionskommitté bestå-

ende av representanter för både teknik och vetenskap. Ehuru på grund av tidsläget inga av prof. Svedbergs många utländska lärjungar och vänner (med två undantag) deltagit, har det blivit ett imponerande verk med 70 bidragsgivare och 56 arbeten omfattande de flesta av kemiens många grenar, såsom fysikalisk kemi, kolloidkemi, biokemi, medicinsk kemi, teknisk kemi, alla områden, som prof. Svedberg hyser ett livligt intresse för. Då prof. Svedberg är en kunnig och hängiven botanist, förekomma även ett par botaniska uppsatser.

Att här närmare gå in på alla de många intressanta problem man möter i dessa uppsatser är ej möjligt. Jag skall därför endast ytligt beröra dem och huvudsakligast behandla de uppsatser, som härröra från professor Svedbergs egen institution.

Med anledning av de undersökningar, som pågått vid fys.-kem. inst. i Uppsala över såpors fysikaliska kemi, lämnar fil. mag. Andersson m. fl. en beskrivning på en förbättrad typ av självregistrerande torsionsväg med temperaturkontroll. Med anledning av samma undersökningar har prof. Ekwall (Åbo) skrivit om potentiometriska fettsyretitreringar av såpor med silvernitrat och visar, att man i vissa fall kan analysera en blandning av de olika fettsyrorna på detta sätt.

Ultracentrifugeringar och diffusionsförsök höra till huvuduppgifterna vid institutionen, och en lång rad arbeten över olika sidor av dessa temata föreligga, dels teoretiska arbeten av doc. Lamm, dr Quensel och lic. Jullander, dels mera experimentella.

Med anledning av institutionens arbeten över kolhydrater ge doc. Gralén och kand. Rånby ett bidrag till frågan om cellulosans molekylvikt i nativt tillstånd. Genom mild sulfitkokning av trä och efterföljande nitrering lyckas de erhålla så hög polymerisationsgrad som 9000. Lic. Säverborn har bestämt fysikaliskt-kemiska data för gummi arabicum, och mag. Ingelman har studerat kristallisationshastighetens beroende av föroreningar hos socker med en dilatometrisk metod.

Prof. Svedbergs banbrytande forskning över äggviteämnenas fysikaliska kemi har helt naturligt fortsatts. Lic. Pedersen lämnar data över ett nytt globulinäggviteämne, som finnes i stora mängder i kalvserum. Doc. Brohult och ing. Borgman lämna nya intressanta bidrag till de ivrigt studerade hämocyaninerna och visa, hur man med ultracentrifugens hjälp kan avslöja finare strukturförhållanden hos äggviteämnen. Doc. Arrhenius lämnar ett bidrag till serumproteinernas dielektriska förhållanden. Gelatinfraktioners molekylära konstitution behandlas av dr. Mosimann och prof. Signer (Schweiz).

Även de undersökningar över barnförlamningens virus som bedrivas vid institutionen behandlas av docenterna Gard, Snellman och mag. Thyrén. Härvid har även institutionens nya elektronmikroskop kommit till användning.

Av prof. Tiselius lämnas en preliminär redogörelse för några försök att med hjälp av den av honom använda optiska metodiken vid adsorptionsförsök lösa det synnerligen svåra problemet att kvantitativt skilja vissa av de olika aminosyrorna, som förekomma i proteiner. Vidare lämnar lic. Claesson en beskrivning på en elegant självregistrerande adsorptionsapparat grundad på den av Tiselius införda optiska analysen.

Prof. Svedbergs samarbete med ett antal industrier på konstmassekemins område har föranlett flera forskare inom den tekniska kemien att publicera uppsatser om olika problem inom denna gren av kemien. Alla visa vilken livlig verksamhet, som råder på detta område, och hur nya möjligheter ha öppnat sig för svensk kemisk industri. Så meddelar t. ex. tekn. dr. Dahlén, hur en förr värdelös biprodukt vid saccarintillverkningen har blivit en viktig konstmassa.

Även från övriga kemiska institutioner i landet ha bidrag lämnats. Professorerna Hägg och Fredga vid Uppsala kemiska institution behandla problem i samband med den optiska aktiviteten. Professorerna Euler och Myrbäck vid Stockholms högskola ge bidrag till resp. ostrogeners och stärkelsens kemi, och docent Bäckström vid Tekniska högskolan skriver om fotokemiska reaktioner. Prof. Bodforss (Lund) beskriver en apparat för mätning av extinktionen på ljuselektrisk väg, och prof. Smith (Lund) redogör för försök med en förbränningsapparatur för klor och bromhaltiga substanser.

Prof. Nilsson och medarbetare vid Ultuna lantbrukshögskola lämna meddelande om att en mögelsvamp (Penicillium notatem) visar en påfallande hög halt av ergosterin (D-vitamin), en biprodukt som torde kunna bli av stor betydelse, när det gäller att förbilliga framställningen av det bakteriedödande penicillinet.

Prof. Larsson vid Chalmers tekniska högskola framlägger resultaten av en undersökning av komplexbildning mellan silver och en svavelhaltig karbonsyrejon. I en intressant artikel redogör prof. Hedvall vid samma högskola och direktör Nordengren för försök att ur svensk råvara, skifferaskan vid oljetillverkningen, framställa kalisalt. Ehuru stora massor rågods åtgå, synes metoden vara ekonomiskt möjlig.

Utom rent vetenskapliga artiklar förekomma uppsatser rörande det aktuella spörsmålet om samarbete mellan vetenskaplig och

teknisk forskning, och boken avslutas med en underhållande artikel av prof. Hedvall om det nya Kemikums första tid, i vilken Uppsalakemister från åren 1904—1918 passera revy, en artikel som säkert kommer att läsas med många glada igenkännanden av dem som då gingo sina kurser i Uppsala.

Trots att festskriften ej innehåller några översiktsreferat utan fastmer specialrapporter från olika forskningsfält ger den läsaren en god överblick över vad den svenska kemiska forskningen för närvarande sysslar med. *Olle Snellman.*

Lawrence Bragg, *The History of X-Ray Analysis*, Longmans Green & Co., London 1943, 25 sid. 1 s.

Förf., som jämte sin fader William Bragg fick dela 1915 års nobelpris, har utfört banbrytande arbeten inom röntgenfysiken och kristallanalysen och är väl skickad att framlägga en kort översikt över dessa vetenskapsgrenars utveckling och möjligheter. Han låter läsaren få några glimtar av den spänning och glädje, som följde med upptäckterna i Cambridge, där ju även J. J. Thomson och Rutherford arbetade. Förutom en välgjord historisk exposé meddelar han även kristallmodeller för typiska salter, mineral och organiska ämnen. *J. Tandberg.*

E. Rancke Madsen, *Lærebog i Kemi*, Gads Forlag, København 1944, 212 s., inb.

Läroboken omfattar ungefär den svenska gymnasiekursen i något knapp form, varvid dock den tekniska delen är utelämnad, emedan boken avses som inträdeskurs till tekniska högskolor och tandläkareinstitut, där denna del av kemien antingen tillkommer senare eller ej anses behövlig. Experiment förekomma ej, men en samling elevlaborationer avses att senare publiceras.

Framställningen följer de stora linjerna klart och med största pedagogiska skicklighet, och bokens moderna synpunkter och väl valda frågor ha mycket av värde att giva även åt en svensk kemilärare, speciellt inom den fysikaliska kemien. *E. Nordefeldt.*

D. Dickinson, *The Chemical Analysis of Waters, Boiler- and Feed-Waters, Sewage, and Effluents.* Blackie and Son, London 1944, 140 s., inb. 6 s.

Detta nyutkomna band av Blackies teknikserie tjänar i första hand som praktisk ledning i vattenanalys för industrikemister men torde även med fördel kunna användas som god och utförlig handledning vid gymnasisters enskilda arbeten. Ämnet är speciellt

lämpligt härför, emedan det ger mångsidig övning, goda kunskaper i analysmetoder samt resultat av omedelbar praktisk betydelse, varjämte läraren genom att i vattnet lösa vissa mängder av salter och andra tillsatser lätt kan kontrollera de kvantitativa resultaten. Dyrbar apparatur behöves ej.

Boken är väl skriven och innehållet ovanligt mångsidigt.

E. Nordefeldt.

John Read, *A Textbook of Organic Chemistry*, historical, structural & economic. G. Bell and Sons, Ltd., London 1944. 703 sidor.

Arbetet, som utgör 2:a tryckningen av 3:e upplagan, inledes med en framställning av kemiens historia (sid. 1—60), något ganska ovanligt i en lärobok i organisk kemi. Med tanke på den organiska kemiens betydelse för utvecklingen av de kemiska teorierna och kemien i största allmänhet synes åtgärden logisk och väl försvarad. Därefter följa 3 kapitel, ägnade den organiska kemiens arbetsmetoder, och sedan den systematiska och i det stora hela traditionella genomgången av de organiska föreningsklasserna. Man frapperas här av den starka övervikten av den alifatiska kemien, som upptager nära 400 sidor mot 170, som ägnats de cykliska föreningarna. Delvis beror detta på att teoretiska kapitel, t. ex. strukturläran, av naturliga skäl förlagts till den alifatiska kemien, delvis på att vissa cykliska föreningar, t. ex. färgämnena fått en ganska summarisk behandling.

Läroboken är utomordentligt innehållsrik, sidantalet är högt, stilsorten tämligen liten och själva den formella framställningen ganska lapidarisk. Jag vill därmed inte säga, att boken är tungläst, tvärtom, men den måste läsas med stor uppmärksamhet, så att man inte överhoppar väsentliga saker. En god och originell hjälp har den studerande härutinnan i det 20-tal frågor, som förf. efter genomgången av varje kapitel riktar till honom, frågor dels av vanlig förhörstyp, dels räknexempel. Sålunda finna vi, för att taga ett exempel, på sid. 475 bland 25 frågor till kap. »Kvävehaltiga alifatiska föreningar» följande: »sammanfatta en reaktionskedja, som överför a) metanol till etanol, b) etanol till metanol». Och längre ned: »en amin av formeln $CH_3(CH_2)_n NH_2$ överfördes till kloroplatinat, som befanns innehålla 37,0 % Pt. Beräkna n.» En utmärkt hjälp också för de examinatorer, som möjligen ha svårt att finna egna frågor på kursen!

Anknytningar till praktik och teknik förekomma överallt, där tillfälle gives, men i fråga om några tekniska processer, liksom i fråga om nya organiska produkter skulle man ha önskat en mera

ingående behandling, t. ex. av mekanismen vid sockerjäsning, beträffande konstmassor o. a. Hormoner och vitaminer medtagas i ett jämförelsevis kort kapitel, som tar sikte på den kemiska aspekten, vilket synes vara riktigt i en rent organisk lärobok. Dock vill man anmärka, att bruttoformler för vitaminer säga mycket litet och borde kompletteras av strukturformler.

I det sista av lärobokens 32 kapitel behandlas elektron-valenslärans tillämpningar i den organiska kemien. Härtill må anmärkas, att vi alltjämt vänta på den lärobok i organisk kemi, där detta kapitel står först och konsekvent tillämpas i de följande kapitlen.

Sammanfattning: Reads lärobok fyller i alla fall högt ställda fordringar. Den är en bok mera för läroverkens lärare än för deras elever, men som sådan utmärkt, bl. a. genom de demonstrations- och laborationsförsök — nominellt 120 st., i verkligheten många fler — som den innehåller. Den bör ingå i läroverkens institutionsbibliotek. *G. Starck.*

J. C. Speakman, *An Introduction to the Modern Theory of Valency.* Edward Arnold & Co, London 1943. 159 sid.

På atomteori, elektronteori och vågmekaniska föreställningar har en valensteori vuxit upp, som redan nått en hög grad av fulländning, som gör anspråk på att förklara kemiska förlopp och tolka kemiska föreningars byggnad, och varom kännedomen snart nog kommer att betraktas som en självklar del av varje kemists andliga utrustning. Redan nu kunde man förvänta att läroböckerna i oorganisk och organisk kemi skulle konsekvent bygga på den moderna valensläran, men då så ännu inte är fallet, får man vara tacksam för de speciella framställningar av valensläran, som framkommit, och varav ovanstående arbete är en och en i hög grad förtjänstfull.

Efter en inledande genomgång av elektrovalens, kovalens och koordinativ valens, den senare av förf. benämnd »dative covalency», behandlas vågmekanikens betydelse för valensläran utan användning av matematiska hjälpmedel och i samband därmed den viktiga resonansbindningen. Sambandet och skillnaden mellan elektrovalens och kovalens, valenser i de långa perioderna, koordination och hydration, »krabb»(chelate)-föreningar behandlas; även Fajans åsikter om jonernas deformation framföras. Kapitel IX ger en värdefull klassifikation av polära och icke-polära föreningar. Det sista kapitlet redogör — något vid sidan av ämnet — dels för Brönsteds syra-basteori, dels för Lewis elektronteori för syror och baser, enligt vilken en syra är en syra därför att dess molekyl kan mottaga ett elektronpar i och för bildning av en kovalensbindning,

och en bas är en bas, emedan dess molekyl kan giva (»donate») ett odelat elektronpar i och för bildning av en kovalensbindning.

På 150 små sidor har författaren lyckats ge en elementär men ganska fullständig och i varje fall förvånande innehållsrik framställning av ett centralt område i kemien, ett område, som borde vara varje kemists egendom. Boken förefaller att vara ett litet konstverk i sitt slag och kan inte nog varmt rekommenderas.

G. Starck.

Erich Müller, *Elektrochemisches Praktikum.* Sechste Auflage 1942. Verlag Steinkopff, Leipzig. 287 s., kr. 17:65.

Första upplagan av denna för tekniska högskolestudier avsedda bok utkom redan år 1912, vilket möjligen kan förklara att de teoretiska partierna i vissa punkter äro föråldrade eller oklara. Ehuru de 72 experiment som utförligt beskrivas ofta fordra en ganska specialiserad apparatur, som skolor i regel ej kunna prestera, äro emellertid några väl lämpade som uppgifter vid enskilt arbete för gymnasister, intresserade av fysik och kemi. Kapitlet om elektrolys av alkaliklorider i vattenlösning uppklarar en del misstag som kemilärare stundom begå vid försök att ge teoretisk bakgrund för processen.

E. Nordefeldt.

Bonniers Konversationslexikon, band IX, Stockholm 1944, hfrb., kr. 27:50.

Bandet omfattar *Luft—Nerium* och upptager 1576 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som äro av intresse, må nämnas: *Luftballong, Luftfilter* (uppgiften att silicagel är »svampformigt kisel» är oriktig, likaså är uttrycket »aluminiumsvamp» vilseledande, ty man avser ju kiselsyra, resp. aluminiumoxid), *Luftpump* (förutom ett obetydligt tryckfel V_k i stället för V_{sk} må noteras, att det är F. Holwecks molekylarpump, som har en roterande cylinder, och att denna utföringsform är en utveckling av Gaedes ursprungliga konstruktion), *Lufttemperatur, Magnetism, Magnesium, Mangan, Manometer, Mars, Masspektrograf, Masurium* (»atomvikt ej känd, smältpunkt 2300°» ... uppgiften är förhastad, ty masurium har ännu ej framställts i vägbar mängd och det är ej sannolikt att elementet existerar i *stabil* form; radioaktiva isotoper ha framställts genom kärnreaktioner och atomvikterna för dessa beräknas till bl. a. 91 och 99), *Merkurius, Metaller* (guld uppgives vara *rött* i genomfallande ljus; det är ju allmänt känt att ett guldblad är *grönt* i sådant ljus), *Mikrofon, Mikroskop, Modulator, Molekyl, Månen, Måttsystem* (utförligt, sakligt), *Mängd, Mätverktyg, Nebulosor.*

J. Tandberg.

Beriktigande.

I min anmälan av PAUL NYLÉN, *Kemiska synpunkter på målningsmaterial* (Elementa 27, 174; 1944) har jag anmärkt på förf:s uppgift om schellacks animaliska ursprung. Anmärkningen var oriktig och återtages härmed.

G. Starck.

Gradualavhandlingar.[1]

LARS GÅRDING: *On a Class of Linear Transformations Connected with Group Representations*, Lund 1944, 125 s. Disp. i Lund $^{25}/_{5}$ 1944. Opponenter: lektor W. FENCHEL och fil. lic. N. SVARTHOLM.

Den grupp som ligger till grund för den vanliga tensorräkningen är den fulla lineära gruppen $GL(n)$ som består av alla lineära transformationer $x^k \to \mathfrak{a}x^k = a_i^k x^i$ (sedvanlig summationskonvention) av en kontravariant vektorrymd $\{x^k\}$ med basvektorerna $x^1, .., x^n$. Talen a_i^k tänkas vara komplexa och underkastade den enda restriktionen att determinanten $|a_i^k| \neq 0$. En tensorrymd uppspännes av ett antal bastensorer t. ex. x_k^{ij} med transformationslagen $\mathfrak{a}x_k^{ij} = a_h^i a_q^j \hat{a}_k^p x_p^{hq}$, där $\hat{a}_k^p$ definieras av $\mathfrak{a}^{-1}x^k = \hat{a}_i^k x^i$. Speciellt har man den kovarianta vektorrymden $\{x_k\}$, där $\mathfrak{a}x_k = \hat{a}_k^i x_i$. En tensorrymd t. ex. $\{x_k^{ij}\}$ förhåller sig som produkten av två kontravarianta och en kovariant vektorrymd, $x_k^{ij} = x^i y^j z_k$, med transformationslagen $\mathfrak{a}(x^i y^j z_k) = (\mathfrak{a}x^i)(\mathfrak{a}y^j)(\mathfrak{a}z_k)$.

Matrisen för den lineära transformationen $x^k \to \mathfrak{a}x^k$ är $T(\mathfrak{a}) = (a_i^k)$, där i betraktas som radindex. För $x_i \to \mathfrak{a}x_i$ blir matrisen $\tilde{T}(\mathfrak{a})$ den transponerade inversa matrisen till $T(\mathfrak{a})$. Den lineära transformationen $x_k^{ij} \to \mathfrak{a}x_k^{ij}$ motsvaras av matrisen $T(\mathfrak{a}) \times T(\mathfrak{a}) \times \tilde{T}(\mathfrak{a}) = (a_h^i a_q^j \hat{a}_k^p)$, där kombinationen h, q, p är radindex och kombinationen i, j, k är kolonnindex. Om $\mathfrak{b}x^k = b_i^k x^i$, får man för varje tillordning $\mathfrak{a} \to S(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$, $\tilde{T}(\mathfrak{a})$, $T(\mathfrak{a}) \times T(\mathfrak{a}) \times \tilde{T}(\mathfrak{a})$ att $S(\mathfrak{a})S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{ab})$, vilket uttrycker att varje sådan tillordning är en representation av $GL(n)$ som matriser. Vektorrymder och tensorrymder falla under begreppet representationsrymd, d. v. s. en lineär rymd $X = \{x\}$ i vilken varje gruppelement $\mathfrak{a}$ inducerar en lineär transformation $x \to \mathfrak{a}x$ med en matris $S(\mathfrak{a})$ som uppfyller ekvationen

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$S(\mathfrak{a})S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{ab})$. Produkten XX' av två representationsrymder är en ny representationsrymd, där $\mathfrak{a}$ inducerar transformationen $xx' \to \mathfrak{a}(xx') = (\mathfrak{a}x)(\mathfrak{a}x')$ med matrisen $S(\mathfrak{a}) \times S'(\mathfrak{a})$.

En godtycklig tensorrymd kan fullständigt uppdelas i invarianta delrymder, d. v. s. sådana som transformeras i sig själva av gruppen och sålunda var för sig äro representationsrymder. Om indices äro av samma slag, sker uppdelningen genom symmetrivillkor, t. ex. bilda de symmetriska och antisymmetriska tensorerna $x^{ik} + x^{ki}$ och $x^{ik} - x^{ki}$ två invarianta delrymder av tensorrymden $\{x^{ik}\}$, och man har $x^{ik} = \frac{1}{2}(x^{ik} + x^{ki}) + \frac{1}{2}(x^{ik} - x^{ki})$. Om indices äro av motsatt slag, sker uppdelningen genom tensorkontraktion, t. ex. $x^i_k = \left(x^i_k - \delta^i_k \frac{1}{n} x^h_h\right) + \delta^i_k \frac{1}{n} x^h_h$, där $\left(\delta^i_k\right)$ är enhetsmatrisen av ordningen n. Representationsrymder som ej kunna sönderdelas och motsvarande representationer kallas irreducibla. Hur man fullständigt sönderdelar en godtycklig tensorrymd har utretts av Schur. De irreducibla delarnas struktur (även för den s. k. komplexgruppen och de ortogonala grupperna) finns angiven i arbeten av Cartan och Weyl.

Om en lineär avbildning $x \to y$ av en representationsrymd X på en annan Y har egenskapen $\mathfrak{a}x \to \mathfrak{a}y$, säges avbildningen vara homomorf och Y homomorf med X, $X \sim Y$. Om avbildningen tillika är omvändbar, säges den vara isomorf och man skriver $X \cong Y$. Exempel på homomorfa avbildningar är $x^{ik} \to 0$, $x^{ik} \to x^{ki}$, $x^{ik} \to x^{ik} \pm x^{ki}$, $x^i_k \to \delta^i_k$, $x^{ij}_k \to \delta^j_k x^i$. Om man kan dela upp X och Y i irreducibla delrymder, är det lätt att explicit skriva upp den allmännaste homomorfa avbildningen av X på Y.

I avhandlingens första kapitel introduceras för en godtycklig grupp en speciell mekanism i samband med homomorf avbildning av produkten av två representationsrymder. I stället för att betrakta t. ex. avbildningen $y^i x^k \to x^{ik} \pm x^{ki}$ inför man n lineära transformationer u^k av rymden $\{x^k\}$ i rymden $\{x^{ik} \pm x^{ki}\}$ i det man sätter $u^k x^i = x^{ik} \pm x^{ki}$. Det visar sig då lätt att $\mathfrak{a}u^k\mathfrak{a}^{-1} = a^k_l u^i$. Omvänt, om denna ekvation är uppfylld, verifierar man, att $y^k x^i \to u^k x^i$ är en homomorf avbildning. Man kan även sätta $v_k\left(x^{ij} \pm x^{ji}\right) = \delta^i_k x^j \pm \delta^j_k x^i$, motsvarande den homomorfa avbildningen $y_k\left(x^{ij} \pm x^{ji}\right) \to \delta^i_k x^j \pm \delta^j_k x^i$, och får då $\mathfrak{a}v_k\mathfrak{a}^{-1} = a^i_k v_i$. Allmänt, om $y^k x \to x'$ är en homomorf avbildning av $\{y^k\}X$ på X' och man sätter $u^k x = x'$, uppträda $u^1, .., u^n$ som n lineära transformationer av X i X' som uppfylla $\mathfrak{a}u^k\mathfrak{a}^{-1} = a^k_l u^i$. Analogt om y^k utbytes mot y_k och v^k mot v_k. Man kan även betrakta lineära

transformationer med flera indices, t. ex. w_k^{ij}, så att $w_k^{ij}x = y$, motsvarande en homomorf avbildning $x_k^{ij}x \to y$. Sådana lineära transformationer uppföra sig vid transformation med $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^{-1}$ som vanliga tensorer. Man kan även utföra tensorkontraktion, t. ex. $v_k u^k$ och $v_k w_i^{kj}$ (förutsatt att produkterna $v_i u^k$ och $v_h w_i^{kj}$ ha en mening) och får då nya lineära transformationer, som transformeras som indices ange. Man får t. ex. $\mathfrak{a} v_k u^k \mathfrak{a}^{-1} = v_k u^k$ och $\mathfrak{a} v_k w_i^{kj} \mathfrak{a}^{-1} = \hat{a}_i^h \hat{a}_p^j v_k w_h^{kp}$.

Av den mängd frågeställningar som uppkomma vid ett närmare studium av sådana lineära transformationer utväljes i avhandlingens andra kapitel speciellt en. Där studeras alla lineära transformationer w_k^i som transformera en irreducibel representationsrymd X (till $GL(n)$) i sig själv och uppfylla ekvationen $\mathfrak{a} w_k^i \mathfrak{a}^{-1} = a_j^i \hat{a}_k^h w_h^j$. Detta fall har ett speciellt intresse. Om man nämligen har två lösningar $w_k^i = w'^i_k$ och $w_k^i = w''^i_k$ till denna ekvation, så äro utom $c w'^i_k$ (c ett tal) och $w'^i_k + w''^i_k$ även $w_k^i = w'^i_h w''^h_k$, $w_k^i = w'^h_k w''^i_h$, $w_k^i = w''^i_h w'^h_k$ etc. nya lösningar. Det är också väl bekant, att en lösning är $w_k^i = e_k^i$, där transformationerna e_k^i bilda en bas för alla infinitesimala transformationer av $GL(n)$ och definieras av $e_k^i x^j = \delta_k^j x^i$, $e_k^i x_j = -\delta_j^i x_k$, $e_k^i x^{jh} = \delta_k^j x^{ih} + \delta_k^h x^{ji}$, $e_k^i x_j^{hp} = \delta_k^h x_j^{ip} + \delta_k^p x_j^{hi} - \delta_j^i x_k^{hp}$ etc. Två bassystem av lösningar införas, $w_k^{i(p)}$ och $w_k^{i(-p)}$, $p = 1, \ldots, m$, så att varje lösning kan skrivas $w_k^i = \Sigma c_p w_k^{i(p)} = \Sigma c_{-p} w_k^{i(-p)}$, där c_p och c_{-p} äro entydigt bestämda tal. Dessutom gäller, att $w_i^{h(p)} w_h^{k(q)} = \delta^{pq} w_i^{k(q)}$ och $w_k^{i(-p)} w_h^{k(-q)} = \delta^{pq} w_h^{i(-q)}$, där (δ^{pq}) är enhetsmatrisen av ordningen m. Vidare anges explicit konstanterna a_q^{-p} och $a^p{}_q$ i ekvationerna $w_k^{i(-p)} = \Sigma a_q^{-p} w_k^{i(q)}$ och $w_k^{i(p)} = \Sigma a^p{}_{-q} w_k^{i(-q)}$. Härigenom har man vunnit en fullständig överblick över alla lösningar till $\mathfrak{a} w_k^i \mathfrak{a}^{-1} = a_h^i \hat{a}_k^j w_j^h$ och alla förekommande kontraktioner. Vid den närmare explicita utformningen utnyttjas de ovannämnda arbetena av Cartan och Weyl. Analoga problemställningar behandlas för komplexgruppen i kap. 3 och för de ortogonala grupperna i kap. 4.

Maxwells ekvationer $d_h F_{hk} = 0$ och $d_h F_{ik} + d_i F_{kh} + d_k F_{hi} = 0$ (summation över lika indices), där $F_{ik} = -F_{ki}$ är funktioner av fyra variabler ξ_k och $d_k = \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ är, som av deras form framgår, invarianta då man substituerar $a_{kj} d_k$ för d_j och $a_{ik} a_{jh} F_{ij}$ för F_{kh},

där (a_{kj}) är en ortogonal matris. Därvid transformeras vänstra leden som en vektor och en trivektor. Man härleder som bekant lätt, att $d_h d_h F_{ik} = d_h(d_h F_{ik} + d_i F_{kh} + d_k F_{hi}) - d_i d_h F_{kh} - d_k d_h F_{hi} = 0$, där $d_h d_h = \Delta$ är Laplaceoperatorn. Följande frågeställning erbjuder sig i detta sammanhang. I Maxwells ekvationer ersättes F_{ik} med storheter $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, .., som transformeras efter en irreducibel representation av en ortogonal grupp, och vänstra leden av ekvationerna mot en eller flera grupper av lineärkombinationer av produkter $d_h F_{(r)}$, som transformeras efter en irreducibel representation. Ett ändligt antal, N stycken, sådana grupper kunna överhuvud ifrågakomma, och man fragar sig vilka som skola tagas med för att man av ekvationerna och ombytbarheten $d_h d_k - d_k d_h$ skall kunna sluta, att $\Delta F_{(r)} = 0$ för alla r. Svaret på denna fråga ges i avhandlingens sista kapitel med hjälp av resultaten fran kap. 4. Det visar sig härvid, att det i regel endast är antalet grupper av lineärkombinationer som är avgörande. Med vissa undantag gäller: ekvationerna ha den önskade egenskapen då och endast da detta antal ej understiger $\frac{1}{2}N$ då N är jämnt och $\frac{1}{2}(N+1)$ då N är udda. I avhandlingens sista avsnitt uppställas med hjälp av detta resultat ekvationer av liknande typ som de ovannämnda i vilka $\Delta F_{(r)} = m^2 F_{(r)}$ (m^2 en konstant). Dessa senare innehålla som specialfall Diracs ekvationer för elektronen.

Carl-Gustav Esseen, *Fourier Analysis of Distribution Functions. A Mathematical Study of the Laplace-Gaussian Law.* (Acta mathematica, Vol. 77). Uppsala 1944, 125 s. Disp. i Uppsala 14 okt. 1944. Opponenter: prof. Lars Ahlfors och fil. lic. Bo Kjellberg.

Avhandlingen behandlar den s. k. centrala gränsvärdessatsen inom sannolikhetskalkylen, enligt vilken fördelningsfunktionen $F_n(x)$ av summan av ett stort antal (n) oberoende statistiska variabler är approximativt normal. Avhandlingens huvudproblem är att uppskatta approximationsgraden som funktion av n.

Under förutsättning att de absoluta tredje momenten äro ändliga erhöll Liapounoff uppskattningen $C \cdot \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ av resttermen, där C är en ändlig kvantitet blott beroende av momenten. Denna uppskattning skärptes senare av Cramér till $\frac{C_1}{\sqrt{n}}$, förutsatt att ett visst villkor är uppfyllt. Man har även utvecklat $F_n(x)$ i serie efter den normala fördelningsfunktionen och dess derivator (Charlier, Edge-

WORTH m. fl.). Cramér har visat, att det på detta sätt ibland är möjligt att erhålla en asymptotisk utveckling och en uppskattning av resttermen.

Vid studiet av dessa frågor har det visat sig lämpligt att i stället för att direkt angripa fördelningsfunktionerna införa deras Fourier-Stieltjes transformer (karakteristiska funktioner; LÉVY m. fl). I arbetets första kapitel gives en framställning av teorien för transformen av en funktion av begränsad variation. I kap. 2 bevisas en genom sina tillämpningar fundamental sats angående uppskattningen av skillnaden mellan två fördelningsfunktioner, då man känner en viss integral innehållande skillnaden mellan deras karakteristiska funktioner.

I kap. 3 erhålles skärpningen $\frac{C_3}{\sqrt{n}}$ av den liapounoffska uppskattningen utan något inskränkande villkor. Detta är även den riktiga storleksordningen såsom lätt visas med exempel. Kap. 4 behandlar den asymptotiska utvecklingen av $F_n(x)$. Här införes begreppet gitterfördelning, d. v. s. en rent diskontinuerlig fördelning med sannolikhetsmassan förlagd till en följd ekvidistanta punkter. Gitterfördelningarna giva i sin egenskap av extremalfall upphov till maximal asymptotisk avvikelse. I kap. 5 studeras resttermens beroende av både n och x; de erhållna resultaten tillämpas på den s. k. de stora talens likformiga lag.

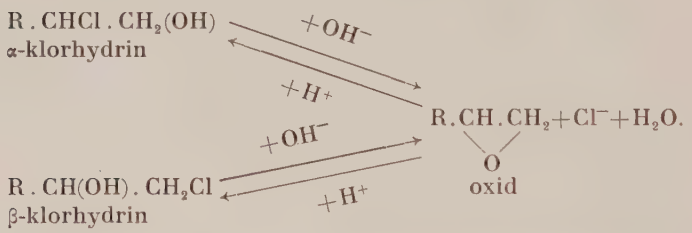
Avhandlingens andra del, kap. 6—8, behandlar den centrala gränsvärdessatsen för statistiska variabler i en rymd av godtyckligt antal dimensioner. På detta område förelågo hittills mycket sparsamma resultat. Bevisen föras fortfarande med hjälp av karakteristiska funktioner. Väsentlig är en sats om de karakteristiska funktionernas obenägenhet att antaga värden numeriskt nära 1. Sambandet mellan resttermens storleksordning och storleksordningen av den s. k. gitterresten i den analytiska talteoriens gitterpunktproblem påvisas. De erhållna resultaten tillämpas på den numera inom statistiken allmänt använda s. k. χ^2-metoden.

TAGE BERGKVIST, *Några aromatiska klorhydriner och med dem besläktade ämnen.* En preparativ och kinetisk undersökning. Lund 1944, 122 s. Disp. i Lund den 24 maj 1944. Opponenter: docent KARL-JOHAN KARRMAN och fil. mag. TORSTEN NILSSON.

Avsikten var att undersöka huruvida en viss lagbundenhet, benämnd Michaels regel, som gäller för alifatiska isomera klorhydriners bildnings- och sönderdelningshastighet, också gäller vid aromatiska ämnen av detta slag. Ett av avhandlingens huvudresultat är konstaterandet att så verkligen är fallet.

Michaels regel kan formuleras: Om två isomera föreningar kunna bildas genom addition, så är förhållandet mellan mängderna av de bildade ämnena lika med förhållandet mellan de hastigheter, varmed dessa återföras i utgångssubstansen.

Allmänt kan man skriva de undersökta reaktionerna:



Det till grund för avhandlingen liggande försöksmaterialet utgöres av klorhydriner av typen $R \cdot CHCl \cdot CH_2(OH)$ (α-klorhydrin) och $R \cdot CH(OH) \cdot CH_2Cl$ (β-klorhydrin) samt motsvarande oxider och glykoler. R utgöres av fenyl, o-tolyl, m-tolyl, p-tolyl, bensyl, cyklohexyl och α-naftyl. Sammanlagt ha ett trettiotal ämnen framställts, flertalet för första gången.

Dels för utredande av det uppställda problemet, dels för identifiering av klorhydrinerna har hastighetskoefficienten för den alkaliska hydrolysen bestämts vid en eller flera av temperaturerna 0°, 18° och 25°. Det visade sig, att då kloren sitter vid en kolatom närmast bensolringen, sönderdelningshastigheten är mycket stor. Vid dessa bestämningar måste därför en metod utexperimenteras, som tillåter provtagning efter endast ett par sekunders reaktionstid. För dessa snabbt reagerande klorhydriner har även den spontana hydrolysens hastighetskoefficient bestämts.

I arbetet ingår också en jämförelse mellan hastighetskoefficienterna för de olika klorhydrinernas sönderdelning, och vidare har aktiveringsenergi och aktionskonstant för en del av reaktionerna beräknats.

En närmare undersökning av sambandet mellan hastighetskoefficientens och saltkoncentrationens storlek har även utförts. Härvid framkom en diskrepans mellan resultaten vid titrering enligt olika metoder. Orsaken till denna diskrepans har förklarats, vilket återigen lett till en framställningsmetod för glykoler samt en metod att bestämma hydratationshastigheten i alkaliska lösningar för vissa substituerade etylenoxider.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1944: 2—3.

Ur innehållet: N. V. E. Nordenmark, Svenska Astronomiska Sällskapet 25 år; B. Lindblad, Astronomiens landvinningar under de senaste 25 åren; Y. Öhman, En utställning av amatörtillverkade teleskop; H. O. Grönstrand, Om beräkningen av solförmörkelser; C. Schalén, Om reflexnebulosor; K. G. Malmquist, Stjärnor med osynliga följeslagare; N. V. E. Nordenmark, Ole Römer.

Svensk kemisk tidskrift, 1944: 8—10.

Ur innehållet: F. Lindstrand, Über Eisenperchlorate; S. Klevås, Bestimmung des Dextrans im Blut bei seiner Anwendung als Plasmasubstitut; H. Willstaedt, Studien zur Chemotherapie der Tuberculose; O. Samuelsson, Undersökning av komplexa saltlösningar med användande av organiska jonbytare; K. Myrbäck m. fl., Zustand des B_1-Vitamins in der Hefe; R. Dahlbom and T. Ekstrand, Trityl Derivatives of Sulphanilamides; B. Adell, Über den Einfluss der Temperatur auf die Geschwindigkeit der Umwandlung von Nitrito- in Nitropentamminkobalt(III)-chlorid in wässerigen Lösungen und festem Zustande; V. Öhman, Partition and Reaction Equilibria in the Preparation of Dinitodiglycol. Meddelande om förmedling av apparater och kemikalier.

Populär radio, 1944: 9—11.

Ur innehållet: Radiostudions akustik; Mottagarens ljudkvalitet; Höginduktiv primärspole; Elektronrör vid ultrahöga frekvenser; Kondensatorer för likriktare; Beräkning av drosslar; Mätsändare.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1944: 3.

Ur innehållet: B. Strömgren, Ole Rømer som Astronom; H. M. Hansen, Ole Rømer som Fysiker; A. Engelund, Ole Rømer som Ingeniør; P. Naur, Kometerne.

Matematisk Tidsskrift, København, 1943: 1—4.

Ur innehållet i avd. A: B. Jessen, Den aksiomatiske Metode; H. Christensen, Grafisk Løsning af Andengradsligningen med Anvendelser; G. Boldsen, Uendelige decimalbrøker; Th. V. Jensen, Trekantens Vinkelsum; H. Clausen, En sætning om trekanter; Fr. Fabricius-Bjerre, Keglesnitslæren — i ny belysning. Ur innehållet i avd. B: J. Hjelmslev, Om indskydninger; O. Burrau, Middelfejlen som Usikkerhedsmaal; J. Hjelmslev, Konstruktioner med normeret Lineal; Danske Eksamensopgaver.

1944: 1—2 avd. A: N. Bülow Møller, Fermats og Wilsons Sætninger; H. Jørgensen, Heroniske og Pythagoræiske Trekanten; H. Jensen, Lidt om Stangplanimeteret; K. W. Jørgensen, Elementært Bevis for Sætningen om Nipunktscirklen. Avd. B: Fr. Fabricius-Bjerre, Om L. Eckharts aksonometriske metode; Danske Eksamensopgaver.

Naturens Verden, København 1944: 7.

Ur innehållet: V. Madsen, Geologiens Grundproblemer før og nu; H Blegvad, Verdenshavenes Udforskning III.

(Forts. å sid. 246.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1362) *I en konvex fyrsiding kan en cirkel inskrivas. Sök relationerna mellan radierna i de tolv cirklar, som tangera tre men i allmänhet ej fyra av sidorna.* *N. J.*

1363) *En cirkel, två punkter P och Q, sträckan k samt vinkeln α äro givna. Att konstruera punkterna A och B på cirkeln så, att* $AB = k$ *och vinkeln mellan PA och QB* $= \alpha$. *X.*

1364) *Konstruera ett kägelsnitt, då man känner en tangent med dess tangeringspunkt, en brännpunkt samt en punkt på kurvan.* *C. E. Fröberg.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1365) Bestäm exakta värdet av $(4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\,(6 - 2\sqrt{5} + \sqrt{50 - 22\sqrt{5}})$.

Svar: 4.

1366) Lös ekvationssystemet $x + y = z^2$; $x + z = y^2$; $y + z = x^2$.

Svar: $x_1 = y_1 = z_1 = 0$; $x_2 = y_2 = z_2 = 2$.

1367) Visa, att ekvationen $\operatorname{tg}^3 x + a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + a = 0$ satisfieras av tre vinklar, som kunna ingå i en och samma triangel.

1368) Bevisa formeln $T = r_b \cdot r_c \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

1369) Bestäm sidan a i en triangel, då man känner ytan T, vinkeln A och medianen m_a.

Svar: $a = 2\sqrt{m_a^2 - 2T \cot A}$.

1370) Medianerna mot två sidor i en triangel äro vinkelräta mot varandra. Den tredje sidan är $= a$ och motstående vinkel $= A$. Visa, att triangelns yta är $a^2 \operatorname{tg} A$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1365 är insänd av *E. Smn.*; 1366—1369 av *B. Svenonius*; 1370—1372 av *B-r*; 1373—1375 av *F. E.*

1371) I $\triangle ABC$ sammanbindes A med en punkt D på BC. Vid figurens rotation kring AB alstra trianglarna ABD och ACD kroppar, vilkas volymer förhålla sig som 1 : 8. Hur förhålla sig volymerna av de kroppar, som samma trianglar alstra vid rotation kring AC?

Svar: 5 : 4.

1372) En triangel med ytan 12 enheter har sin tyngdpunkt i origo. Ena sidan går genom $(1; \frac{1}{2})$ och delas av de positiva koordinataxlarna i tre lika delar. Bestäm det motstående hörnets koordinater.

Svar: $(-4; -\frac{2}{3})$ eller $(-\frac{4}{3}; -2)$.

1373) Kring en rektangel med sidorna 6 cm och 8 cm är en cirkel omskriven. Visa, att produkten av avstånden från en punkt på cirkeln till två motstående sidor är lika med produkten av avstånden till de två andra sidorna och även lika med produkten av avstånden till diagonalerna.

1374) Upprita på diametern AB i en cirkel med radien r en rektangel $ABCD$, vars andra sida $= r\sqrt{2}$. P är en godtycklig punkt på cirkeln. PC och PD skära AB i E och F resp. Visa, att $AE^2 + BF^2 = 4r^2$.

1375) Genom A $(a; 0)$ och B $(b; 0)$ dragas två linjer med vinkelkoefficienten k och genom C $(c; 0)$ och D $(d; 0)$ två linjer med vinkelkoefficienten k_1. Visa, att diagonalerna i den erhållna parallellogrammen skära x-axeln i punkter, vilkas lägen äro oberoende av k och k_1.

Lösn. till uppg. 1331—1333.

1331) *En triangels vinklar äro A, B och C. Vinklarna mellan dess medianer äro α, β och γ. Visa, att* $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot A + \cot B + \cot C$. *B-r.*

Ortogonalprojektionen av en cirkel med dess inskrivna liksidiga trianglar är en ellips med de ∞^1 däri inskrivna trianglar, $\triangle$, som ha tyngdpunkten i ellipsens centrum. Omvänt kan varje triangel ABC uppfattas som projektion av en liksidig triangel $A_1B_1C_1$ och därmed som medlem av en dylik triangelfamilj $\triangle$; varje triangel i planet ABC som är projektion av en liksidig triangel i planet $A_1B_1C_1$ är likformig med en $\triangle$.

1. I triangeln ABC är $a^2 + b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{3a^2}{2} = \frac{9}{2}(OA^2 + OD^2)$, där $OD \parallel BC$ är den med OA konjugerade halvdiametern i den omskrivna ellipsen, ty dess längd är $\frac{a}{\sqrt{3}}$, som man finner vid

återgang till den liksidiga $A_1B_1C_1$. Enligt en sats av Apollonios ha alltså alla Δ samma »$a^2+b^2+c^2$».

2. De ha vidare samma yta »T» enl. projektionssatsen. Alltså är förhållandet $a^2+b^2+c^2 : 4T$ lika för alla trianglar i planet ABC, som äro projektioner av liksidiga trianglar i planet $A_1B_1C_1$. Då är också $\cot A + \cot B + \cot C$ oföränderligt för alla sådana trianglar, ty $\Sigma \cot A = \frac{1}{2}\Sigma(\cot A + \cot B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4T}$ $= \cot v$, där v är Brocards vinkel).

Inlägg nu med någon generalisering av uppgiften P_a, P_b, P_c på resp. sidor i ABC så, att $BP_a : P_aC = CP_b : P_bA = AP_c : P_cB$, och inför motsvarande i fig. $A_1B_1C_1$. Av den senare framgår att AP_a, BP_b, CP_c kunna genom parallellförflyttning sammanföras till en triangel med vinklarna α, β, γ, som är projektion av en liksidig triangel i planet $A_1B_1C_1$. Alltså är $\cot A + \cot B + \cot C = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$.

Tillämpning på medianerna ger uppg. 1331, med här angiven tolkning av »vinklarna mellan dess medianer». Samma gäller om den av AP_a, BP_b, CP_c in situ bildade triangeln reducerad till en punkt för medianerna) samt om triangeln $P_aP_bP_c$. *X.*

Även löst av *Hg. B. Svenonius, O. Dahlgren* och *L. Sandgren.*

1332) *En strömbana har formen av en regelbunden $(m+n)$-hörning $A_0A_1 \ldots A_{m+n-1}$ $(m \geqq 1;\ n \geqq 1)$ med radierna till hörnen inlagda. Motståndet i varje sida är s ohm, i varje radie r ohm. A_0 och A_m (eller A_n) förbindas med var sin av en strömkällas poler. Bestäm kombinationsmotståndet. Hur varierar detta med m för givet $m+n=N$?* *X.*

Vi antaga, att volt-talen för potentialerna i A_0, $A_1 \ldots$, A_m äro $x_0 = 1$, $x_1 \ldots$, x_{m-1}, $x_m = -1$. Av symmetriskäl är potentialen i medelpunkten 0 volt. För $x_1, \ldots, x_{m-1}$ gäller rekursionsformeln $\frac{x_r - x_{r-1}}{s} + \frac{x_r - x_{r+1}}{s} + \frac{x_r - 0}{r} = 0$, d. v. s. $x_{r+1} - \left(\frac{s}{r}+2\right)x_r + x_{r-1} = 0$, $r = 1, 2 \ldots, m-1$. Om nu t_1 och t_2 äro (de positiva, distinkta rötterna till ekv. $t^2 - \left(\frac{s}{r}+2\right)t + 1 = 0$, så att $t_1 + t_2 = \frac{s}{r} - 2$ och $t_1 t_2 = 1$, kan man enl. känd metod sätta $x_r = At_1^r + Bt_2^r$ med villkoren $1 = A + B$ och $-1 = At_1^m + Bt_2^m$. Till följd av att $t_1 t_2 = 1$ får man speciellt $x_1 = \frac{t_1^{m-1} - t_2^{m-1} - (t_1 - t_2)}{t_1^m - t_2^m}$, vilket later omforma sig till $x_1 = \frac{t_1^{\frac{m}{2}} - t_2^{\frac{m}{2}}}{t_1^{\frac{m}{2}} - t_2^{\frac{m}{2}}}$ (giltigt även för $m = 1$).

Går man andra vägen: $A_0, A_{m+n-1}, \ldots A_m$, får man på samma sätt $x_{m+n-1} = \dfrac{t_1^{\frac{n}{2}-1} - t_2^{\frac{n}{2}-1}}{t_1^{\frac{n}{2}} - t_2^{\frac{n}{2}}}$. Det sökta kombinationsmotståndets ohmtal R erhålles sedan ur $\dfrac{2}{R} = \dfrac{1-0}{r} + \dfrac{1-x_1}{s} + \dfrac{1-x_{m+n-1}}{s}$, dvs. $\dfrac{2s}{R} = 2 + \dfrac{s}{r} - x_1 - x_{m+n-1} = t_1 + t_2 - x_1 - x_{m+n-1}$.

Efter insättning och liknande omformning som nyss följer till sist $R = 2s \cdot \dfrac{\left(t_1^{\frac{m}{2}} - t_2^{\frac{m}{2}}\right)\left(t_1^{\frac{n}{2}} - t_2^{\frac{n}{2}}\right)}{\left(t_1 - t_2\right)\left(t_1^{\frac{m+n}{2}} - t_2^{\frac{m+n}{2}}\right)}$. Naturligtvis kunna x_1, x_{m+n-1} och R medelst binomialteoremet uttryckas direkt i r, s, m och n också. Summan av två positiva tal med produkten 1 växer, ju mer talen avlägsna sig från 1. Då nu $R = 2s \cdot \dfrac{t_1^{N} + t_2^{N} - \left(t_1^{\frac{m-n}{2}} + t_2^{\frac{m-n}{2}}\right)}{\left(t_1 - t_2\right)\left(t_1^{\frac{N}{2}} - t_2^{\frac{N}{2}}\right)}$,

där $m + n = N$, inses att $R_{\max}$ inträffar för $m = n = \dfrac{N}{2}$, om N är jämnt och för $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \dfrac{N \pm 1}{2}$, om N är udda (intagen så långt ifrån varandra som möjligt). Frånsett kortslutning ($R = 0$) har R sitt min. för $m = 1$ eller $n = 1$ (intagen så nära varandra som möjligt).

X.

Även löst av *F. E.*

1333) *Sök orten för inflexionspunkterna på de tredjegradskurvor av formen* $y(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = Ax^2 + Bx + C$, *vilka ha en maximipunkt i (1; 1) och en minimipunkt i (−1; −1).* *X.*

Varje sådan kurva har en ekvation av formen $\dfrac{y-1}{y+1} = C \cdot \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, där $C < 0$, så att $-1 \leqq y \leqq 1$ gäller för både kurvor och ort. Om $y'' = 0$, fås genom två gånger upprepad logaritmisk derivation:

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{y'}{(y+1)(y-1)} \text{ och } \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{yy'}{(y+1)(y-1)}.$$

Elimination av y' ger ortens ekvation $x = 2y$, en rät linje.

N. J.

Även löst av *B. Svenonius* och *L. Sandgren.*

(Forts. från sid. 241.)

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1944: 3.

Ur innehållet: L. VEGARD, O. E. Frivold. In memoriam; E. STRÖMGREN, Ole Rømer; E. A. HYLLERAAS, Nobelpristager i fysikk: A. Michelson; J. HOLTSMARK, Forsterkning av lyd ved resonans; A. KVALHEIM, Kvantitativ spektralanalyse med lysbuen; O. DAHL, Anvendelse av høivoltrøntgenstråling; R. KREKLING, Serieøvelser i fysikk for gymnasiet; K. AANERUD, Bølger i vann.

Naturen, Bergen 1944: 7—10.

Ur innehållet: H. WERGELAND, Flytende helium, den merkeligeste av alle væsker; T. HØVERSTAD, Niob, et nytt legeringsmetall for stålindustrien; A. KVALE, Hva vet vi om jordens indre?; H. MOSBY, Om en teori for havstrømmene; B. HELLAND-HANSEN og S. LIE, Fysisk havforskning i Sognefjorden.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1944.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen $\frac{3}{x^2-2x-3}+\frac{2}{x^2-x-2}+\frac{3{,}5}{x+1}=0$.
2. En person tog år 1921 en livförsäkring på 10 000 kr. Premien var 200 kr och erlades vid slutet av varje kalenderår, första gången vid slutet av år 1921. Personen avled år 1943, innan premien detta år erlagts. Försäkringen utbetalades vid början av år 1944. Till vilket sammanlagt belopp skulle de erlagda premierna ha vuxit vid denna tidpunkt, om de i stället för att inbetalas till försäkringsbolaget hade kunnat placeras så, att en årlig ränta av 4 % erhållits, och vilken placering skulle i detta fall ha varit fördelaktigast?
3. Två geometriska serier ha samma första term och bestå vardera av sex termer. Kvoterna ha samma numeriska värde men olika tecken. Den ena seriens summa är 133, den andras — 665. Vilka äro serierna?
4. En tomt har formen av en fyrhörning $ABCD$, där AB är 48 m, BC 15 m, CD 36 m och DA 51 m. Vinkeln B är 120°. Beräkna tomtens areal.
5. $ABCD$ är en rektangel, där AB är 7 cm och BC 5 cm. På sidorna AB, BC, CD och DA avsättas $AE = BF = CG = DH = x$ cm.

Bestäm ytan av fyrhörningen *EFGH* som funktion av x, åskådliggör densamma i ett diagram och bestäm medelst diagrammet eller på annat sätt dess minsta värde.

6. En bils luftmotstånd (y) är direkt proportionellt mot kvadraten på bilens hastighet (x), alltså $y = kx^2$. Om luftmotståndet mätes i kilogramkraft (*kgf*) och hastigheten i km/tim, kan proportionalitetsfaktorn (k) för en viss bil sättas = 0,005. Bestäm den hastighet hos bilen, för vilken det gäller, att en ökning av hastigheten med 1 km/tim medför en ökning av luftmotståndet med 0,3 kgf.

7. I ett segment av en cirkel, vars radie är 3 cm, äro två cirklar, båda med radien 1 cm, inskrivna, så att vardera tangerar segmentets båge och korda och dessutom den andra cirkeln. Två olika fall äro möjliga; i det ena är segmentet mindre, i det andra större än en halvcirkel. Hur stora äro i dessa båda fall segmentets höjd och korda?

8. I en triangel *ABC* är sidan *BC* 7 cm och vinkeln *A* 60°. Från en punkt *D* på sidan *AC* drages en tangent till den i triangeln *ABC* inskrivna cirkeln. Tangenten råkar sidan *AB* i *E*. Punkten *D* är så vald, att vinkeln *ADE* är lika stor som vinkeln *B*. Beräkna ytan av triangeln *ABC*, om ytan av triangeln *ADE* utgör 9 % av densamma.

Resultat: **1.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2\frac{4}{7}$. **2.** 7 124 kronor. **3.** Första termen är -32 och kvoterna $-\frac{3}{2}$ resp. $\frac{3}{2}$. **4.** $36(\sqrt{75} + \sqrt{630}) = 1215$ m². **5.** Ytan $= y = 2(x-3)^2 + 17$; $y_{\min} = 17$ cm² för $x = 3$ cm. **6.** 29,5 km/tim. **7.** I första fallet är höjden och kordan resp. $4 - \sqrt{3} = 2{,}27$ cm och $2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = 5{,}82$ cm, i andra fallet resp. $4 + \sqrt{3} = 5{,}73$ cm och $2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} = 2{,}48$ cm. **8.** $10\sqrt{3} = 17{,}32$ cm². Trianglarna *ADE* och *ABC* äro likformiga, och den förras sidor äro 0,3 av den senares. Tangenterna från *B*, *C*, *D*, *E* äro parvis lika, varav $BC + DE = BE + CD$, d.v.s. $7 + 0{,}3 \cdot 7 = c - 0{,}3\,b + b - 0{,}3\,c$, som ger $b + c = 13$ o. s. v.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $2x - y + 6 = 0$ och $x + y - 12 = 0$. Bestäm ekvationen för den tredje sidan, då dess mittpunkt är (3; 3).

2. Bestäm storleken av den yta, som inneslutes av tangenterna till de båda kurvorna $15y = 73 + 18x - 3x^2$ och $15y = 217 - 48x + 3x^2$ i dessas skärningspunkter.
3. Bestäm summan av n termer i följande serie av 10-logaritmer:

$$\log 2 + \log \tfrac{3}{2} + \log \tfrac{4}{3} + \log \tfrac{5}{4} + \ldots .$$

   Bestäm därefter de värden på n, för vilka summan är ett helt positivt tal.
4. För bestämning av vindstyrka och vindriktning på olika höjd över marken användas ofta vätgasfyllda gummiballonger, vilka ha konstant stighastighet. Från en fast observationsplats (O), där en avläsningskikare är placerad, släppes en ballong, vars läge sedan med vissa mellanrum iakttages. Man bestämmer sålunda ballongens höjdvinkel v, d. v. s. den vinkel, som syftlinjen från O till ballongen bildar med horisontalplanet, samt den vinkel u, som vertikalplanet genom ballongen och O bildar med meridianplanet genom O, varvid vinkeln räknas från norr åt öster. Vid ett tillfälle avlästes, sex minuter efter det ballongen lämnat O, $v = 38{,}2°$ och $u = 52{,}3°$. Fyra minuter senare voro vinklarna $v = 31{,}5°$ och $u = 61{,}8°$. Bestäm vindstyrkan i m/sek i de ifrågavarande luftlagren, om den antages vara konstant till storlek och riktning. Ballongens stighastighet antages vara 180 m/min. Från vertikala luftströmmar bortses.
5. I en triangel ABC är vinkeln B 40°. Tangeringspunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln delar sidan AC i förhållandet 1 : 3. Beräkna triangelns övriga vinklar.
6. Genom en diagonal i en kub med kantlinjen a lägges ett plan. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av den inom kuben belägna delen av detta plan varierar, då skärningspunkten mellan planet och en av kubens kantlinjer genomlöper denna kantlinje.
7. Ekvationen $\cot^2 x + 4 \cot x - 3 = 0$ satisfieras av två grupper vinklar; x_1 tillhör den ena gruppen, x_2 den andra. Bevisa, att för dessa vinklar *exakt* gäller likheten

$$x_1 + x_2 = 45° + n \cdot 180°,$$

   där n är ett helt tal, positivt eller negativt.
8. En dubbelkon består av två kongruenta räta cirkulära koner med gemensam basyta. Dubbelkonen delas genom två mot dess axel vinkelräta plan i tre delar, vilka ha lika stora volymer och lika stora totala begränsningsytor. Bestäm konernas toppvinkel.

Resultat: **1.** $x - 5y + 12 = 0$. **2.** 12,5 ytenh. **3.** $\log(n+1)$; $n = 10^k - 1$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. **4.** 6,67 m/sek. **5.** 98°,03; 41°,97. **6.** Föl-

jande lösning torde ligga närmast till hands. Låt $AB(=a)$ vara en av de sex kantlinjer, som ej skära kubdiagonalen $CD = d = a\sqrt{3}$. Fäll från punkten P på AB en normal, h, mot CD. Den sökta snittytan (y) är då dubbla triangelytan PCD; $\therefore y = h \,.\, d$. Som oberoende variabel väljes lämpligen $x = PM$, där M är AB:s mittpunkt. Sidorna PC och PD uttryckas i a och x, varefter h beräknas med hjälp av nyssnämnda sidors projektioner på CD. Man får $h^2 = \frac{3a^2 + 4x^2}{6}$ och $y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3a^2 + 4x^2}$ (en hyperbelbåge); $y_{\max} = a^2\sqrt{2}$ för $x = \pm\frac{a}{2}$ och $y_{\min} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ för $x = 0$.[1] 8. 44°,56.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Till en ellips dragas tangenterna från en punkt på förlängningen av den mindre axeln. Den vinkel mellan tangenterna, inom vilken ellipsen är belägen, är 120°. Avstånden från den mindre axelns ändpunkter till kordan genom tangeringspunkterna förhålla sig som 1 : 2. Beräkna ellipsens excentricitet.
2. Ekvationen för en parabel är $x^2 = 2py$. Genom origo drages en korda och genom dennas mittpunkt diametern. Härled diameterns ekvation, och sök orten för skärningspunkten mellan diametern och en linje genom brännpunkten, vinkelrät mot kordan.
3. Undersök kurvan $y = \frac{x^3}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$ med avseende på asymptoter, maxima och minima och inflexionspunkter samt upprita densamma. Visa, att inflexionspunkterna ligga i rät linje.
4. P är en variabel punkt inom kvadraten $ABCD$. Vinkeln APB är rät. Beräkna vinkeln PAB, om sträckan PD är så liten som möjligt.
5. Från en punkt P dragas tangenterna till en parabel. Tangeringspunkterna äro R och S. Parallellt med RS drages ännu en tangent till parabeln. I vilket förhållande delas ytan av triangeln PRS av denna tangent?
6. M är en rörlig punkt utanför en given rektangel, i vilken C är ett hörn, O diagonalernas skärningspunkt samt A och A', B och B' mittpunkterna på de motstående sidoparen. Linjen MA skär den med AA' parallella rektangelsidan genom C eller dess förlängning i D. Linjen MA' skär BB' eller dess förlängning i E. Om $OE : BB' = CD : AA'$, vilken är orten för punkten M?

[1] Se även detta häfte s. 214.

7. En funktion $f(x)$ bestämmes på följande sätt. I intervallet $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ är $f(x) = \sin^2 \frac{2x}{3}$; i intervallet $\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ är $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$, där a, b och c äro konstanter. Emedan funktionerna $\sin^2 \frac{2x}{3}$ och $a \sin x + b \cos x + c$, liksom dessa funktioners derivator, äro kontinuerliga, äro $f(x)$ och dess derivator kontinuerliga för alla x-värden i intervallet $0 \leqq x \leqq \pi$, eventuellt med undantag för $x = \frac{\pi}{2}$, beroende på värdena av konstanterna a, b och c. Bestäm dessa konstanter så, att $f(x)$, $f'(x)$ och $f''(x)$ bliva kontinuerliga även för detta x-värde. Upprita kurvan $y = f(x)$ i intervallet $0 \leqq x \leqq \pi$.

Resultat: 1. $\sqrt{\frac{23}{24}} = 0{,}9790$. 2. Diameterns ekv. är $x = pk$, där k är kordans vinkelkoeff.; orten är parabelns styrlinje, $y = -\frac{p}{2}$. 3. Asymptot är $y = x + \frac{1}{2}$; max. och min. finnas ej, inflexionspunkter äro $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3};\ \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ och $\left(-\sqrt{3};\ \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. Punkten $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ är kurvans medelpunkt. 4. 58°,29. Drag en cirkel med D till medelpunkt, som tangerar halvcirkeln med diametern AB. 5. I förhållandet 1 : 3. Om T är den tredje tangeringspunkten och M är mittpunkten på RS, är PTM en rät linje parallell med parabelns axel och $PT = TM$. 6. Med $A(a;\ 0)$, $A'(-a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $B'(0;\ -b)$ och $C(a;\ \pm b)$ är orten hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Uppgiften bör kompletteras med att *C skall ligga på rektangelsidan genom A*. Göres ej denna inskränkning, erhållas även andra, förmodligen ej avsedda lösningar. 7. $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = \frac{11}{36}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}75$; $f(\pi) = 0{,}883$; $f_{\max} = 1{,}034$ för $x = 2{,}486\ (= 142°{,}4)$; $f_{\min} = 0$ för $x = 0$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 2 och 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Avståndet mellan två hållplatser på en spårvägslinje är 350 m. En spårvagn startar från den ena hållplatsen, använder de första 30 meterna för att öka hastigheten, går de följande 300

meterna med konstant hastighet och bromsar in på de sista 20 meterna. Den första och den sista delen av rörelsen kunna anses som likformigt föränderliga, och hela färden mellan de båda hållplatserna tar 80 sek. Huru stor är spårvagnens hastighet under den likformiga delen av rörelsen?

2. Med en begynnelsehastighet av 300 cm/sek slungas en tung kropp uppför ett strävt lutande plan. Den tillryggalägger en sträcka av 50 cm på planet, innan den når planets övre ända i en punkt, som ligger 30 cm högre än utgångspunkten, fortsätter därefter i en fri kastbana och faller slutligen ned på ett horisontellt plan i jämnhöjd med det lutande planets bas. Beräkna med hjälp av energiprincipen eller på annat sätt kroppens hastighet vid nedslaget. Friktionskoefficienten mellan kroppen och planet är 0,20. Kroppens utsträckning samt luftmotståndet lämnas ur räkningen.
3. Ett slutet rum, vars volym är 10,2 m^3, innehåller luft med relativa fuktigheten 75 %. Man vill minska fuktigheten och inför därför vattenfritt klorkalcium i rummet. Härigenom lyckas man avlägsna 105 g vatten. Huru stor är därefter den relativa fuktigheten i rummet? Temperaturen är hela tiden + 18° C. Vattenångans täthet är $\frac{5}{8}$ av tätheten för luft vid samma tryck och temperatur. Behövliga uppgifter om vattenångans mättningstryck hämtas ur räknetabellerna.
4. Med två efter varandra ställda tunna samlingslinser L_1 och L_2, vilkas optiska huvudaxlar sammanfalla, avbildar man ett mycket avlägset föremål, som befinner sig på den gemensamma axeln framför L_1. Avståndet d mellan linserna varieras. Man finner, att linssystemet åstadkommer en reell bild bakom L_2 för alla värden på d, utom då d ligger mellan 40 och 50 cm. Angiv de båda linsernas brännvidder, f_1 och f_2.
5. I en astronomisk tub, vars objektiv har brännvidden 100 cm och diametern 5,0 cm och vars okular har brännvidden 6,0 cm och diametern 2,0 cm, begränsas synfältet av en cirkulär bländare i objektivets fokalplan. Hur stor diameter kan den fria bländaröppningen högst ha, om vid inställning på ett oändligt avlägset föremål alla ljusstrålar, som gå genom objektivet och bländaren, även skola passera okularet? Objektiv och okular betraktas som tunna linser.
6. Ett motstånd BC på 100 Ω är anslutet till ett likströmsnät med spänningen 220 V. Mellan B och en längs motståndet förskjutbar glidkontakt D äro efter varandra inkopplade en seriemotor och en ampèremeter. Den del av motståndet BC, som ligger mellan B och D, är 70 Ω. Motorn driver en luftpump. Strax efter det

motorn satts i gång, visar ampèremetern 3,0 A, men strömmen nedgår senare till 2,0 A. Hur mycket minskas härvid den av motorn upptagna elektriska effekt, som kan omsättas till arbete? Ankarets och fältmagneternas sammanlagda motstånd är 2,0 Ω. Ampèremeterns och tilledningstrådarnas motstånd kan försummas.

7. En elektrisk kraftledning för likström består av två jämsides lagda kopparledare, vardera med 35 mm² tvärsnittsyta. På två ställen *B* och *C* på ledningssträckan, belägna 300 m från varandra, hålles spänningen mellan de båda ledningarna konstant vid 220 V, och på två ställen mellan *B* och *C* uttages ström. Vid det ena strömuttagningsstället, som ligger 100 m från *B*, uttages 50 A mellan ledningarna, och vid det andra, som ligger 100 m från *C*, 30 A. Hur stor är spänningen mellan de båda kopparledningarna vid strömuttagningsställena? Kopparns specifika ledningsmotstånd är 0,0175.

8. Över två små lättrörliga trissor löper ett lätt snöre, som i vardera ändan uppbär en tvåhektogramsvikt. Trissorna äro uppställda i samma vertikalplan och på samma höjd, 6 dm från varandra. En tredje vikt, likaledes på 2 hg, upphänges på snöret mitt emellan trissorna. Denna vikt understödes först med handen, så att snöret blir horisontellt mellan trissorna. Sedan för man vikten en sträcka x dm rakt nedåt. De tre vikternas lägesenergi ändras därvid. Rita en kurva, som giver deras sammanlagda lägesenergi såsom funktion av x, och använd kurvan till att bestämma det värde på x, som slutligen inställer sig, om anordningen lämnas åt sig själv. Kontrollera resultatet genom att med satsen om kraftparallellogrammen beräkna det värde på x, för vilket anordningen är i jämvikt.

Resultat: **1.** 5 m/s. **2.** 273 cm/s. **3.** 8,4 %. **4.** $f_1 = 40$ cm; $f_2 = 10$ cm. **5.** $\frac{85}{53} = 1{,}6$ cm. **6.** 39 W. **7.** Spänningarna äro vid strömuttagningsställena, B_1 och C_1, resp. $215\frac{2}{3}$ V och $216\frac{1}{3}$ V. Om motståndet pr 100 m är r ohm och strömmen i C_1B_1 är I amp., är den i BB_1 och CC_1 resp. $(50 - I)$ och $(30 + I)$ amp. Enligt uppg. är då $(50 - I)r - Ir - (I + 30)r = 0$ osv. **8.** Om lägesenergien i början är W_0 och energien mätes i 0,01 kgm, erhålles $W_x = W_0 + 4(\sqrt{x^2 + 9} - 3) - 2x$, varav $W_{min} = W_0 - (12 - 6\sqrt{3})$ för $x = \sqrt{3}$ dm. Vid kurvritningen sättes lämpligen $W_0 = 12$.

Realexamen H. T. 1944.

Provräkning.

1. Lös ekvationen
$$\frac{3}{4}(2x+6)-\frac{2}{3}[6-1\tfrac{1}{2}(5-x)] \quad \frac{x}{2}=\frac{11}{2(3x-1)}.$$
2. En tävlingscyklist startar kl. 8 från A och anländer kl. 9.30 till vändpunkten B, som ligger 50 km från A. När kan han väntas nå målet i A, om hastigheten bibehålles oförändrad, tills 10 km återstå, då den ökas med 20 %?
3. Lös följande ekvationssystem medelst grafisk metod:
$$\begin{cases} 5x-3y-5=0, \\ 5x+3y-35=0. \end{cases}$$
4. En person köpte en 6 % obligation, vilken skulle ha givit honom 5 % årlig ränta på hans pengar. Han sålde den emellertid i sin tur till 130 % kurs och förtjänade därvid 10 kr. Vilket var obligationens nominella värde, och vad betalades för den vid det förstnämnda tillfället? Ingen hänsyn tages till upplupen ränta.
5. En handlande har inköpt en vara för 200 kr och åsatt den ett försäljningspris, som är 20 % högre än inköpspriset. När han sedan säljer den, skall han i omsättningsskatt till statsverket inbetala 5 % av det för varan erhållna beloppet. Hur många procents rabatt kan han vid försäljningen högst lämna för att icke göra någon förlust?
6. Banorna för jorden (J) och planeten Venus (V) kunna betraktas som cirklar med solen (S) som medelpunkt. Det kortaste avståndet mellan J och V är 42 millioner km, det längsta 258 millioner km. Hur stort är avståndet mellan J och V, då vinkeln JSV är 60°?
7. Fyrhörningen *ABCD* är inskriven i en cirkel med 12,5 cm radie. Sidan *BC* är 7 cm och sidan *AD* 20 cm. Om sidorna förlängas, bilda de utdragna sidorna *AD* och *BC* lika stor vinkel som förlängningarna av *AB* och *DC*. Beräkna fyrhörningens yta.
8. En trästock, som kan betraktas som en rät cirkulär cylinder, flyter i vatten i horisontellt läge med $^2/_3$ av den buktiga ytan i vattnet. Hur stor del av stockens volym befinner sig under vattenytan?

Resultat: **1.** $x=\frac{2}{3}$. **2.** Kl. 10.57. **4.** 100 kr resp. 120 kr. **5.** $12\frac{16}{57}$ %.
6. 134 milj. km. **7.** 234 cm². **8.** $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}=0{,}805$.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. För att bestämma specifika vikten av ett ämne, som blott fanns att tillgå i pulverform, smälte man i en liten glasskål en lagom mängd vaselin, avlägsnade alla luftblåsor och lät vaselinet åter stelna. Därpå vägde man skålen med vaselinet, först i luft och därefter helt nedsänkt i vatten. Vikten var i förra fallet 10,60 g och i senare fallet 3,90 g. Sedan alla vattendroppar avdunstat, lade man ett skikt av pulvret över vaselinet. Genom att därefter försiktigt uppvärma vaselinet fick man pulvret att blanda sig med detta, utan att luftblåsor uppkommo. Sedan vaselinet åter stelnat, vägde alltsammans i luft 11,53 g och i vatten 4,03 g. Beräkna specifika vikten för det pulverformiga ämnet.
2. En fällbom är vridbar kring en vågrät, mot bommen vinkelrät axel, som skär bommen 1,25 m från dennas grövre ända. Bommen väger 110 kg; dess tyngdpunkt ligger 3,65 m från grovändan. För att bommen skall kunna manövreras lättare, har man vid den grövre ändan fastgjort en tyngd, som är jämntjock och 30 cm lång samt omsluter de yttersta 30 cm av bommen. Hur mycket bör tyngden väga, om tyngdpunkten för den med tyngden försedda bommen skall falla i vridningsaxeln?
3. En spårvagn med en släpvagn, vilken väger 12,5 ton, sättes i gång på en horisontell bana och har i ett visst ögonblick accelerationen 0,4 m/sek². Friktionsmotstånden kunna för släpvagnen uppskattas till en halv procent av vagnens tyngd. Huru stor är dragspänningen i kopplingen mellan vagnarna vid ifrågavarande tillfälle? $g = 9{,}8$ m/sek².
4. En liten kula, som är upphängd i en 0,75 m lång tråd, har satts i rörelse genom en stöt och beskriver en vertikal cirkel. Dess hastighet i banans nedersta punkt är 6,5 m/sek. Huru stor är dess hastighet i banans översta punkt? $g = 9{,}8$ m/sek².
5. Vid en laboration ville man bestämma den mekaniska värmeekvivalenten, d. v. s. det antal kgm, som motsvarar 1 kcal. Man inneslöt en viss mängd kvicksilver i en tunn lädersäck, uppmätte noggrant kvicksilvrets temperatur, som befanns vara 14,4°, och tillslöt lädersäcken. Därefter lät man den falla från en höjd av 150 cm mot golvet, tog upp den och lät den ånyo falla från samma höjd o. s. v. Sedan lädersäcken på detta sätt fått falla 100 gånger, mättes temperaturen ånyo och befanns ha stigit till 23,9°. Kvicksilvrets specifika värme är enligt tabell 0,035. Vilket värde på den mekaniska värmeekvivalenten erhålles ur försöket?

6. En elektrisk brödrost tager en ström av 1,8 A vid 220 V spänning. Hur mycket kostar det att använda brödrosten en halv timme, om den elektriska energien kostar 25 öre per kWh?
7. Man önskar konstruera en elektrisk kokapparat för 220 V spänning, som skall överföra 8 kg vatten i timmen till ånga av 100°C. Det vatten, som kokar bort, skall efter hand ersättas med vatten av + 10°C, så att apparatens vattenmängd alltjämt blir densamma, och man beräknar, att 5 % av den utvecklade värmemängden bortgår genom strålning och ledning. Huru stort bör motståndet i apparaten vara? Vattens ångbildningsvärme vid 100°C är 540. 1 Ws = 0,24 cal.
8. Ett batteri består av tre seriekopplade ackumulatorer, vardera med elektromotoriska kraften 2,10 V och inre motståndet 0,04 Ω. Då batteriet användes för att hålla två parallellkopplade lampor tända, sjönk polspänningen till 5,46 V. Beräkna lampornas sammanlagda effekt.

Resultat: 1. 1,16. 2. 240 kg. 3. 573 kgf. 4. 3,6 m/s. 5. 451. 6. 5 öre. 7. 7,88 ohm. 8. 38,2 W.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. En domkraft har en skruv med 12 mm stigning. Med hur stor kraft behöver man draga i den 650 mm långa spaken för att lyfta 2 ton? Skruvens verkningsgrad är 42 %.
2. En dieselmotor förbrukar 180 gram brännolja per effektiv hästkrafttimme. Hur stor är motorns verkningsgrad, om oljans effektiva värmevärde är 10 000 kcal/kg?
3. En snäckväxel skall konstrueras för en utväxling om 40:1, och skruven skall ha tre ingångar på gängorna. Hur många kuggar får skruvhjulet?
4. Två 10 mm tjocka plattjärn hopnitas med en 15 mm nit. Förbandet utsättes för en dragkraft av 1150 kgf. Beräkna a) skjuvpåkänningen i niten, b) yttrycket i kgf/cm² mellan niten och hålkanten.
5. Höjdskillnaden mellan vattenytan i en brunn och tappstället i köket till en sportstuga i ett plan är 5 meter. För att spara in en kostbar hydroforanläggning vill man sätta in en liten elektriskt driven centrifugalpump direkt på en rörledning från brunnen till tappstället. Hur mycket vatten per sekund kan man tappa upp i köket, när pumpens elektriska motor avger 0,10 effektiva hästkrafter, och verkningsgraden på pumpen med rörledning är 50 %?

6. Vid effektbestämning på en maskin användes en bromsanordning bestående av två bromsbackar, vilka omsluta maskinens bromsskiva. Bromsbackarna äro fast förenade med en horisontell hävarm, i vars yttersta ände hänger en vågskål. Genom att man belastar vågskålen med vikter kan vridmomentet avvägas. Hur stort skall avståndet mellan bromsskivans vertikala centrumlinje och vågskålens upphängningspunkt göras för att maskinens effekt P hk skall kunna beräknas ur formeln $P = \frac{F \cdot n}{1000}$, där F betyder belastningen på vågskålen i kgf och n maskinens varvtal per minut? Vågskålens och hävarmens egenvikter försummas.
7. I ett rum, som är $7 \cdot 4{,}5$ m, skola golvbjälkarna dimensioneras för en tillåten böjningspåkänning av 80 kgf/cm² samt en total belastning inklusive egen vikt av 400 kg/m². Avståndet mellan bjälkarnas mittlinjer kan antagas till 50 cm och förhållandet mellan golvbjälkens bredd och höjd sättes lika med 1 : 3. Vad blir golvbjälkarnas bredd respektive höjd?
8. En elektrisk motor om 40 effektiva hästkrafter vid 1 200 varv per minut är försedd med en remskiva, som har 200 mm diameter. Från motorn överföres kraften genom en remledning till en transmissionsaxel, vars remskiva har 600 mm diameter. Dimensionera transmissionsaxeln för en vridningspåkänning av 120 kgf/cm².
9. En 6 m lång I-balk av normalprofil skall uppläggas fritt på stöd vid ändarna och skall belastas på mitten med 900 kgf. a) Vilken balkprofil bör användas? Tillåten böjningspåkänning är 1 200 kgf/cm². b) Om man ville minska nedböjningen med 50 %, vilken normalprofil skulle då erfordras? Vid beräkningarna bortses från balkens egenvikt.

Resultat: **1.** 14 kgf. **2.** 35,1 %. **3.** 120 kuggar. **4.** a) 651 kgf/cm². b) 767 kgf/cm². **5.** 0,75 kg/s. **6.** 716 mm. **7.** Höjd 22,5 cm, bredd 7,5 cm ($3'' \times 9''$). **8.** 67 mm (standard 70 mm). **9.** a) *INP* 16 b) *INP* 20.

Georg von Hevesy

Nobelpriset i kemi 1943.

1943 års Nobelpris i kemi har tilldelats professor *Georg von Hevesy* för hans arbeten över isotopers användning som indikatorer vid studiet av kemiska processer.

Georg von Hevesy är född i Budapest 1885. Efter akademiska studier i Budapest, Berlin och Freiburg samt hos Rutherford i Manchester blev han 1920 professor vid Köpenhamns universitet, 1926 professor i Freiburg, varifrån han dock återvände till Köpenhamn. Han är för närvarande bosatt i Stockholm och arbetar vid Stockholms högskola.

Upptäckten av isotopien, vari även H. var delaktig, innebar inte blott inledningen till nya överraskande och ytterst betydelsefulla framsteg inom atomfysiken, det visade sig snart, att man i de till en början tunga grundämnenas radioaktiva isotoper hade fått ett helt nytt och finslipat hjälpmedel vid studiet av kemiska och fysi-

kaliska processer. I den mån isotopläran utvecklades och först de lätta grundämnenas stabila isotoper upptäcktes genom Thomson-Aston och därpå deras radioaktiva isotoper genom Joliot-Curie har även detta hjälpmedel fått en alltmer omfattande användning, och alldeles särskilt har man kunnat med dess hjälp upptaga utforskandet av de subtilaste av alla kemiska reaktioner, av dem, som försiggå i den levande organismen. På detta område är v. Hevesy samtidens främste auktoritet.

Grundvalen för isotopernas användning som indikatorer är deras kemiska identitet. Vi kunna därför antaga, att om i ett visst kemiskt förlopp ett av de deltagande grundämnena helt eller delvis utbytes mot en isotop, detta inte har någon inverkan på det studerade förloppet, och om någon egenskap hos isotopen tillåter oss att följa dess väg, så är denna väg samtidigt det normala elementets väg i systemet. Man företar således en viss reaktion ej med vanliga utan med »märkta» eller »etiketterade» grundämnen, d. v. s. med en blandning av elementet och en isotop, som antingen saknas i den isotopblandning, som elementet utgör eller också redan finnes däri, men genom tillsatsen kommer att ingå med en annan andel än normalt.

De första isotoperna voro tunga, radioaktiva element, isotoper till bly, vismut o. a. Redan dessa isotoper fingo en omfattande användning, varom undersökningar av v. Hevesy och F. Paneth, delvis i samarbete, vittna. Med hjälp särskilt av blyisotoper, såsom RaD eller ThB bestämdes löslighet av svårlösliga blysalter, diffusionshastighet av bly i bly, utbyteshastighet av atomer vid gränsytan fast-flytande eller inom molekyler, storleken av pulvers adsorberande yta. Genom att blanda ett aktivt element med dess inaktiva isotop kan man genom aktivitetsmätningar bestämma ovägbara mängder av den inaktiva isotopen. Även ett biokemiskt spörsmål har av Hevesy undersökts med användning av ThB som indikator, nämligen assimilationen av bly i växter, där sålunda blyets uppstigande i växten bestämts genom radioaktiva intensitetsmätningar.

Nästa etapp inom isotopforskningen markeras av upptäckten av de stabila isotoperna inom hela det periodiska systemet. För indikatorforskningen betydde denna upptäckt, att man nu erhöll en åtminstone teoretisk möjlighet att studera omsättningen av de biokemiskt viktiga grundämnena kol, väte, kväve, syre o. s. v. Genom att tillföra organismen föreningar, vari ett visst grundämne är helt eller delvis ersatt av en av dess isotoper och efter en lämplig tid undersöka blandningsproportionerna av isotoperna i organen kan man tydligen bestämma vandrings- och bildningshastigheten inom organismen. Tyvärr är den praktiska användningen av denna

metod starkt begränsad av svårigheten att separera grundämnenas isotoper. Av de nyss uppräknade elementen är det till för kort tid sedan endast väte, varav man med någorlunda lätthet kunnat framställa den tyngre isotopen, deuterium. Men denna isotop uppfyller ej villkoret att vara kemiskt identisk med väte. Senare har man ju emellertid lyckats separera kolets isotoper och framställa det tunga ^{13}C, ett förhållande, som lovar gott för det framtida utforskandet av de i organismerna försiggående reaktionerna.

Beträffande användningen av de stabila isotoperna som indikatorer må vidare sägas, att fastställandet av blandningsproportionerna blir en masspektroskopisk uppgift, som sannolikt kommer att erbjuda avsevärt mycket större svårigheter än de, som möta en aktivitetsbestämning.

Fortfarande var sålunda isotopernas användbarhet tämligen begränsad, då i ett slag situationen förändrades i och med upptäckten av de lätta grundämnenas syntetiskt framställda radioaktiva isotoper. Bland dessa finnas alla de grundämnen, som ingå i organismerna, och det är således i princip om också inte alltid praktiskt möjligt att genom tillsats av en radioaktiv isotop till något av de ämnen, som tillföras kroppen, följa detta ämnes väg och omvandlingar i organismen.

Det är för sina banbrytande och omfattande undersökningar inom detta område, som v. Hevesy har tilldelats det kemiska Nobelpriset. I en uppsats i Annual Review of Biochemistry, Vol. IX: 1940 har han själv lämnat en redogörelse för de dittills utförda arbetena, som sedan dess ytterligare utvidgats och fördjupats. I stället för ett referat härav, som av flera skäl måste bli otillfredsställande, skall här en kort redogörelse lämnas för en av v. Hevesys senaste undersökningar, som är mycket representativ för de problem han uppställer och hans sätt att med indikatorers hjälp lösa dem. Arbetet är publicerat i festskriften »The Svedberg» (1944) och gäller frågan huru länge atomer, tillförda till vita möss under fosterlivet, kvarstanna i kroppen efter födelsen till uppnådd vuxen ålder. Först några ord om den använda indikatorn. Antalet användbara aktiva isotoper begränsas av den fordran man måste sätta på en lämplig halveringstid. I allmänhet är denna ganska kort, några minuter eller några timmar; bäst lämpar sig fosforisotopen 32 med halveringstiden 14,3 dagar. Med denna isotop har också v. Hevesy utfört sina flesta undersökningar; i mindre omfattning har han även arbetat med natrium, kalium, klor, svavel o. a.

Den nu nämnda undersökningen utfördes så, att en gravid mus erhöll en injektion av aktiverat natriumfosfat. De 8 ungarna, som alla vägde lika mycket, innehöllo aktiv fosfor till lika relativ akti-

vitet. För att ungarna ej skulle i fortsättningen erhålla ^{32}P från modern, fingo de efter ett par dagar en inaktiv amma. Därefter avlivades de en och en under loppet av 3 månader. De sist kvarlevande voro fullvuxna. Kropparna förbrändes, och den relativa aktiviteten bestämdes. Resultatet av två samstämmande försöksserier blev, att djuret under tiden från födelsen till uppnådd vuxen ålder förlorar 60 % av de fosforatomer, som det innehöll som nyfött.

Medan det nyfödda djurets fosforhalt uppgår till ungefär 4 mg, avsöndrar det under 3 månader ej mindre än 1 g fosfor. Att icke desto mindre nära hälften av den ursprungliga fosformängden finnes kvar efter 3 månader, får man tillskriva det förhållandet, att fosforn huvudsakligen har sin plats i bensubstansen och där är skyddad för de hastiga omsättningar, som äga rum i andra organ.

Om ett sådant djur nu får alstra en tredje generation, så visade det sig, att en unge i den tredje generationen vid sin födelse innehåller 0,6 % av den fosfor, som en unge i den andra generationen innehöll vid sin födelse. Om samma kvot gäller även i fortsättningen, kommer en unge i elfte generationen att inte innehålla en enda av de fosforatomer, som ingingo i den första.

Detta förhållande, säger v. Hevesy, illustrerar på ett slående sätt, att arvsanlagen äro alldeles oberoende av några slags atomära band mellan föräldrar och avkomma; arvsdispositionen bestämmes uteslutande av atomernas och molekylernas förmåga att bilda vissa karakteristiska sammansättningar. »Det är mönstret, som är av betydelse, inte varje byggbit.»

G. Starck.

Otto Stern

I. I. Rabi

Nobelprisen i fysik 1943 och 1944.

Sedan länge har man som bekant i den kinetiska gasteorien postulerat, att gasmolekylerna röra sig i rätlinjiga banor, tills de sammanstöta antingen sinsemellan eller med gasmassan begränsande väggar. Denna molekylernas rätlinjiga rörelse påvisades första gången i slutet av 1800-talet, då den amerikanske forskaren Anthony iakttog den skuggbildning, som kan utbildas i väl evakuerade glödlampor genom den ljusbåge, som uppträder vid avbränning av glödtråden. Från ljusbågen utslungade molekyler avsätta sig som en beläggning på gaskolvens insida, vari skuggan av i lampan befintliga avskärmande föremål kan iakttagas. 1911—12 framställde fransmannen Dunoyer för första gången knippen av atomstrålar genom att avgränsa från upphettat natrium utsända atomer med två efter varandra placerade bländare. Dunoyer föreslog också användning av dylika atom- eller molekylstralar för direkt mätning av de för den kinetiska gasteorien grundläggande storheterna. Sådana mätningar utfördes första gången av O. Stern och M. Born 1919—20, varvid den termiska molekylarhastigheten och molekylernas fria väglängd direkt kunde bestämmas.

Vid denna tid hade Bohrs teori för atomernas byggnad nått en hög grad av fulländning. De enligt denna kring atomkärnan roterande elektronerna giva upphov till magnetiska fält; hela atomen måste i allmänhet utgöra en magnet med ett bestämt magnetiskt moment. Teorien fordrade, att det magnetiska momentet skulle vara en heltalig multipel av ett minsta elementarmoment, den Bohrska magnetonen. Om en atommagnet inbringades i ett yttre magnetiskt fält, fordrade kvantumteorien, såsom Sommerfeld och Debye påvisat, en s. k. riktningskvantling, d. v. s. atommagneten kunde endast intaga vissa diskreta lägen i förhållande till det yttre fältet, närmare preciserat, det magnetiska momentets vektor kunde endast bilda sådana vinklar med riktningen av det yttre fältet, för vilka vektorns projektion på fältriktningen utgjorde heltaliga multipler av magnetonen. I det enklaste fallet, en enkvantig atom, d. v. s. en atom med magnetiska momentet 1 magneton, äro endast två lägen möjliga. Det magnetiska momentet kan inställa sig parallellt eller antiparallellt med den yttre fältriktningen. Då å andra sidan enligt den klassiska teorien en atommagnet i ett yttre magnetfält under utförande av en precessionsrörelse kring fältriktningen borde kunna intaga alla möjliga lägen gentemot fältriktningen, förefanns här en möjlighet till direkt undersökning av huruvida den nya eller den gamla teorien var riktig. Stern föreslog att utföra en sådan prövning av teorierna med användning av atomstrålar, som fingo passera genom ett inhomogent magnetfält, i vilket fältgradientens och magnetfältets riktningar voro parallella, medan atomstrålarna voro riktade vinkelrätt mot fältriktningen. I ett inhomogent fält påverkas atommagneten av en avböjande kraft, som är proportionell mot inhomogeniteten (fältgradienten) och mot atommomentets projektion på fältriktningen. Ett plant atomstrålknippe borde därför enligt den klassiska teorien under magnetfältets inverkan utbredas till ett diffust band, medan man enligt kvantumteorien borde erhålla diskreta linjer. Försöket realiserades 1921 av Stern och Gerlach med användning av silveratomstrålar, varav ett smalt knippe avgränsades med två parallella spalter och efter passagen av det inhomogena magnetfältet fick falla på en platta, på vilken två ungefär lika intensiva linjer erhöllos. Genom försöket fick man således ett direkt stöd för kvantumteorien. Silveratomen är enkvantig, och uppdelningen av atomstrålen i två avspeglar alltså de båda inställningsmöjligheterna av atomen i magnetfältet. Genom uppmätning av uppdelningens storlek kunde Stern och Gerlach även direkt bestämma silveratomens magnetiska moment och funno ett värde, som nära anslöt sig till det teoretiskt beräknade värdet av den Bohrska magnetonen.

Denna metod för bestämning av atommoment har senare fullkomnats framför allt av Stern och hans medarbetare.

I fråga om tolkningen av atommagnetismens uppkomst har teorien senare undergått förändring. Studiet av spektrallinjernas finstruktur framtvingade hypotesen, att elektronen utför en rotation kring sin egen axel och således besitter ett mekaniskt vridningsmoment eller »spin»-moment, vilket först uttalades av Uhlenbeck och Goudsmit 1925. Mot denna egenrotation svarar ett magnetiskt moment av storleken $\frac{e}{mc} \cdot \frac{h}{4\pi} = 0{,}922 \cdot 10^{-20}$ örsted $\cdot$ cm^3 = 1 Bohrsk magneton (e och m = laddning, resp. massa av elektronen; c = ljushastigheten; h = Plancks konstant). I det Stern-Gerlachska försöket härrör elektronhöljets magnetiska moment uteslutande från ljuselektronens spin. Efter införande av elektronspinnet i teorien fann man snart, att flera finare drag i såväl linje- som bandspektra endast kunde förklaras genom att också tillskriva atomkärnan en egenrotation eller ett spin. Skulle kärnans rörelser kunna beskrivas genom ekvationer liknande dem, som gälla för elektronens rörelse, så borde kärnans magnetiska moment kunna beräknas av uttrycket

$$\frac{e}{Mc} \cdot \frac{h}{4\pi},$$

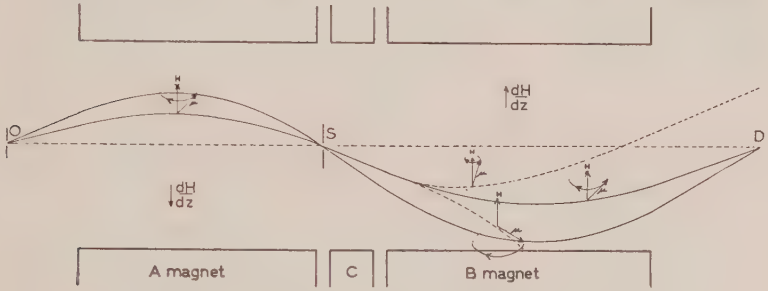
där M är kärnmassan. För en proton t. ex. skulle det magnetiska momentet utgöra 1/1838 av den Bohrska magnetonen, eftersom ju protonen är 1838 gånger tyngre än elektronen. Detta moment, som = $0{,}502 \cdot 10^{-23}$ örsted $\cdot$ cm^3, brukar kallas en kärnmagneton. Det var givetvis för kärnforskningen av stort intresse att få protonens magnetiska moment bestämt. Eftersom momentet var så litet, kunde det förväntas, att en sådan mätning skulle vara förbunden med stora experimentella svårigheter. Dessa lyckades emellertid Stern och hans medarbetare övervinna. För att eliminera elektronhöljets magnetiska moment valde Stern att undersöka vätemolekylen i grundtillståndet. I denna ha de båda elektronerna inga banvridimpulsmoment, medan spinmomenten äro antiparallella och sålunda upphäva varandras verkan. I vätemolekylen ger således elektronhöljet inget bidrag till molekylens moment. Detta härrör från kärnornas egna magnetiska moment, från kärnornas rotation kring den gemensamma tyngdpunkten och från denna rörelses återverkan på elektronhöljet. Den experimentalanordning, som Stern och hans medhjälpare använde, är i princip likartad med den i Stern-Gerlach-experimentet använda, ehuru den utomordentligt förfinats och fulländats. De från en ugn utgående molekylstrålarna avgränsas av spalter och få därpå passera genom det

starkt inhomogena fältet mellan polskorna av en magnet, av vilka den ena är spetsig, den andra plan med en djupt nedfräst skåra. För registrering av uppspaltningen och avböjningen av molekylstrålarna användes en manometer av Piranityp, som utgöres av en glödtråd, spänd längs axeln av ett metallrör. Strålningen fick infalla i manometern genom en smal spalt. Genom mikrometrisk förskjutning av manometern vinkelrätt mot strålriktningen kunde intensitetsfördelningen i strålen uppmätas. Enligt denna metod bestämde Stern och Estermann 1933 protonens magnetiska moment till 2,5 kärnmagnetoner, ett värde, som således är 2,5 gånger större än det, som man enligt teorien väntat sig. Påföljande år uppmätte samma forskare deuteronens magnetiska moment och funno värden mellan 0,5 och 1 kärnmagneton.

Den ovan skildrade metoden har endast kunnat användas vid väte och deuterium. Redan vid dessa är tydningen av resultaten svår och skulle förmodligen vid mera komplicerade molekyler möta oöverkomliga svårigheter. Önskar man därför bestämma kärnmoment vid högre atomer, måste andra metoder tillgripas. Sedan länge har man för detta ändamål studerat den finaste strukturen hos ämnenas spektrallinjer, den s. k. hyperfinstrukturen, som kan nås med spektralapparater av högsta upplösningsförmåga. Kunde man med atomstrålarnas hjälp skapa en ny forskningsmetod, som tillät en direkt uppmätning av kärnmomenten, vore detta att i hög grad välkomna, då man därigenom kunde pröva och fullständiga resultaten av hyperfinstrukturundersökningarna, kanske också uppnå större precision än som är möjligt vid dessa. Denna uppgift ställde sig I. I. Rabi och lyckades även bemästra de stora svårigheter, som därvid måste övervinnas. Vid det ovan beskrivna Stern-Gerlach-försöket erhölls en uppdelning av silveratomstrålen i två, beroende på de båda inställningsmöjligheterna av spinelektronen i magnetfältet. Om atomkärnan äger ett magnetiskt moment, har detta två eller flera olika möjligheter att inställa sig i fältet alltefter kärnans kvantumtillstånd. Detta måste medföra en uppspaltning av vardera atomstrålen i två eller flera. Då emellertid kärnmomenten äro av storleksordningen 1/2000 av elektronmomentet, kommer denna uppdelning av atomstrålarna att yttra sig som en ytterst trång finstruktur. För att kunna påvisa denna undersökte Rabi en del av den tudelade atomstrålen, som passerat genom en spalt och därpå analyserades i efter varandra anbragta inhomogena magnetfält. Senare har metoden ytterligare utvecklats och förbättrats i synnerhet genom införande av en hastighetsfokussering, varvid atomstrålen får passera genom ett inhomogent magnetfält, därpå genom ett annat dylikt av motsatt

riktning. På detta sätt kunde Rabi och Cohen 1934 bestämma kärnmomentet för natriumatomen. Enligt dessa och liknande metoder ha Rabi och hans medarbetare senare bestämt de magnetiska momenten för alla alkalimetallernas kärnor. I de fall, då hyperfinstrukturundersökningar föreligga, är överensstämmelsen med dessa god.

Atomstrålmetoden med hastighetsfokussering lyckades Rabi 1938 genom att införa ett genialt konstgrepp utveckla till en utomordentlig precisionsmetod för direkt bestämning av kärnmoment. Fig. visar principen schematiskt. Från atom- eller molekylstrålkällan O utgår ett strålknippe, som får passera det inhomogena magnetfältet A och avgränsas av en kollimatorspalt S, varefter



Schematisk bild av försöksanordningen vid Rabis resonansmetod.

knippet i det motsatt riktade, inhomogena magnetfältet B fokusseras till D, där strålningsintensiteten kan mätas med en detektor. Äro de geometriska förhållandena och magnetfälten lämpligt avpassade, fokusseras till D molekyler av olika hastighet och olika moment, såsom de heldragna linjerna i figurerna visa. Mellan magneterna A och B är placerad en tredje magnet C, som ger ett homogent magnetfält av så stor styrka H, att den magnetiska kopplingen mellan atomkärnan och elektronhöljet häves. Var och en av dessa kommer då att utföra en precessionsrörelse kring fältriktningen. Frekvensen i en dylik precessionsrörelse är enligt den klassiska teorien av Larmor bestämd av uttrycket

$$\nu = \frac{\mu H}{hJ}.$$

Tillämpad på atomkärnan betyder μ och J det magnetiska, resp. det mekaniska kärnmomentet. Inkopplingen av magneten C medför för övrigt ingen förändring av strålgången, eftersom ingen avbö-

jande kraft verkar på strålarna i ett homogent fält. Rabis snillrika idé bestod nu i att överlagra det homogena fältet med ett däremot vinkelrätt, svagt växelfält (ej utritat i fig.), som åstadkoms med en strömspole, inkopplad i en elektrisk svängningskrets. I allmänhet har detta växelfält ingen nämnvärd inverkan, men då växelfrekvensen just överensstämmer med Larmorfrekvensen i kärnans precessionsrörelse, inträder en skarp resonans, som gör det möjligt för kärnan att övergå i andra kvantumtillstånd. Då fokusseringsbetingelserna ej gälla för dessa, avböjas de motsvarande atomerna utan att nå detektorn, såsom antydes av de streckade kurvorna i fig. Vid resonans måste således ett intensitetsfall kunna iakttagas på detektorn. Hålles växelfrekvensen konstant, medan magnetfältet H varieras, får man för ett bestämt värde på $H = H_{\text{res}}$ ett skarpt intensitetsminimum, och kärnmomentet kan direkt bestämmas av uttrycket

$$\mu = \frac{Jh\nu}{H_{\text{res}}}.$$

ν, som ligger inom det vanliga radiofrekvensområdet, beräknas lätt av svängningskretsens element.

Rabi och hans medarbetare påvisade metodens utomordentliga användbarhet för undersökning av såväl atomer som molekyler. Noggrannheten i bestämningen av kärnmomenten överstiger betydligt den, som kan uppnås genom hyperfinstrukturmätningar. Tillämpad på HD- och D_2-molekylerna erhölls bl. a. magnetiska momentet för protonen $2{,}785 \pm 0{,}02$ och för deuteronen $0{,}855 \pm 0{,}006$ kärnmagnetoner, varav neutronens moment beräknas till $-1{,}90$ kärnmagnetoner, vilka värden f. n. torde få anses vara de tillförlitligaste. Med denna metod lyckades Rabi och hans medhjälpare 1940 även bestämma ett elektriskt kvadrupolmoment för deuteronen av storleken $2{,}73 \cdot 10^{-27}$ cm², det minsta av alla uppmätta moment. Kännedomen om dessa moment är av stor betydelse för teorien för kärnornas byggnad och för de mellan kärnpartiklarna verkande krafterna.

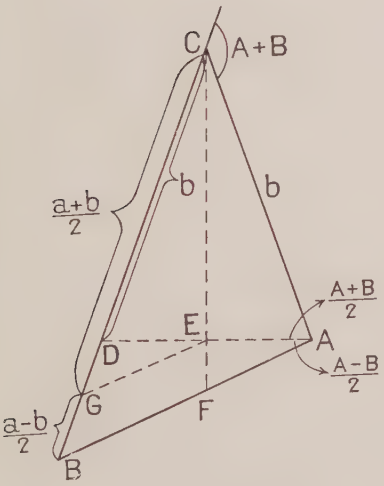
1943 års Nobelpris i fysik tilldelades professor Otto Stern »för hans bidrag till utvecklingen av molekylarstrålemetoden och upptäckten av protonens magnetiska moment». Otto Stern är född 1888 i Tyskland, blev 1912 Dr. Phil. i Breslau, var därpå docent 1913—14 vid tekniska högskolan i Zürich, 1914—21 vid universitetet i Frankfurt a. M. Han blev 1921 e. o. professor i fysikalisk kemi vid universitetet i Rostock och utnämndes 1923 till professor i samma ämne i Hamburg. Här ledde han under 10 år det fysikaliskt-kemiska

institutet och samlade under denna tid kring sig många forskare från in- och utlandet, bl. a. Rabi. Stern, som är av judisk börd, blev efter den nationalsocialistiska revolutionen avlägsnad från sitt ämbete och flyttade då till U. S. A., där han sedan 1933 varit professor och föreståndare för forskningsinstitutet för molekylfysik vid Carnegie Institute of Technology i Pittsburg, Pennsylvania.

Professor Isidor Isaac Rabi erhöll 1944 års Nobelpris i fysik »för den av honom angivna resonansmetoden för registrering av atomkärnans magnetiska egenskaper». Han är född 1898 i Polen men erhöll sin uppfostran och utbildning i U. S. A. Han studerade vid Columbia universitetet i New York och erhöll där 1927 filosofie doktorsgrad. 1928 arbetade han i Hamburg hos O. Stern och studerade där molekylstrålmetoden. Sedan Rabi återvänt till Columbiauniversitetet blev han 1930 »assistant professor», 1935 »associated professor» och 1937 ordinarie professor i fysik därstädes.

Nils Ryde.

Ett bevis för tangentteoremet.



Avsätt $CD = CA = b$. Man har då $\angle CAD = C$:s halva yttervinkel $= \frac{A+B}{2}$, varav $\angle BAD = \frac{A-B}{2}$.

Drag bissektrisen CET och $EG \parallel AB$; E är då mittpunkten på AD och G mittpunkten på BD, varav $GB = \frac{a-b}{2}$ och $CG = \frac{a+b}{2}$.

Transversalsatsen ger

$$\frac{CG}{GB} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{CE}{EF} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Nils Löfman.

Konvergenta följder av vissa medelvärden.

Av **V. STENSTRÖM.**

Om a, b äro tvenne positiva tal och man av dessa bildar $a_1 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ och $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$, av a_1, b_1 talen $a_2 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{b_1}}$ och $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ o. s. v., så är det ju bekant, att man sålunda erhåller tvenne talföljder $a, a_1, a_2, \ldots$ och $b, b_1, b_2, \ldots$, vilka konvergera mot samma gränsvärde $\sqrt{ab}$.

Som jag icke sett nedanstående generalisering av denna sats framställd, kunde det kanske vara av något intresse att här visa den. Om $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ äro positiva tal, gälla de kända olikheterna

$$a_1 \leqq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqq a_n.$$

Dessa kunna bevisas på följande bekanta sätt. Vi sätta $a_\nu = G \cdot e^{\alpha_\nu}$, där $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Därav följer $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 0$. Enligt olikheten $e^x \geqq 1+x$ ha vi således

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \frac{G}{n}(n+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) = G$$

och

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}} \leqq \frac{Gn}{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n} = G.$$

Sättes nu $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}} = a_1^{(1)}$ och $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a_n^{(1)}$

och infogas mellan $a_1^{(1)}$ och $a_n^{(1)}$ sådana tal $a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots a_{n-1}^{(1)}$, att $a_1 a_2 \ldots a_n = a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)}$, kan man, utgående från $a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)}$, upprepa förfarandet och bilda talen $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}$ etc. Vi erhålla

sålunda tvenne konvergenta följder $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots a_1^{(k)}, \ldots$ och $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots$, enär enligt (1) den förra är monotont växande och begränsad uppåt och den senare monotont avtagande och begränsad nedåt.

Vi skola nu först visa, att dessa följder gå mot ett och samma gränsvärde och att detta gränsvärde är lika med $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Enär

$$a_n^{(1)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

blir

$$a_n - a_n^{(1)} = \frac{(n-1)a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}}{n} \geq \frac{a_n - a_1}{n}.$$

Vidare är

$$0 \leq a_n^{(1)} - a_1^{(1)} \leq a_n^{(1)} - a_1 = a_n - a_1 - (a_n - a_n^{(1)}) \leq (a_n - a_1) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Härav följer

$$a_n^{(k)} - a_1^{(k)} \leq (a_n - a_1) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

Samtliga tal $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots a_n^{(k)}$ gå alltså mot samma gränsvärde g, när k går mot oändligheten.

Av $a_1 a_2 \ldots a_n = a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)} = \ldots = a_1^{(k)} a_2^{(k)} \ldots a_n^{(k)} \to g^n$ (när $k \to \infty$) följer sedan $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

För att få en bestämd bildningslag för $a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots a_{n-1}^{(1)}$ kan man naturligen införa de symmetriska grundfunktionerna $s_1 = \Sigma a_\nu$, $s_2 = \sum_{\mu<\nu} a_\mu a_\nu$, $s_3 = \sum_{\lambda<\mu<\nu} a_\lambda a_\mu a_\nu$, $\ldots$, $s_n = \Pi a_\nu$. Man har nämligen redan

$$a_1^{(1)} = \frac{n s_n}{s_{n-1}} \text{ och } a_n^{(1)} = \frac{s_1}{n} \text{ och väljer vidare}$$

$$a_2^1 = \frac{(n-1)s_{n-1}}{2 \cdot s_{n-2}}, \; a_3^{(1)} = \frac{(n-2)s_{n-2}}{3 \cdot s_{n-3}}, \ldots,$$

$$a_m^{(1)} = \frac{(n-m+1)s_{n-m+1}}{m \cdot s_{n-m}}, \ldots, \; a_{n-1}^{(1)} = \frac{2s_2}{(n-1)s_1}.$$

Tydligen är $a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)} = a_1 a_2 \ldots a_n$, och vidare gälla (för positiva a_i) olikheterna

$$\frac{n s_n}{s_{n-1}} \leq \frac{(n-1)s_{n-1}}{2 \cdot s_{n-2}} \leq \frac{(n-2)s_{n-2}}{3 \cdot s_{n-3}} \leq \ldots \leq \frac{s_1}{n}.$$

För att bevisa dessa olikheter utgå vi från ekvationen

$$x^n - s_1 x^{n-1} y + s_2 x^{n-2} y^2 - \ldots \pm s_m x^{n-m} y^m \mp$$
$$\mp s_{m+1} \cdot x^{n-m-1} y^{m+1} \pm \ldots \pm s_n \cdot y^n =$$

som har n positiva rötter $\left(\frac{x}{y} = a_i \text{ eller } \frac{y}{x} = \frac{1}{a_i}\right)$. Deriveras vänstra ledet m gånger partiellt med avseende på y, erhålles ekvationen

$$s_m x^{n-m} - s_{m+1}(m+1) x^{n-m-1} y +$$
$$+ s_{m+2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2} x^{n-m-2} y^2 + \ldots = 0,$$

vilken har $(n-m)$ positiva rötter. Deriveras därpå denna ekvations vänstra led $(n-m-2)$ gånger partiellt med avseende på x, erhålles ekvationen

$$s_m (n-m)(n-m-1) x^2 - 2 s_{m+1}(m+1)(n-m-1) xy +$$
$$+ s_{m+2}(m+1)(m+2) y^2 = 0,$$

som har två positiva rötter. Dess diskriminant måste alltså vara positiv eller noll, d. v. s.

$$\frac{(m+2) s_{m+2}}{(n-m-1) s_{m+1}} \leqq \frac{(m+1) s_{m+1}}{(n-m) s_m}.$$

På samma sätt bildas talen $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots a_n^{(k)}$ ur talen $a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \ldots a_n^{(k-1)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

Samtliga tal $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots a_n^{(1)}$ kunna betraktas som medelvärden av $a_1 a_2 \ldots a_n$, om dessa tilläggas vissa vikter. $a_n^{(1)}$ är ju det vanliga aritmetiska mediet.

$$a_{n\ 1}^{(1)} = \frac{2 s_2}{(n-1) s_1} =$$
$$= \frac{a_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + a_2(a_1 + a_3 + \ldots + a_n) + \ldots + a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}{(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (a_1 + a_3 + \ldots + a_n) + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}$$

. . . . . .

$$a_1^{(1)} = \frac{n s_n}{s_{n-1}} = \frac{a_1(a_2 a_3 \ldots a_n) + a_2(a_1 a_3 \ldots a_n) + \ldots + a_n(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})}{a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_2 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}.$$

(harmoniska mediet)

Ett bevis för satsen om de aritmetiska och geometriska medelvärdena.

Av B. AURELL.[1]

Vi vilja bevisa olikheten

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1}$$

där a_i äro godtyckliga positiva tal.

Lemma. Om k_1, k_2 och a äro minst lika med ett, gäller

$$ak_1+\frac{1}{ak_2} \geqq k_1+\frac{1}{k_2}. \tag{2}$$

Skillnaden mellan vänstra och högra membrum kan nämligen skrivas $(a-1)\left(k_1-\frac{1}{ak_2}\right)$ och är alltså lika med noll, om $a=1$, annars positiv.

Då (1) är homogen, sätta vi $a_i = gb_i$, där $g=\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Man får då $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, och (1) övergår till

$$b_1+b_2+\ldots+b_n \geqq n. \tag{3}$$

De b_i, som äro $\geqq 1$, betecknas $b_1 \ldots b_p$, och de, som äro <1, betecknas $\frac{1}{c_1} \ldots \frac{1}{c_q}$. Vänstra membrum i (3) övergår då till

$$b_1+\ldots+b_p+\frac{1}{c_1}+\ldots+\frac{1}{c_q}. \tag{4}$$

Sätt $b_1 b_2 \ldots b_i = P_i$ och $c_1 c_2 \ldots c_j = Q_j$. Med $P_0 = Q_0 = 1$ är då $P_0 \leqq P_1 \leqq \ldots \leqq P_p$ och $Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_q$, där $P_p = Q_q$.

Dessa båda monotona sviter sammanslås till en enda: $R_0 \leqq R_1 \leqq \ldots \leqq R_r$, där $R_0 = P_0 = Q_0$ och $R_r = P_p = Q_q$. Sätt $R_k = d_k \cdot R_{k-1}$, varvid således d_k blir $\geqq 1$. Något d_k måste bli >1, om inte alla $b_i = 1$.

[1] I Elementas årg. *19* (1936), s. 25 finns ett induktionsbevis för samma sats av S. WIGERT. Man torde även observera två uppsatser »Om isoperimetriska produkters maxima» i årg. *10* (1926—27), s. 1 av K. L. HAGSTRÖM och i årg. *18* (1935), s. 233 av B. ÅKERBERG.

Nu är $b_i = \frac{P_i}{P_{i-1}}$. Men P_i och P_{i-1} återfinnas såsom resp. R_k och R_j med $k > j$. Alltså är $b_i = \frac{R_k}{R_j} = d_{j+1} d_{j+2} \dots d_k$. Analogt beträffande c_i. Varje d_k ingår i ett b_i och i ett c_j.

Tillämpas lemmat på uttrycket (4), varvid successivt de termer kombineras som innehålla samma d_k ($k = 1, 2, \dots$), erhålles slutligen

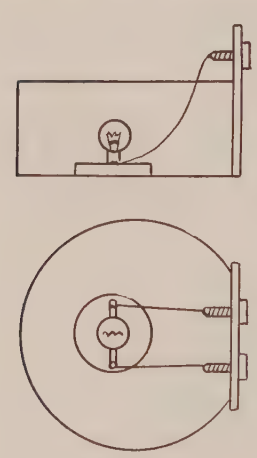
$$b_1 + \dots + b_p + \frac{1}{c_1} + \dots + \frac{1}{c_q} \geqq 1 + 1 + \dots + 1 = n,$$

där likhet gäller endast om samtliga $d_k = 1$, dvs om alla $b_i = 1$ (alla a_i lika).

Ljusets brytning i en vätska.

Ett skolförsök.

Vid behandlingen av ljusbrytningen börja en del böcker som sig bör med det gamla försöket med slantarna på bottnen av en skål, som döljas av skålkanten men bli synliga, då vatten slås i skålen. Sedan många år har förf. använt en annan anordning, som synes bättre inför klassen och fäster sig bättre i minnet.



Av 0,5 mm mässingsplåt (eller zinkplåt) göres en skål (diameter 10 cm; djup 5 cm) med pålödd botten. På skålens plana sida fästes en platta av bakelit, fiber, eternit e. d. med genomgående skruvar av mässing, lödda på insidan för att kärlet ej skall läcka. På skålens botten fästes på liknande sätt ett litet stativ för ficklampor, vars kontakter anslutas till två kontakthylsor eller klämskruvar i bakelitplattan. Lampans placering i skålen får avvägas efter bänkradernas lutning i lektionssalen. Hela skålen målas lämpligen mattsvart. Lämplig lampa: en 6-volt klotformig cykellampa. Då vatten slås i, »flyter den upp», som en del elever säga, och synes samtidigt kraftigt tillplattad.

B. Wahlström.

Katodstråleoscillografens användning.

Av BIRGER GRUNDSTRÖM.

I ett föregående meddelande[1] angående katodstråleoscillografens användning vid gymnasieundervisningen angavs bl. a. en koppling för demonstration av fasförskjutningen mellan ström och spänning i en kondensator (I: 4). Två variabla motstånd R och R_1 samt en kondensator C kopplades härvid i serie. Spänningarna till oscillografen togos ut dels över R samt dels över R_1 och C (I: fig. 4). Om R_1 helt urkopplas, uppstår en fasskillnad på 90° mellan spänningarna V_R och V_C. Detta kan man sedan visa med hjälp av Lissajoufigurer eller dubbla sinuskurvor, vilket närmare beskrivits i I: 4 *a* resp. *b*.

Om man väljer den senare metoden, visar det sig, att man visserligen erhåller två kurvor på oscillografskärmen med 90° fasskillnad, men det är V_C-kurvan, som ligger 90° för V_R-kurvan! I jämförelse med vad man i första hand hade väntat sig innebär detta resultat en förskjutning på 180° av fasskillnaden mellan de båda kurvorna. Lissajoufigurerna uppvisa liknande effekter. Undersöka vi vidare på samma sätt spänningarna över två seriekopplade och induktionsfria motstånd, uppvisa de motsvarande oscillografkurvorna 180° fasskillnad.

Orsaken härtill är lätt att inse. Vi välja som exempel två seriekopplade, induktionsfria motstånd *AB* och *BC*. Vi ansluta den gemensamma punkten *B* exempelvis till den undre vertikalavböjningsplattan, medan *A* och *C* via elektronkopplaren växelvis förbindes med den övre. Kippfrekvensen anslutes till horisontalavböjningsplattorna. Antag nu, att potentialen vid ett visst tillfälle växer i riktningen *A*—*B*—*C*. Potentialen i den övre oscillografplattan blir då större eller mindre än potentialen i den undre, beroende på om elektronkopplaren sätter den övre plattan i förbindelse med *C* resp. *A*. Kurvorna på skärmen måste då uppvisa en fasskillnad på 180°.

[1] E. Bergquist och B. Grundström, Några exempel på katodstråleoscillografens användning, Elementa *27* (1944), s. 205. Denna artikel betecknas i föreliggande meddelande med I.

En metod att undgå dessa svårigheter vore att koppla A till den undre oscillografplattan samt B och C via elektronkopplaren till den övre, men då jämför man ej längre direkt spänningarna över AB och BC var för sig, vilket är mindre lämpligt.

Oscillograferna byggas ofta så, att den ena plattan för den horisontella avböjningen, t. ex. den vänstra, och den ena plattan för den vertikala avböjningen, t. ex. den undre, stå i förbindelse med samma uttag på oscillografen, vilket uttag vi här kalla P_1P_2 (jfr I: fig. 4).[1] Vid upptagande av Lissajoufigurer måste då, ifall vi vilja jämföra spänningarna över motstånden AB och BC var för sig, den gemensamma punkten B föras till P_1P_2, medan A föres till P_1 och C till P_2. Härigenom uppstår ånyo en icke önskvärd fasförskjutning av 180°.

Ovannämnda svårigheter kunna undvikas om motstånd, kondensatorer och spolar parallellkopplas enl. fig. 1 a. Då en växelström I passerar ett induktionsfritt motstånd R och i serie därmed en kondensator C, erhålles ett vektordiagram enl. fig. 2 a för spänningarna V_R, V_C och den pålagda spänningen V. Om vi i fig. 1 a väljer $R_1 = R_2$ och $C_1 = C_2$, bli fasskillnaderna (I_1V) och (I_2V) lika, dvs. I_1 och I_2 är i fas. För båda grenarna i fig. 1 a och b kunna vi då använda diagram 2 a.

Om vi ansluta A i fig. 1 a till den undre oscillografplattan samt D och E via elektronkopplaren till den övre, erhållas två kurvor, som ligga i fas.

Låta vi C_2 och R_2 byta plats, fig. 1 b, och ansluta A, D och E till oscillografen på samma sätt, visar sig V_{R_1} vara 90° före V_{C_2}. Men V_{R_1} är i fas med I_2. Alltså visar försöket, att strömmen genom en kondensator är 90° före spänningen. Ersättes C_2 i fig. 1 b med en självinduktion, kan man på samma sätt visa, att spänningen över denna är 90° före strömmen.

En jämförelse mellan spänningen V' över DE i fig. 1 b och den pålagda spänningen V är också av intresse. Ur fig. 2 a framgår, att fasskillnaden mellan V och V' kan varieras mellan 0° och 180° genom variation av de lika motstånden R från 0 till belopp, som äro flera gånger större än $\frac{1}{C\omega}$. Då $R = \frac{1}{C\omega}$ blir fasskillnaden 90°. Däremot äro amplituderna hos pålagd och uttagen spänning, V resp. V', ständigt lika. Apparaten kan således tjänstgöra som variabel fasförskjutare med konstant spänning.

[1] Hos vissa oscillograftyper kunna de fyra avböjningsplattorna sättas i förbindelse med separata uttag, varigenom avböjningsriktningarna hos de båda plattparen bli oberoende av varandra.

I kopplingen fig. 1 c jämföras spänningarna V_C och V_L. Det motsvarande vektordiagrammet återfinnes i fig. 2 b eller c. I fig. 2 b är antaget att $R_1 \gg \frac{1}{C\omega}$ och $R_2 \gg L\omega$, och i detta fall är V_L nästan 180° före V_C. I fig. 2 c äger det motsatta förhållandet rum, och här närmar sig fasskillnaden mellan V_L och V_C värdet 0. Genom att variera motstånden R kan man således få oscillografkurvorna att glida i förhållande till varandra från 0° till 180°.

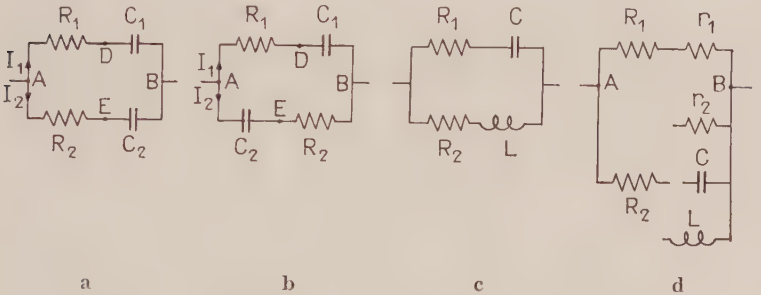


Fig. 1. Anordning för påvisande av fasförskjutning.

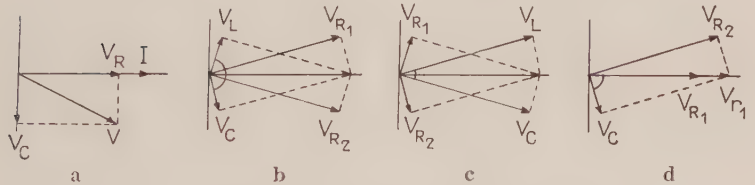


Fig. 2. Vektordiagram till kopplingarna i fig. 1.

I fig. 1 d visas slutligen en annan anordning[1] för demonstration av fasförskjutningar. R_1 och R_2 äro två motstånd, som vardera äro stora i förhållande till motstånden r_1 och r_2 samt $\frac{1}{C\omega}$ och $L\omega$; R_2 kan anslutas till r_2, C eller L. Spänningen pålägges över AB. Man jämför spänningen över r_1 med spänningarna över r_2, C eller L. I fig. 2 d visas vektordiagrammet för det fall att R_2 anslutes till C. Genom att $V_{R_2} \gg V_C$ blir fasskillnaden mellan V_{r_1} och V_C nästan 90°.

[1] Under tillverkning vid Philips Svenska AB.

Försöken kunna varieras på många sätt, men man bör observera, att amplituder och faser hos spänningarna över de enskilda elementen i regel ej äro oberoende av varandra. Genom lämplig dimensionering av motstånd, kondensatorer och spolar kan man erhålla alla önskvärda amplituder och fasskillnader. För 50-periodig växelström kunna exempelvis följande värden användas: variabla motstånd 0—10 000 ohm, kondensatorer 2—4 μF, och som självinduktion Phywetransformatorns spolar på 1 200 varv med järnkärna.

Den rätta dimensioneringen är även av betydelse vid försöket I: 6 angående hysteresiskurvan. Spänningsintegreringen på transformatorns sekundärsida förutsätter, att det med sekundärsidan parallellkopplade motståndet är flera gånger större än kondensatorns motståndsvärde. Man erhåller då en hysteresiskurva av riktig form och lutning, ehuru kurvan icke står i kvantitativ överensstämmelse med järnkärnans magnetiska egenskaper.

Till slut vill jag begagna tillfället att rätta ett fel i fig. I: 10 a. Svängningskretsen *PC* skall anslutas till katoden, vilket enklast sker genom att kortsluta ändpunkterna av de delar av *P* och *S*, som befinna sig längst ned på figuren. Meddelandet I borde även ha kompletterats med följande literaturanvisningar: R. Schnell-Larsen, Katodestrålerøret og dets anvendelse och Om bruken av katodestråleoscillografen i undervisning och måleteknikk, Fra fysikkens verden *1* (1939), h. 3, s. 49 resp. h. 4, s. 37; K. A. Wingårdh och L. Parke, Katodstråloscillografen, Fysisk Tidsskrift *37* (1939), s. 137; K. A. Wingårdh och Gunnel Wingårdh, Demonstration av dämpade och odämpade svängningar och verifiering av Thomsons formel med tillhjälp av katodstråloscillograf, Fra fysikkens verden *6* (1944), s. 87.

Nyare undersökningar av uranatomens klyvning.

Referat av **G. STARCK.**

1937 sammanfattade L. Meitner, O. Hahn och F. Strassmann resultaten av sina undersökningar över de kärnreaktioner, som äga rum vid bestrålningen av uran med neutroner, och som först antogos leda till bildning av ett antal grundämnen bortom uran, transuraner, i följande schema:

1) $U(n, -)_{92}U$ [1] $\xrightarrow[10s]{\beta}$ $_{93}$Eka-Re $\xrightarrow[2{,}2\,m]{\beta}$ $_{94}$Eka-Os $\xrightarrow[59m]{\beta}$ $_{95}$Eka-Ir $\xrightarrow[66h]{\beta}$ $_{96}$Eka-Pt $\xrightarrow[2{,}5h]{\beta}$ $_{97}$Eka-Au (?)

2) $U(n, -)_{92}U \xrightarrow[40s]{\beta}$ Eka-Re $\xrightarrow[16m]{\beta}$ Eka-Os $\xrightarrow[5{,}7\,h]{\beta}$ Eka-Ir.

3) $U(n, -)_{92}U \xrightarrow[23m]{\beta}$ Eka-Re (?).

Snart nog, redan följande år, visade det sig emellertid tack vare undersökningar av Hahn och Strassmann, att denna tolkning var oriktig och att neutronomvandlingarna av uran i själva verket försiggå på ett helt annat och inom kärnfysiken hittills okänt sätt. I stället för en bildning av transuraner med urans massa äger det rum en klyvning (engelska fission) av urankärnan i två medeltunga kärnor, radioaktiva isotoper av barium och lantan, som först efter en serie betatransformationer övergå till inaktiva element. En redogörelse för denna upptäckt och för framstegen på detta område t. o. m. 1940 har givits av fil. lic. Sigvard Eklund i Kosmos, Bd 19, sid. 39, 1941, vartill hänvisas. I det följande skall lämnas en översikt över den senare utvecklingen på detta område, som tilldragit sig stor uppmärksamhet och inspirerat ett mycket stort antal undersökningar.

Urankärnans klyvning.

Av de forskare som ägnat sig åt utredningen av dessa förhållanden böra i främsta rummet nämnas O. Hahn och hans medarbetare.

[1]) Detta beteckningssätt anger, att uran, obestämt vilken isotop det gäller, vid bestrålning med neutroner ger en (annan) uranisotop, utan att härvid någon strålning bildas.

Dem tillkommer också förtjänsten av en första sammanställning av uranklyvningens resultat, publicerad i Abh. Preuss. Akad. d. Wiss., Naturw. Klasse, 1942, nr 3, och författad av Hahn, Strassmann och Götte. Avhandlingens titel är »Einiges über die Entwirrung der bei der Spaltung des Urans auftretenden Elemente und Atomarten», och den ger i överensstämmelse därmed dels en fullständig översikt över urans alla klyvningsprodukter och deras följdelement, dels en detaljerad redogörelse för de av Hahn och hans medarbetare tillämpade metoderna. Titeln säger också ganska tydligt, att de förhållanden, som råda inom detta område, äro ej så litet komplicerade.

I nedanstående tabell återges nämnda översikt med de modifikationer, som blivit följden av senare, av Hahn och Strassmann utförda nybestämningar och kontrollbestämningar (1).

Klyvningsprodukter av uranisotoperna 235 och 238.

$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}.$

(Siffrorna ange elementens halveringstider i s = sekunder, m = minuter, h = timmar, d = dagar, a = år.)

Masstal	34 Se	35 Br	36 Kr	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 —
> 82		50 s →								
> 82		3,0 m →								
> 82		30 m →								
83	≈ 30 m →	140 m →	113 m stab. ↓							
88			175 m →	17,8 m →	stab.					
89			2,5 m →	15,4 m →	55 d →	stab.				
90					> 2 a →	60 h →	stab.			
91			? →	80 s →	2,6 h →	3,5 h →	stab.			
> 91			? →	? →	8,5 h ↗ 57 h / ↘ 50 m →		?			
> 91			? →	? →	7 m →	9 h →	?			
> 91					~ 2 m →	20 m →	?			
93							65 d →			
95							17,0 h →	75 m →	stab.	
?							26 d →	?		
99									67 h →	6,6 h långl. ↓
101									14,6 m →	14,0 m → st
>101									12 m →	m. kort →

$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n$.

Masstal	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn
> 105	4 h →	34 h →	?				
111			26 m →	7,5 d →	stab.		
112			17 h →	3,2 h →	stab.		
(113)					50 m ↓ stab.		
115					56 h →	272 m ↓ stab.	
117					170 m →	117 m →	stab.

$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n$.

Masstal	51 Sb	52 Te	53 J	54 X	55 Cs	56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr
127	80 h →	90 d ↓ 9,3 h →	stab.						
129	4,2 h →	32 d ↓ 72 m →							
131		1,2 d ↓ 2,5 m →	8 d →	stab.					
> 131	5 m →	77 h →	2,4 h →	?					
133	(10 m →)	60 m →	18,5 h →	4,3 d					
> 131		43 m →	54 m →	?					
135		15 m →	6,6 h →	9,5 h ↓ 10 m →					
> 131			30 m →	?					
> 131			1,8 m →	?					
> 136				17 m →	32 m →	?			
139				45 s →	7 m →	86 m →	stab.		
(140)				m. kort →	40 s →	300 h →	44 h →	stab.	
(141, 143)			-	? →	? →	6 m →	70 m →	15 d →	?
142				? →	? →	18 m →	3,5 h →	300 d →	?
> 140							≈15 m →	?	

Urans hittills påvisade klyvningsprodukter representera sålunda ej mindre än 26 grundämnen, nämligen samtliga fr. o. m. Se t. o. m. Pr. Räknar man isotoperna, finner man hela antalet vara över 100. För 99 av dem har halveringstiden kunnat anges eller har man funnit, att elementet är stabilt. Problemet har varit att påvisa

absolut ovägbara substansmängder, men metodiken är känd från läran om radioaktiva indikatorer och går ut på att man till en blandning av det radioaktiva ämnet och vissa andra, i makroskopiska mängder förekommande element sätter ett reagens, som avskiljer något av dessa. Utgör det radioaktiva ämnet en isotop till detta grundämne eller liknar det i analytiskt hänseende, avskiljes det samtidigt och kan påvisas genom sin strålning. För att påvisa strålningen kan man begagna den joniserande verkan av de β- eller γ-strålar, som de radioaktiva atomerna utsända. Hahn använde Geiger-Müllers räknekammare på grund av strålningens ringa intensitet, och räknade de av den strålande substansen pr tidsenhet utsända strålningsenheterna eller en viss oföränderlig del därav.

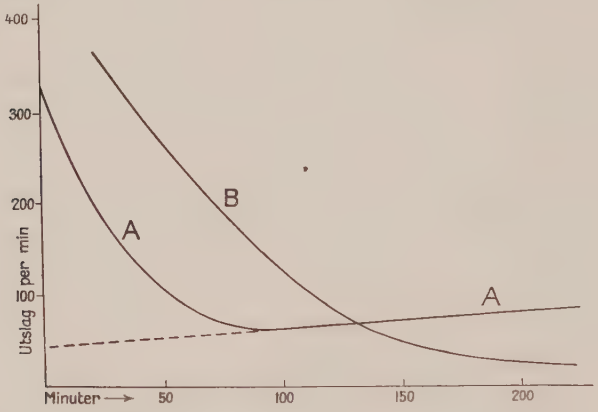


Fig. 1. A är aktivitet-tidskurvan för uran, befriat från UX och bestrålat med neutroner. Superposition av aktivitet från naturligt bildat UX och genom neutronstrålning bildade aktiva atomslag. B är motsvarande kurva för med H_2S utfällda aktiva atomslag. Störningen genom UX eliminerad.

Ur den erhållna aktivitetskurvan kan man sluta sig till om substansen är enhetlig eller komplex, beräkna halveringstiden o. s. v.

En blick på tabellerna här ovan visar hur utomordentligt komplicerade förhållandena äro och ger en föreställning om med vilken ytterlig subtilitet och skärpa föreningen av kemisk och strålningsanalys måste arbeta för att bringa klarhet i förhållanden, som måste te sig kaotiska. Nedanstående, starkt förenklade exempel, skall ge en föreställning om arbetssättet.

Kurvan *A* i fig. 1 ger aktivitetsförloppet hos ett från de naturliga omvandlingsprodukterna (UX o. s. v.) befriat uranpreparat,

som bestrålats med neutroner (Ra + Be) under kort tid. Den rätlinjiga delen beror på bildning av UX, sänkningen i början anger aktivitetsförloppet hos de genom neutronbestrålningen bildade aktiva atomslagen, vilkas kemiska natur tillsvidare är obekant. Genom att med H_2S fälla ett med H_2S fällbart element såsom bärare skiljer man en grupp av de aktiva atomslagen från uran och befriar sig därigenom från den störande efterbildningen av UX. Aktivitetskurvan får nu förloppet *B*.

Närmaste uppgiften är nu att pröva, om kurvan *B* härrör från en enhetlig substans eller från en blandning av flera substanser. Man övergår till en logaritmisk framställning av intensiteten. Då aktiviteten är en exponentialfunktion av tiden, bör aktiviteten av

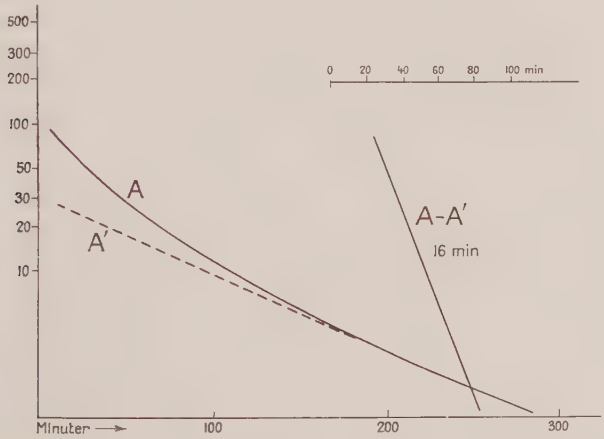


Fig. 2. AA′ är kurvan B från fig. 1 i logaritmisk framställning; dess krökning visar, att H_2S-fällningen innehåller två atomslag.

en enhetlig substans i logaritmisk skala vara en rätlinjig funktion av tiden (se fig. 2). Det visar sig nu, att kurvan *B* från fig. 1 i denna framställning inte blir en rät linje utan en svagt krökt kurva, *A*, som långsamt övergår i en rät linje. Om man nu extrapolerar den räta linjen bakåt (*A′*), så kommer differensen *A*—*A′* att bilda en rät linje. Fällningen innehåller alltså 2 olika atomslag, vilkas halveringstider kunna beräknas till 60 och 16 m.

Emellertid kan man visa, att H_2S-fällningen innehåller ännu flera atomslag. Vid kortvarig bestrålning erhåller man utom 16m-ämnet även ett 2m-ämne. Bestrålar man flera timmar eller dagar, iakttar man en 60m-, en ≈ 3d- och en ≈ 60d-substans. Det återstår nu blott att kemiskt identifiera det med H_2S fällbara elementet, en

relativt enkel uppgift. I allmänhet är den föreliggande uppgiften ofantligt mycket mera svårlöst än i ovanstående, starkt förenklade exempel.

I en senare uppsats (8) kunde Hahn och Strassmann fastställa bildningen av ytterligare ett stort antal produkter av uranspjälkningen. 4 japanska forskare, Y. Nishina, K. Kimura, T. Yasaki och M. Ihawa (11) erhöllo vid bestrålning av uran med snabba neutroner två aktiva atomslag med 70m resp. 60h halv.-konst., den senare med säkerhet, den förra sannolikt tenn. H. och S. bekräfta dessa resultat, men erhålla därjämte ytterligare två säkra Sn-isotoper och en sannolik femte Sn-isotop. De av H. och S. funna halv.-tiderna voro 20m, 70m, 4—5h, 80h och 11d, allt ungefärliga värden. Alla dessa isotoper erhöllos såväl med Li-D-, Be-D- som D-D-neutroner, d. v. s. med neutroner, erhållna vid bestrålning av Li, Be eller D med deutoner.

I samma arbete meddelas vidare upptäckten av nya isotoper av zirkon, niob, molybden, tellur, lantan, cer och praseodym. En viss osäkerhet kvarstår dock ifråga om deras halveringstider och möjliga komplexitet.

Maximalenergier av urans klyvningsprodukter.

Masstal	Element	Halvtid	Halvvärdestjocklek g/cm²	Räckvidd g/cm²	Max. energi MeV	γ-strålning
84	Br	30 m	0,28	—	4,5	
85	Kr	4,6 h	0,036	—	0,85	
87	Kr	75 m	0,26	—	4	
89	Sr	54 d	0,09	0,67	1,5	
91	Y	3,5 h	0,23	0,185	3,6	svag
(92)	Y	57 d	0,099	0,74	1,6	»
111	Ag	7,5 d	0,034	0,285	0,8	
131	Te	77 h	0,006	—	0,3	
131	J	2,4 h	0,078	0,58	1,35	stark
133	X	5 d	—	0,086	0,2—0,3	»
135	X	9,4 h	0,046	0,37	0,95	svag
135	X	10 m	0,026	—	0,7	stark
(137)	X	3,8 m	0,26	—	4	
139	Ba	86 m	0,15	1,08	2,3	
140	Ba	300 h	0,06	—	1,2	
140	La	44 h	0,08	0,65	1,4	stark
?	Ce	310 d	0,21	—	3,1	»

H. J. Born och W. Seelmann-Eggebert (9) framhålla, att de vid urans klyvning erhållna isotoperna redan äro så många, att det är önskvärt att karakterisera dem ej blott genom halveringstiderna, som visserligen äro de viktigaste kännetecknen, utan även genom andra stralningsegenskaper, såsom räckvidd, halvvärdestjocklek och maximalenergi. Räckvidden anges som den viktsmängd aluminium pr cm^2 som stralningen förmar genomtränga och bestämmes för starka stralare, halvvärdestjockleken anges som den viktsmängd aluminium pr cm^2, som nedsätter den infallande intensiteten, mätt med en s. k. 100 Al-räknekammare, till hälften. Den bestämmes för svaga strålare.

Med hjälp av kända strålningskällor konstruerades först två jämförelsekurvor, den ena med den maximala räckvidden som funktion av maximalenergien, den andra med halvvärdestjockleken som funktion av maximalenergien. På dessa kurvor kunde man uttaga den energi i MeV, som svarar mot en viss uppmätt antingen maximal räckvidd eller halvvärdestjocklek. B. och S.-E. erhålla vidstående tabell som resultat av sina undersökningar.

Den spontana klyvningen av uran.

Bohr och Wheeler ha framhållit 1939, att det finnes en möjlighet för en spontan klyvning av uran med en halveringstid av 10^{22} år, varvid de räknade med en klyvning av isotopen 238 och för övrigt tillämpade formeln för en partikels genomträngande av potentialbarriären. Två ryska forskare, G. N. Flerov och K. A. Petrzhak, (2), ha angripit uppgiften att påvisa denna klyvning experimentellt. De ha konstruerat en hyperkänslig jonisationskammare med plattor överdragna med uranoxid och förenad med en förstärkare, så avstämd, att de α-partiklar, som bildas av uran vid dess »reguljära» sönderfall, ej registreras, medan impulser från andra spjälkningsfragment, vilka impulser äro något större än impulser, som bero på α-partiklarna, räknas av ett mekaniskt relä. Apparaten prövades genom att användas vid iakttagelser av fission på grund av neutronbeskjutning. Känsligheten var 30—40 gånger större än de vanliga anordningarnas.

Vid frånvaro av neutronkälla observerades spontana impulser. Antalet var ej särdeles stort, högst 25 à 30 st. i timmen, och det är tydligt, att de ej kunnat iakttagas i räknekammare av vanlig typ.

Författarna diskutera andra förklaringsmöjligheter, men förkasta dem alla, t. ex. följande.

En superposition av impulser från enstaka α-partiklar skulle kunna ge impulser av tillräcklig intensitet. Förklaringen avvisas, sedan författarna konstaterat, att en ökning av α-impulserna genom

tillsats av en främmande α-strålare inte ökar de iakttagna impulsernas antal.

Man kunde tänka sig, att vibrationer utifrån skulle kunna registreras av förstärkaren, men detta motsäges därav, att ett avlägsnande av uranpreparatet medför impulsernas försvinnande.

De kosmiska neutronerna skulle kunna göras ansvariga för den iakttagna effekten, men härtill skulle erfordras en ström av 5 neutroner pr sekund genom varje cm² av plattorna, ett antal, som överstiger antalet av såväl kosmiska som jordiska neutroner i atmosfären.

Den spontana klyvningen tillskrives av Flerov och Petrzhak någon av isotoperna

^{238}U, beräknad halveringstid 10^{16}—10^{17}a,
^{235}U, » » 10^{14}—10^{15}a,
^{234}U, » » 10^{12}—10^{13}a.

Sannolikast är ^{235}U, eftersom höjden av dess potentialbarriär är 1 MeV mindre än för ^{238}U.

Ämnet har upptagits av W. Maurer och H. Pose i Berlin-Dahlem (3). De funno, att vid arbete med mycket stora uranmängder en spontan emission av neutroner kan påvisas. Halvtiden beräknad på ^{238}U befanns vara $2{,}5 \cdot 10^{15}$a i god överensstämmelse med Flerovs och Petrzhaks resultat. Emissionen tydes som följd av en spontan klyvning.

På grund av neutronstrålningens ytterst ringa intensitet måste känsligheten uppdrivas så långt som möjligt. Detta skedde dels genom användning av mycket stora uranmängder, dels genom användning av en räknekammare med 700 cm² yta. Själva räkneröret, vars diameter var 5 cm och längd 35 cm, omgavs av en dubbelväggig järncylinder innehållande en uranförening motsvarande 8,8 kg metallisk uran samt därutanför av ett cylindriskt paraffinblock. Apparaten var fylld av argon med 7 cm Hg-tryck, och räkneröret var anslutet till en proportionalförstärkare.

Den observerade nolleffekten för räknekammare + paraffin var 1,24 delstreck/m; med räknekammare + urancylinder + paraffin erhölls ett utslag av 11,7 delstr./m. Uran utsänder alltså neutroner, framför allt snabba neutroner, som bromsas upp i paraffinhöljet.

Författarna diskutera andra förklaringsmöjligheter än den spontana klyvningen, åtföljd av neutronemission. Sålunda har man att räkna med möjligheten av (α, n)-processer inom uran, d. v. s. att de α-partiklar, som bildas vid reaktionen U → UX, åstadkomma spjälkningar, förenade med neutronbildning. Häremot anföres, att antalet av de av 8,82 kg uran utsända α-partiklarna utgör $2 \cdot 10^8$

pr s = 6mC (= millicurie) α-ekvivalenter. Om neutroneffekten beror på dessa α-partiklar, borde en ringa tillsats av några mC RaEm (i jämvikt med sina följdelement) till uran åstadkomma en väsentlig höjning av neutroneffekten. En tillsats av 3—4 mC RaEm medförde ingen mätbar ökning av effekten, varför denna förklaring kan förkastas.

För att undersöka, om effekten möjligen är att tillskriva höjdstråleneutroner, har Pose (4) eliminerat sådana genom att utföra försöken under ett berglager av betryggande tjocklek, nämligen på 485 m djup i kaligruvan i Aschersleben. Här blev först och främst nolleffekten utomordentligt konstant, och vidare kvarstod uraneffekten, ehuru något minskad, som följande tabell över försökens medelvärden visar:

Nolleffekt	$0{,}77 \pm 0{,}01$	delstr./m
Nolleffekt + uraneffekt	$7{,}41 \pm 0{,}05$	»
Uraneffekt	$6{,}64 \pm 0{,}05$	»
Nolleffekt + toriumeffekt	$0{,}89 \pm 0{,}01$	»
Toriumeffekt	$0{,}12 \pm 0{,}02$	»

M. och P. anse på grund härav, att den erhållna effekten måste vara en spontan ej utifrån inducerad neutronaktivitet.

Vidare göres en intressant beräkning av antalet neutroner pr g uran och sekund. Genom jämförelse med en neutronkälla av känd intensitet (Rn + Be) finner man, att 8,82 kg uran har en neutronaktivitet, ekvivalent med $1{,}34 \cdot 10^{-2}$ mC(Rn + Be). Om man för 1 mC (Rn + Be) antar ett neutrontal = 15 000 per s, (5), så borde 8,82 kg uran ge 201 neutroner/s. Mätningarna (vid jordytan) gåvo endast 0,178 neutroner/s. Sannolikheten för neutronernas registrering i apparaten är således $0{,}178/201 = 8{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Slutligen beräknar Pose ur sina underjordiska mätningar en halveringstid av $3{,}1 \cdot 10^{15}$ a. Detta värde är beräknat på summan av uranisotoperna, d. v. s. praktiskt taget på ^{238}U, och anges vara säkrare än det av Maurer och Pose först erhållna $2{,}5 \cdot 10^{15}$ a.

Elementet 93.

I motsats till ^{235}U, som vid beskjutning med långsamma neutroner undergår en klyvning, övergår isotopen ^{238}U vid infångandet av en neutron till den konstgjort radioaktiva ^{239}U, som är en β-strålare med halveringstiden 23 m. Vid dess sönderfall bildas en 2,3d-substans, först påvisad av Segré. Mc Millan och Abelson (7) lyckades genom användning av mycket starka strålningskällor identifiera detta senare ämne som elementet 93. De ange, att dess egenskaper i så hög grad likna urans, att det synes bekräfta en

tidigare, av V. Goldschmidt uttalad åsikt, att i och med uran skulle en grupp av nära besläktade grundämnen, »uranider», motsvarande lantaniderna, taga sin början.

Ett steg vidare fördes detta arbete av K. Starke (10), som genom ett av Sziland och Chalmers angivet förfarande lyckades framställa isotopen ^{239}U av en intensitet, stegrad till 10^5 gånger den normala. Detta var nödvändigt för att man skulle kunna iakttaga 93 vid sidan av de båda β-strålarna UX_1 och UX_2. Den eftersträvade minskningen av proportionen ^{238}U: ^{239}U möjliggöres endast genom att man antingen använder en mycket kraftig neutronstrålning eller genom ovannämnda förfarande.

Strassmann och Hahn (6) ha lyckats framställa elementet 93 eller Eka-renium i rent tillstånd och undersökt dess kemiska egenskaper i avsikt att avgöra, om dessa överensstämma med de för Eka-renium väntade eller om de antyda existensen av en grupp uranider.

Framställningen av det rena ämnet 93 grundar sig på att 93 i oxiderat tillstånd liknar uran, i reducerat tillstånd liknar torium.

Enligt en av de använda metoderna reduceras neutronbestrålat U med SO_2 och fälles med natriumacetat, varvid huvudmängden U utfaller som uranylnatriumacetat. I filtratet stanna 93 och dess spjälkningsprodukter jämte UX och små mängder U. Med ammoniak utfälles rester av U samt UX och 93. Fällningen oxideras genom upplösning i salpetersyra och kokning med kaliumbromat, så att 93 nu analytiskt liknar U. Nu fäller man 93 (+ U) som uranylnatriumacetat och har därigenom fullständigt skilt 93 från UX. En ytterligare rening åstadkommes, om man efter föregående reduktion fäller 93 med fluorväte tillsammans med lantanfluorid.

En annan och något enklare metod att renframställa 93 grundar sig på användningen av organiska fällningsmedel, bäst 8-oxikinolin (»oxin»), som fäller U och Th, men ej 93 ur på motsvarande sätt förberedda lösningar. Man arbetar som ovan är beskrivet, tills man erhållit den från UX befriade blandningen av 93 och U. Denna löses i ättiksyra och fälles med oxin, varvid 93 kvantitativt kvarstannar i lösningen.

Beträffande 93:s kemiska egenskaper är först att påpeka, att 4-värt torium i sina reaktioner liknar 4-värt uran. Om sålunda 93:s egenskaper äro så lika urans som de sällsynta jordarternas sins emellan, så skall 93 i oxiderat tillstånd förhålla sig som 6-värt uran, i reducerat tillstånd som 4-värt torium. Här nedan anföras några av de prov, som Strassmann och Hahn underkastat 93 för att bestämma dess släktskap med de närmaste grannarna i det periodiska systemet.

1) Till skillnad från renium — och eka-renium — fälles 93 ej av H_2S i ättiksur eller mineralsur lösning.

2) I likhet med Th och U fälles 93 såväl i reducerat som oxiderat tillstånd av NH_3 och av NaOH i överskott.

Till skillnad från Th, 4-värt U och sällsynta jordarter fälles 93 endast mycket ofullständigt (sannolikt genom adsorption) i svagt sur lösning av oxalsyra eller ammoniumoxalat.

Till skillnad från Th och 4-värt U faller 93 inte ut, då man fäller La med K_2SO_4, oberoende av om det är reducerat eller oxiderat.

I likhet med U utfälles oxiderat 93 av natriumacetat vid närvaro av U^V, men skiljes i reducerat tillstånd vid samma fällning i likhet med Th fullständigt från U.

I motsats till Th och U fälles 93 ej av oxin, vare sig det är reducerat eller oxiderat.

3) Ammoniumsulfid fäller 93, men sannolikt därför att fällningsmedlet är alkaliskt.

4) Ammoniumkarbonat fäller oxiderat 93 vid närvaro av Ca, Sr och Ba.

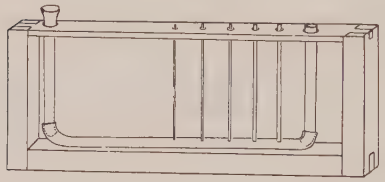
Man finner härav, att olikheterna mellan 93 och uran i vissa fall äro större än mellan de lättast skiljbara sällsynta jordarterna lantan och cer, och det är därför för tidigt att yttra sig om förekomsten av s. k. uranider.

Litteratur.

S. Eklund, Kosmos, *19*, 39; 1941.
O. Hahn, F. Strassmann och H. Götte, Abh. Preuss. Akad. d. Wiss., Naturw. Kl. 1942, nr 3.
1) Naturwiss. *31*, 249; 1943.
2) Journ. of Physics, Moscow. Vol. III, 275; 1940.
3) Zeitschr. f. Physik, *121*, 285; 1943.
4) Zeitschr. f. Physik, *121*, 293; 1943.
5) E. T. Booth, J. R. Dunning och F. G. Slark, Phys. Rev. *55*, 876; 1939.
6) Naturwiss. *30*, 256; 1942.
7) Phys. Rev. 57, 1185; 1940.
8) Naturwiss. *31*, 499; 1943.
9) Naturwiss. *31*, 201; 1943.
10) Naturw. *30*, 107; 1942.
11) Zeitschr. f. Physik *119*, 195; 1942.

Ett kapillärrörstativ.

Vid försök med kapillärrör kan man lämpligen använda projektion. Den här beskrivna anordningen är avsedd för ett Norstedts epidiaskop. Stativet inskjutes i stället för den ställning, i vilken skioptikonplåthållarna eljest nedföras. Sockel och sidostolpar äro av planhyvlad furulist ($1'' \cdot 1''$); sidostolparna äro upptill förenade medelst en list ($1'' \cdot {}^1/_4''$), i vilken hål borrats för de relativt grova sidorören och kapillärrören. Sidorören äro nedtill förbundna med en gummislang, som hålles i ställning av ett par små spikar på ömse sidor. Kapillärrören nedföras i slangen genom små hål, som lämpligen upptagas med en varm spik. Kapillärrören böra efter användningen borttagas. Vill man ej draga nya rör varje gång, bör man förvara dem i ett provrör med spir. conc.



Lämpligt är att ha två stativ, ett för vatten och ett för kvicksilver. Stativen böra göras så långa, att påfyllning kan ske under det att stativet är inskjutet på sin plats i projektionsapparaten.

B. Wahlström.

En generaliserad studentuppgift.

Följande sats är en generalisering av uppg. 7 i specialkurs, jan. 1945:

Från en punkt dragas tre normaler till en parabel. Visa, att en cirkel genom normalernas fotpunkter går genom vertex.

Lösning: Parabeln är $y^2 = 4ax$, O vertex, $P(x_0; y_0)$ normalernas skärningspunkt, $A(x_1; y_1)$ en fotpunkt, M projektionen av A på axeln, N skärningspunkten mellan AP och axeln samt R en punkt på axeln, sådan att $\angle OAR = 90°$. Om man på AR kan finna en punkt Q, vars koordinater bero endast av x_0 och y_0, blir OQ diametern i cirkeln. Man har $MN = 2a$, $\overline{AM}^2 = OM \cdot MR$, varav $MR = 4a$; AN är alltså median i $\triangle MAR$. En genom P parallellt med axeln dragen linje skär AR i S, vars x-koordinat $= x_1 + 2(x_0 - x_1) = 2x_0 - x_1$. Alltså blir x-koordinaten för mittpunkten av $SR = \frac{1}{2}(x_1 + 4a + 2x_0 - x_1) = x_0 + 2a = x_Q$; $y_Q = \frac{y_0}{2}$.

X.

K-vitaminet, dess upptäckt, verkningar och användning.

Av Dr. phil. **HARRY WILLSTAEDT.**

K-vitaminets upptäckt är ett av de senaste exemplen på huru en forskare kan göra en helt annan upptäckt än den han från början hade väntat sig. Den danske biokemisten Dr Henrik Dam, K-vitaminets upptäckare, hade inriktat sig på att studera kolesterinomsättningen och kolesterinsyntesen hos djur. Han valde kycklingar som försöksdjur och satte dem på en sterinfri kost bestående av rent kasein, löslig stärkelse, oorganiska salter, jästkoncentrat och sterinfria koncentrat ur torskleverolja (det visade sig senare att denna kost kan betydligt förenklas). Efter två till tre veckor fingo då försöksdjuren våldsamma blödningar under huden och mellan musklerna; vidare förekommo även ofta blödningar i magsäcken. Då det visade sig, att djuren trots denna åkomma normalt syntetiserade kolesterin och att tillförsel av kolesterin ej hindrade uppkomsten av blödningar, kunde orsaken till blödningarna ej vara sterinbrist. Vidare visade Dam, att även C-vitaminbristen måste uteslutas som orsak till blödningarna, då djurens tillstånd icke förändrades, om de utöver ovannämnda kost fingo rikligt med citronsaft. Dam drog därav den slutsatsen, att det i den av honom utarbetade kosten fattades ett förut okänt vitamin, vilket benämndes K-vitamin.

Oberoende av Dam hade en amerikansk forskare, Almquist, påbörjat liknande experiment och gjort samma iakttagelser hos sina försöksdjur. Han fann vidare, att färskt fiskmjöl ej innehöll det nya vitaminet, men att vitaminet bildades, om fiskmjölet fick genomgå en lätt förruttnelseprocess. K-vitaminet visade sig förekomma rikligt i vissa gröna växter, såsom luzern, i svinlever och i vissa frön, t. ex. hampfrö; andra frön, t. ex. solrosfrö, äro helt fria från K-vitamin, och ej heller förekommer vitaminet i fisklever.

Blod från K-avitaminotiska djur har en abnormt lång levringstid. Det kan t. ex. stå på laboratoriet över en hel natt utan att levra sig. Det är denna blodets oförmåga att levra sig som är orsaken till de blödningar som uppträda hos K-avitaminotiska djur. Dam och Schønheyder utarbetade en metod för kvantitativ be-

dömning av K-avitaminosen, vilken gick ut på bestämning av levringshastigheten hos försöksdjurets blod.

Den viktigaste kemiska förändringen vid blodets levrande är som bekant, att ett lösligt äggviteämne, fibrinogen, som ingår i blodvätskan, omvandlas till ett olösligt äggviteämne fibrin, som sammanhåller blodkakan. Denna omvandling av fibrinogen till fibrin sker genom inverkan av ett enzym som kallas trombin. Aktivt trombin bildas endast, om tre var för sig inaktiva ämnen, protrombin, trombokinas och kalciumjoner, sammanträffa. Protrombin ingår i blodvätskan, trombokinas finnes ute i vävnaderna (som trombokinaslösning använde Dam och Schønheyder en pressaft ur kycklingmuskel), kalciumjoner finnas såväl i blodet som i vävnaden. Om nu hos ett friskt djur ett blodkärl skadas, kommer blodets protrombin i beröring med vävnadens trombokinas; kalciumjoner finnas närvarande, och det bildas alltså trombinenzym, som omvandlar blodets lösliga fibrinogen till olösligt fibrin, m. a. o. blodet levrar sig.

Det kunde nu visas, att den bristande levringsförmågan hos blodet av K-avitaminotiska djur berodde på en onormalt låg halt av protrombin. De övriga för koagulationen nödvändiga ämnena, trombokinas, kalciumjoner och fibrinogen, finnas i normal mängd även hos K-avitaminotiska djur.

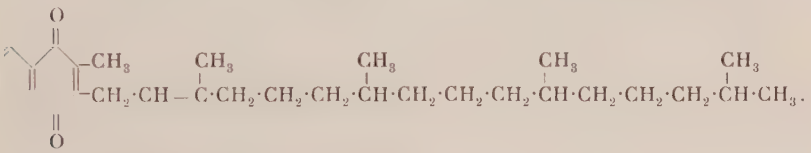
Genom en särskild, av den danske biologen Albert Fischer utarbetad operationsmetodik kan man relativt lätt ur halspulsådern hos fåglar utvinna blod utan att det kommer i beröring med någon vävnad; detta blod är därför fritt från trombokinas. Efter centrifugering erhåller man blodvätskan, plasmat, fri från blodkroppar. Dylikt plasma levrar sig, om det blandas med en trombokinaslösning. Levrandet sker snabbt, om plasmat har normal protrombinhalt, långsamt, om protrombinhalten är låg. Det visade sig emellertid, att även blod med låg protrombinhalt kan levra sig snabbt, om ett stort överskott av trombokinas tillsättes. Som mått för graden av K-avitaminosen valde därför Dam och Schønheyder kvoten mellan de trombokinasmängder som måste tillsättas till K-avitaminotiskt resp. friskt plasma, för att båda skola levra sig inom en tid av 3 minuter. Detta tal kallas *R*-tal. Det är 1 för friska djur och kan vara upp till 200 hos avitaminotiska djur. Som mått för vitaminet självt införes Dam-enheten, dvs. den mängd som måste tillföras per g kroppsvikt hos kycklingen, för att *R*-talet skall bli normalt inom 3 dagar.

K-vitaminet har alltså den fysiologiska uppgiften att hålla blodets protrombinhalt inom normala gränser. Vitaminet är emellertid ej identiskt med själva protrombinet. Protrombin är nämligen vatten-

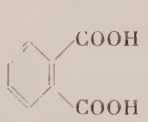
lösligt, K-vitaminet däremot fettlösligt. Vidare har det visat sig, att tillsats av K-vitamin direkt till ett K-avitaminotiskt plasma ej har någon effekt på blodets levringshastighet.

Den kemiska renframställningen av K-vitaminet försvårades genom att vitaminet är känsligt mot alkalier och därför svårt att befria från fettartade föroreningar. I samarbete med den för sina insatser på vitaminkemins område med Nobelpriset belönade kemisten KARRER vid Zürichs universitet lyckades emellertid DAM att erhålla tämligen rena preparat. Det kunde påvisas, att vitaminet per molekyl innehöll två atomer syre och att det kunde reduceras till en dihydroförening.

Den slutliga renframställningen skedde emellertid i U. S. A., nämligen i DOISYS laboratorium. Där fastslogs även, att vitaminets bruttoformel är $C_{31}H_{46}O_2$; 1 g av det rena vitaminet motsvarar 12 miljoner Dam-enheter. Vid energisk oxidation av vitaminet erhölls ftalsyra, en kinonkarbonsyra med formeln $C_{13}H_{10}O_4$ och en keton $C_{18}H_{36}O$. Ketonen kunde identifieras som 2, 6, 10-trimetylpentadekanon-14, kinonkarbonsyran som 2-metyl-naftokinon-3-ättiksyra. Ftalsyra erhålles praktiskt taget alltid, när ett naftalinderivat utsättes för energisk oxidation. Vidare är det känt, att föreningar med dubbelbindningar vid oxidation ofta ge karbonsyror och ketoner. Ur oxidationens förlopp kunde alltså följande strukturformel härledas för K-vitaminet:

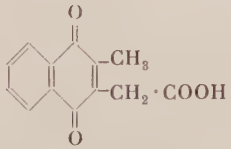


Vid oxidation erhölls:



Ftalsyra

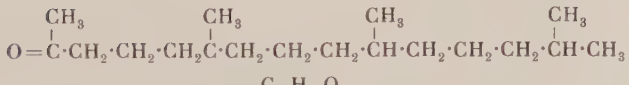
+



$C_{13}H_{10}O_4$

2-metyl-naftokinon-3-ättiksyra

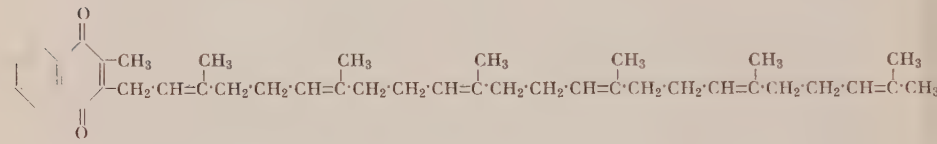
+



$C_{18}H_{36}O$

2, 6, 10-trimetylpentadekanon-14

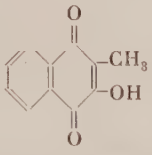
Det visade sig emellertid, att denna förening ej är det enda i naturen förekommande K-vitaminet. Den har därför benämnts vitamin K_1 eller (på grund av dess kinonkaraktär och förekomst i gröna växter) fyllokinon. Den redan omnämnda substans som bildas vid förruttnelse av fiskmjöl, har vid renframställning visat sig ha en från vitamin K_1 något avvikande kemisk sammansättning. Den kallas för vitamin K_2 och har troligen följande strukturformel:



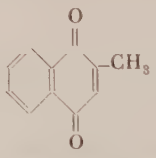
K_2-vitamin har alltså i motsats till fyllokinon en omättad sidokedja.

Av stor betydelse för K-vitaminets praktiska användning blev upptäckten, att även en del andra, med det naturliga vitaminet kemiskt besläktade substanser ha samma biologiska effekt. Den första substansen hos vilken denna verkan konstaterades, var det ur tuberkelbakterier av Anderson isolerade färgämnet ftiokol eller 2-metyl-3-oxi-naftokinon (I), som även kan framställas syntetiskt. Den benämnes ibland vitamin K_3. — Den mest aktiva av alla dessa föreningar är emellertid den enkla 2-metylnaftokinonen (II).

(I)



2-metyl-3-oxi-naftokinon



2-metylnaftokinon (II)

Den senare kan med lätthet framställas genom oxidation av 2-metyl-naftalin, ett ämne som i tämligen stora kvantiteter erhålles ur stenkolstjära. Under normala tider, då metylnaftalin lätt kan erhållas i kemikaliehandeln, lämpar sig denna oxidation utmärkt som föreläsnings- eller laborationsexperiment, då den ej fordrar särskild apparatur.

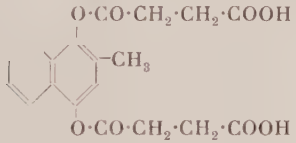
I 12 ml isättika löses 1,25 g 2-metylnaftalin. Vidare löses 5 g kromtrioxid i 3 ml vatten, varefter lösningen spädes med 12 ml isättika. Metylnaftalinlösningen nedföres nu under omröring eller omskakning långsamt i kromtrioxidlösningen,

varvid reaktionsblandningen kyles med vatten. Man avpassar kylvattnets temperatur och hastigheten varmed metylnaftalinlösningen tillsättes så, att temperaturen ej överstiger 30°. Reaktionsblandningen får stå i två dygn vid rumstemperatur och hälles därefter i 150 ml vatten. Den uppkomna fällningen filtreras (helst på sugfilter) och tvättas med vatten, varefter den omkristalliseras ur 96 % sprit.

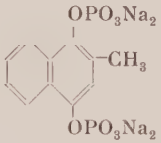
Det visade sig, att metylnaftokinon har t. o. m. en större biologisk aktivitet än de naturliga vitaminerna K_1 och K_2. Substansen betecknas ibland som vitamin K_3, i England kallas den menaphthon, i U. S. A. menadion. De långa sidokedjorna som ingå i de naturliga vitaminerna K_1 och K_2 ha alltså ingen betydelse för vitaminaktiviteten. För vitaminets medicinska användning är det emellertid en nackdel att metylnaftokinon ej är vattenlöslig. Man har därför med framgång försökt att använda olika vattenlösliga derivat av metylnaftokinon, vilka i organismen omvandlas till metylnaftokinon. Bland dessa kunna nämnas:

2-metyl-1,4-naftohydrokinon-disuccinat (III), natriumsaltet av 2-metyl-1, 4-naftohydrokinondifosfat (IV), 2-metylnaftokinon-3-sulfonsyrat natrium (V) och 2-metyl-4-amino-1-naftol (VI).

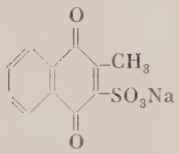
(III)



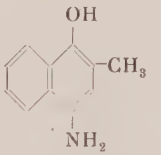
(IV)



(V)



(VI)



Behovet av vitamin K synes vara rätt olika hos olika djurslag. Medan kycklingar på den av Dam uppgivna kosten alltid få en K-avitaminos och en dylik avitaminos även lätt kan framkallas hos ankungar samt unga gäss, uppträdde avitaminosen endast långsamt och i mycket mild form hos duvor och kanariefåglar. Råttor, marsvin och hundar kunna leva länge på samma kost utan att visa några som helst sjukdomssymtomer. Hos kaniner kan man däremot framkalla en K-avitaminos.

Människans dagsbehov av vitamin K är ej känt. Det är säkert, att en K-vitaminsyntes sker i vår tjocktarm genom tarmbakterierna.

Det så uppkomna K-vitaminet synes i allmänhet räcka till för organismens behov. Att det emellertid kan vara otillräckligt, om födan under långa tider helt saknar K-vitamin, framgår av engelska läkares iakttagelser på patienter, vilka under tider varierande mellan ett och nio år hade levt helt utan att förtära vare sig grönsaker eller frukter. Alla hade skörbjugg och den ene, en alkoholist, dessutom pellagra utöver K-avitaminosen. Genom att ge metylnaftokinon kunde de bota dessa patienter från K-avitaminosen.

Dylika fall torde emellertid höra till undantagen. K-vitaminets egentliga medicinska betydelse ligger på andra områden, där det visat sig vara direkt livsräddande i fall, där förut ingen lämplig terapi stod till buds.

Direkt efter födelsen och under de första levnadsdagarna ha barn ofta en låg protrombinhalt i blodet. Mot de blödningar (hemorragier) som kunna uppstå till följd härav fanns det före K-vitaminets upptäckt icke något specifikt medel. Genom att under havandeskapets sista tid och under förlossningen tillföra K-vitamin till modern kan man avsevärt höja protrombinhalten i barnets blod och därmed minska risken för dylika blödningar.

Hos vuxna individer kan störningar i resorptionen medföra K-vitaminbrist, varvid det i födan ingående eller av tarmbakterierna syntetiserade K-vitaminet ej upptas av organismen. Orsakerna därtill kunna vara flera. Man har kunnat visa, att K-vitaminet, som ju är en fettlöslig substans, endast resorberas om gallsyrasalter äro tillstädes. Gallsyrasalter ha nämligen den egenskapen, att de kunna få en hel del i vatten i och för sig olösliga substanser att bilda kolloidala lösningar i vatten. Till dessa substanser hör även K-vitamin. Hos friska individer finns alltid tillräckligt med gallsyrasalter i tarmen, då dessa utsöndras med gallan, men vid olika former av gulsot kan mängden gallsyrasalter bli otillräcklig. Detta kan få farliga följder vid t. ex. en gallstensoperation. Om gallgången är tilltäppt till följd av t. ex. stenbildning, leder bristen på gallsyrasalter i tarmen till att K-vitaminet ej resorberas. K-vitaminbristen leder till ringa protrombinhalt i blodet, och vid den operation som måste företas för att avlägsna den egentliga orsaken, gallstenen, finns det då alltid risk för våldsamma blödningar, vilka kunna orsaka patientens död. Även vid andra sjukdomar kan resorptionen av K-vitaminet bli störd med samma blödningsrisk som följd. I alla dessa fall brukar man numera låta en behandling med K-vitamin föregå operationen för att eliminera blödningsrisken. För dessa ändamål har man stor nytta av de vattenlösliga derivat av K-vitamin som omnämnts ovan. Dessa kunna nämligen bekvämt injiceras på patienten, i fall resorptionen är

störd, och i de fall där resorptionsstörningen endast beror på brist på gallsyrasalter, kunna vissa vattenlösliga preparat även givas i tablettform, då de för sin resorption ej äro beroende av närvaron av gallsyrasalter.

På så sätt har K-vitaminet kommit att spela en stor roll i den nuvarande medicinen. Det är inte som beträffande de andra vitaminerna i första hand näringsfysiologiska och näringshygieniska synpunkter som göra denna substans intressant, utan med K-vitaminet har tillkommit ett alldeles nytt *läkemedel* av en förut okänd typ.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.[1]

Årsmötet den 3—4 januari 1945.

Årsmötet ägde rum på Stockholms Byggnadsförening, Norrlandsgatan 11, Stockholm, och mötesförhandlingarna började kl. 9.30 fm. Sedan ordföranden, rektor Torsten Wetterblad, hälsat de närvarande välkomna, föredrogs protokollet från föregående årsmöte samt styrelse- och revisionsberättelserna. Ansvarsfrihet beviljades skattmästaren och den avgående styrelsen. Till ordförande för år 1945 omvaldes rektor Wetterblad. Av de avgående styrelsemedlemmarna hade professor K. Dahr och rektor B. Wahlström undanbett sig återval. Övriga styrelsemedlemmar omvaldes, och till nya medlemmar av styrelsen valdes e. o. adjunkt G. Beskow, Stockholm, och lektor A. Guntsch, Umeå. Till revisorer valdes rektor M. Kolmodin (omvald) och adjunkt S. Comét (nyvald) och till revisorssuppleanter adjunkterna V. Carlson (omvald) och E. Jonsson, Stockholm, (nyvald).

Dagens program var sedan helt ägnat åt filmen. Lektor H. Bäckström höll först ett föredrag om kinematografisk film, ljudfilm och färgfilm. Det väldisponerade och intressanta föredraget gav en utmärkt orientering över de problem som möter i den moderna filmen och som mötesdeltagarna senare på dagen fick

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnes i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45 och 113, 1939; *23*, 41 och 234, 1940; *24*, 38 och 89 1941; *25*, 38 och 153, 1942; *26*, 39, 94 och 220, 1943; *27*, 38 och 79, 1944.

praktiskt stifta bekantskap med vid besöket hos Svensk Filmindustri. Efter lektor Bäckström talade ingenjör S. Jacobsson från Zeiss svenska aktiebolag över »Contax-stereo-systemet» och visade ett antal färgbilder. Principen för den stereoskopiska projektionen av färgbilder är i korthet följande. Med en kamera med två objektiv upptas två färgbilder. Dessa projicieras över varandra på en särskilt preparerad metallskärm med hjälp av en projektionsapparat med två objektiv. Med hjälp av polaroider, som placeras framför objektiven, polariseras ljuset, så att ljuset genom höger- och vänsterbilden blir polariserat i mot varandra vinkelräta plan. Det från skärmen reflekterade ljuset betraktas genom glasögon, bestående av två polaroider. Polaroiden för höger öga släpper endast igenom ljuset från högerbilden och polaroiden för vänster öga endast ljuset från vänsterbilden. Det stereoskopiska seendet inställer sig ögonblickligt, och resultatet är förbluffande.

Efter en lunchpaus avreste de 180 deltagarna med abonnerad spårvagn till Råsunda, där Svensk Filmindustri visade sina inspelningsateljéer, laboratorier, garderober, verkstäder m. m. Laboratoriechefen, ingenjör G. Jacobsson, gav först i den ena av de två inspelningsateljéerna en kort redogörelse för hur en film kommer till, varefter två unga skådespelare under regissör Bolanders ledning utförde en filmscen. Deltagarna fick därefter i mindre grupper bese laboratorierna och övriga sevärdheter, och vidare visades instruktionsfilmen »Katten över vägen» samt en stereoskopisk film enligt den äldre röd-grön-principen. Höger- och vänsterbilden projicieras i rött, resp. blågrönt ljus på skärmen, och bilden betraktas genom glasögon med ett rött och ett blågrönt glas, så att högra ögat endast ser högerbilden och vänstra ögat vänsterbilden.

Efter besöket på Råsunda var gemensam middag anordnad på Byggnadsföreningens restaurang. Vid middagen visade ingenjör S. Jacobsson sina stereoskopiska färgbilder, och lektor Bäckström visade två ultrarapidfilmer.

Torsdagen den 4 januari samlades mötesdeltagarna kl. 10 fm. på Byggnadsföreningen, där dr. H. Willstaedt talade över ämnet »K-vitaminet, dess upptäckt, verkningar och användning». Det aktuella och intressanta föredraget återfinnes på annan plats i detta nummer av Elementa. Därefter talade professor O. Klein över

Några problem ur kärnfysiken.

Den stora, revolutionerande utvecklingen inom atomfysiken utgår, framhöll föredragshållaren, från de undersökningar över elektriska urladdningar i förtunnade gaser, som ledde till upp-

täckten av elektronen och röntgenstrålarna och indirekt till upptäckten av radioaktiviteten. Parallellt med dessa experimentella undersökningar gick en teoretisk forskningslinje, där Plancks tydning av lagen för värmestrålningen med hjälp av kvanthypotesen utgör en milstolpe. Från och med upptäckten av atomkärnan genom Rutherfords och Bohrs därtill anknytande teori för atomens byggnad löpa de två linjerna samman, men samtidigt delar sig den nya fysiken i elektronfysik och kärnfysik. Medan den förra omfattar alla de företeelser och egenskaper som härröra från atomernas elektronhölje, där atomkärnan kan betraktas som en elektriskt laddad masspunkt, har den senare direkt med kärnans egen struktur att göra. Genom studiet av den naturliga och den inducerade radioaktiviteten, genom upptäckten av neutronen och kanske främst genom undersökningar av de reaktioner som inträda, när atomkärnor bestrålas med α-partiklar, neutroner och andra kärnpartiklar, äger man numera en ganska ingående kännedom om atomkärnans byggnad, även om många gåtor återstå att lösa. Framför allt gäller detta problemet om kärnkrafterna, vilket enligt de senaste årens forskningar anses hänga nära samman med egenskaperna hos de s. k. mesonerna, partiklar med kort livslängd, som uppstå i atmosfärens högre skikt genom den kosmiska strålningen.

Efter en lunchpaus följde så det pedagogiska inslaget i årsmötesprogrammet med en diskussion över ämnet

Mekanikens behandling i skolan.

Inledningsanförandet hölls av lektor A. Guntsch, som i tur och ordning diskuterade mekanikkurserna på skolans tre stadier: lågstadiet i 3^5 och 2^4, mellanstadiet i 5^5, 4^4, LII^4, RI^4 och RI^3 samt högstadiet i $RIII^3$ och RIV^4.

På lågstadiet försvåras undervisningen därav, att kraftbegreppet införes omedelbart. Distinktionen mellan tyngd och vikt torde vara för abstrakt för elever i denna ålder. Däremot bör man kunna införa grafisk representation av krafter. Frågan är, om inte eleverna redan på detta stadium förstår en kritisk behandling av siffervärdena vid försök, anordnade för att verifiera de fysikaliska lagar som förekommer i kursen. Vikten av fina sifferresultat vid experimenten bör inte överdrivas. Läraren kan lätta upp kursen med trevliga figurer av den typ som förekommer i anglosaxiska, populärvetenskapliga skrifter.

I avslutningsklasserna LII^4, 5^5 och 4^4 bör mekaniken inskränkas betydligt och tagas rent experimentellt. Eleverna äger inte den

matematiska mognad, som erfordras för en mera formelmässig behandling av centralrörelse o. dyl. Den inbesparade tiden bör användas till andra områden, som intresserar eleverna mera och är nyttigare, emedan de erbjuder tillämpningar i det praktiska livet.

På grund av den stora tidsnöd som fysiken på realgymnasiet lider av bör mekanikkursen i RI[4] skäras ned kraftigt. Det enda egentligt nya i denna ring är kraftparallellogrammen, som inte kan genomgås i 3[5]. Sådana kursmoment som resultanten till parallella krafter, friktion och lutande planet, kan gott sparas till RIV[4], där de enligt gällande kursplaner ändå skall behandlas, och där behandlingen underlättas av elevernas kunskaper i trigonometri. I en av de vanligaste läroböckerna i fysik behandlas för övrigt lutande planet, innan likformighetsläran genomgåtts i matematiken. Hydrostatiken och aerostatiken bör i RI[4] genomgås repetitionsvis med huvudvikten lagd vid problemlösning. Härigenom skulle man kunna vinna omkring en halv termin, vilken tid skulle komma väl till pass i den fortsatta undervisningen.

Kursen i RI[3] kan inskränkas på motsvarande sätt. Mekaniken i denna ring bör omfatta repetition av hydrostatik och aerostatik med huvudvikten lagd på problemlösning. Geostatiken bör helt utgå ur kursen, då den redan behandlats i 5[5] eller 4[4].

Mekanikkurserna i RIII[3] och RIV[4] är väl avvägda, och några skäl till ändring av kursplanen föreligger ej.

Inledaren framhöll till sist önskvärdheten av en lärobok i fysik för gymnasiet, uppbyggd kring energilagen som central lag. För närvarande har eleverna svårt att vid sina studier i läroboken se sammanhanget mellan de olika fenomenen. En lärobok med lagarna grupperade kring energilagen skulle utan tvivel medföra, att eleverna finge en ökad översikt av och större förståelse för fysiken.

Den efterföljande diskussionen rörde sig huvudsakligen kring problemen på lågstadiet och mellanstadiets avslutningsklasser, och diskussionsinläggen gav knappast några nya synpunkter. Särskilt hade man delade meningar om lämpligheten av att på lågstadiet skilja mellan begreppen tyngd och vikt. Flera talare kritiserade starkt mekanikkursen i avslutningsklasserna 5[5], 4[4] och LII[4] och önskade den ersatt med andra trevligare och nyttigare kursmoment, t. ex. ellära. Andra talare framhöll, att om man anknöt framställningen till energilagen och valde tillämpningar från praktiska livet, kunde kursen bli både trevlig och givande. Adjunkt Nils Larsson betonade i detta sammanhang, att man bör ta fasta på allmänbildningssynpunkterna i alla de kursmoment som före-

kommer, såväl i mekanik som värmelära och ellära. Man får inte sätta in nya kursmoment, t. ex. ellära i stället för mekanik, därför att läraren eller eleverna tycker, att ellära är trevligare än mekanik. Rektor Herlin önskade, att i kursen i RI[4] även borde ingå något dynamik. De som inte läser fysik i RIII[4] och i RIV[4], får annars aldrig veta något om t. ex. fallrörelsen.

Diskussionen om mekaniken på högstadiet råkade på avvägar och kom mest att röra sig om problemen i studentexamens fysikskrivning. De flesta talarna tycktes vara ense om att fordringarna för godkänt i avgångsskrivningen borde sänkas. Adjunkt Larsson påpekade, att en del problem, som givits i studentexamen, faller utanför den matematiska behandlingen av mekaniken i skolan. Detta är t. ex. fallet med problem över centrifugalkraftens storlek i cirkelformiga banor vid »looping the loop», som förutsätter en generalisering av formlerna, emedan hastigheten undergår förändringar under rörelsen.

Efter diskussionens slut bad professor Klein om tillåtelse att säga några ord om mekanikens behandling i skolan. Han påpekade önskvärdheten av att matematiken, som oftast behandlas mycket formellt, i större utsträckning blir tillämpad på naturvetenskapliga problem, varvid särskilt sambandet mellan mekanik och matematik är givande. Professor Klein belyste detta med ett exempel, vari han visade, hur kaströrelsen kunde behandlas genom tillämpning av parabelns kända egenskaper. Professor Klein har ställt i utsikt, att en uppsats i ämnet kommer att införas i Elementa.

Till sist demonstrerade ingenjörerna R. Milles och E. Bergquist från Philips svenska aktiebolag en elektronstråleoscillograf. Därefter tackade ordföranden alla medlemmar som närvarit vid årsmötet och hälsade alla välkomna till föreningens nästa möte.

Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1944.

Styrelsen har under året bestått av 21 personer, varav följande 5 även tillhört arbetsutskottet: rektor T. Wetterblad, ordförande, lektor A. Uhler, v. ordförande, lektor B. Gustaver, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. Sandén och rektor S. Åstrand. Övriga medlemmar i styrelsen ha varit: rektor A. Björkeson, Stockholm, fil. lic. I. Bolin, Stockholm, professor K. Dahr, Göteborg, lektor G. Funke, Stockholm, lektor E. Hjalmar, Stockholm, lektor F. Kiessling, Göteborg, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, lektor E. Nordefeldt, Stockholm, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nord-

HULT, Stockholm, rektor P. G. PERSSON, Malmö, lektor EVA RAMSTEDT, Stockholm, lektor B. SVENSSON, Jönköping, rektor M. SÖDERMAN, Luleå, rektor LILLY TENGNÉR, Stockholm, rektor B. WAHLSTRÖM, Stockholm.

Föreningens ordinarie årsmöte hölls den 7—8 januari 1944 i Stockholm. Referat från årsmötet finns infört i Elementa 27: 1 sid. 38 och 27: 2 sid. 79. Särtryck därav ha tillställts föreningens medlemmar. Den 21 nov. voro föreningens medlemmar i Stockholm inbjudna av Biokemiska sällskapet i Stockholm att åhöra ett föredrag av nobelpristagaren, prof. v. HEVESY över inverkan av röntgenstrålar på organiska vävnader.

Liksom föregående år har styrelsen sänt ut PM från undervisningsråden R. LUNDBLAD och C. E. SJÖSTEDT till ledning vid rättningen av vårens studentskrivningar i fysik och matematik samt de matematiska uppgifterna i realexamen.

Vid styrelsens sammanträde den 3 april tillsammans med representanter för styrelsen för Biologilärarnas förening beslöts att sända en skrivelse till 1940 års Skolutredning (se nedan).

Under året har styrelsen haft 4 och arbetsutskottet 3 sammanträden.

Medlemsantalet är 613 vid årsskiftet 1944—45. Under året ha 16 nya medlemmar tillkommit, under det att 19 avgått ur föreningen.

Stockholm den 31 december 1944.

Torsten Wetterblad
Ordförande

Bror Gustaver
Sekreterare

Skrivelse till 1940 års skolutredning.

Skrivelsen (se ovan), som inlämnades den 4 maj 1944, utmynnade i en hemställan, att Skolutredningen måtte

1) söka någon möjlighet att stärka kemiens ställning i realskolan, t. ex. genom utökning av ämnets timtal till 2 veckotimmar i realskolans avslutningsklass;

2) föreslå rätt för Skolöverstyrelsen att medgiva uppdelning i två avdelningar av klasser, i vilka elevantalet överstiger 16, vid undervisningen i fysik, kemi och biologi i realskolan samt kemi och fysik i flickskolan i viss utsträckning, som närmare angives i skrivelsen.

Bokanmälningar.

H. J. Flechtner, *Väder och vind*, meteorologi för envar, svensk bearbetning av R. Meinander. Gebers förlag Stockholm, tryckt i Helsingfors 1944. 262 s., ca 150 fig., diagram och kartor, kr. 9: 50.

För en del år sedan utgav den tyske meteorologen H. J. Flechtner ett populärvetenskapligt arbete i meteorologi, »Du und das Wetter». Detta har nu översatts till svenska och delvis omarbetats för nordiska förhållanden av R. Meinander, Helsingfors. Resultatet av bearbetningen får väl betraktas som ganska gott. Att servera meteorologi i populär form är nämligen svårt, om man samtidigt vill hålla fast vid kravet på att framställningen skall vara korrekt. Liknelser måste ofta tillgripas, och häri ligger faran, att man kommer otillåtet långt från verkligheten.

Tillsammans med några unga studenter, en medicinare, en fysiker och en filosof samt en gammal erfaren meteorolog få vi ge oss ut på upptäcktsfärder bland atmosfärens mysterier. Vi göra bekantskap med de faktorer, som tillsammans betinga det som kallas väder. Efter en orientering om solstrålningen som den enda drivkraften för all rörelse i jordens lufthav redogöres för vindarnas ursprung, den allmänna cirkulationen, vattnet i atmosfären och de övriga väderlekselementen. Klimatet över olika delar av jorden beskrives kortfattat liksom dess växlingar och inflytande på levande varelser och växter. De sista avsnitten behandla vädret på våra breddgrader och problemet att förutsäga vädret. Dessa avsnitt ha blivit styvmoderligt behandlade, vilket förresten brukar vara fallet i populärvetenskapliga framställningar. Förf. har till slut några ord att säga om sannolikheten för att en väderleksförutsägelse skall slå in.

En del detaljanmärkningar synas vara befogade. Först och främst lämnar språket en del övrigt att önska på sina håll, vilket väl torde förklaras av att översättningen ej gjorts i Sverige. Väderlekskartorna kunde ha varit betydligt bättre, och översättaren, som i förordet påpekar att en omarbetning gjorts för nordiska läsare, borde tagit med flera data och diagram, som klargjort väderleksförhållandena i Sverige och ej enbart behandlat finska förhållanden.

Bland sakfel kunna följande anföras. På sid. 44 rad 4 står »Härav absorberas 15 %» osv., bör vara »Av totala strålningen

absorberas» osv.; sid. 103 »luften är mättad med vattenånga» borde helst vara »vattenångan är mättad»; på sid. 104 näst sista stycket står »ångtrycket är ett uttryck för luftens fuktighetsgrad och kallas *den absoluta fuktigheten*», vilket är fel; bör vara: »ångtrycket är ett mått på luftens fuktighetsgrad; denna kan också anges genom *absoluta fuktigheten*, dvs. gram vattenånga per m^3 luft». — Sid. 147 i tredje stycket måste stå »$(07 + 15 + 2 \cdot 21) : 4$» men uttrycket gäller dock ej för svenska förhållanden; på sid. 242 bör sta »lufttryckstendensen» i st. f. »barometertendensen».

De anförda anmärkningarna äro ej allvarligare än att man som ett allmänt omdöme kan säga, att boken är lättläst, åskådlig och i allmänhet vederhäftig. Den torde för närvarande vara den bästa i sitt slag på svenska språket. Kompletteras den med »Oväder» av Steward och »Lufthav, Vejr og Klima» av Lysgaard (Elementa 1943, sid. 110, resp. 1944, sid. 101), torde kunskaperna i meteorologi vara tillfredsställande.

H. Henrikson.

H. Levy and E. E. Preidel, *Elementary Statistics.* London 1944, 184 sid., 5 s.

Den teoretiska statistikens resultat börja alltmer att utnyttjas inom industrien. Elementära läroböcker, avsedda för tekniker, äro sällsynta och därför välkomna. Levy-Preidels lilla arbete vänder sig i första hand till flygtekniker men kan användas som en första introduktion i ämnet av envar, som vet något om integralkalkyl och som — märk väl — är mer intresserad av de praktiska resultaten än av ämnet som sådant.

Kapitlen om korrelation och kvalitetskontroll äro välskrivna och innehålla tillämpningar av två betydelsefulla nyare resultat, nämligen signifikansen av korrelationskoefficienten resp. variationsbreddens fördelning. Ur teoretisk synpunkt är framställningen icke helt tillfredsställande även med hänsyn tagen till försöken att göra den lättillgänglig. Att behandla frekvensfördelningar, medelvärden, medelavvikelser och t. o. m. medelfel utan användning av sannolikhetsbegreppet är snarare originellt än lämpligt. Sannolikhetslagarna äro vaga och ofullständiga, och gränsövergången från binomialfördelningen (som här vilseledande benämnes Bernoullis teorem) är suddig, bl. a. därför att elementarfelsschemat användes som mellanstadium. Påståendet att två variabler, vilkas korrelationskoefficient är noll, alltid äro oberoende är felaktigt.

Ett stort antal exempel belysa framställningen.

Gunnar Blom.

A. C. Aitken, *Statistical Mathematics.* Edinburgh 1944, 3rd ed., 153 sid., 5 s.

Den matematiska statistiken har från att ha varit en relativt lättillgänglig och föga omfattande del av den tillämpade matematiken utvecklats till en ur både teoretisk och praktisk synpunkt betydelsefull vetenskap, för vars studium goda matematiska kunskaper erfordras. Denna utveckling har i hög grad stimulerats av det av den biologiska försökstekniken föranledda studiet av de s. k. sampling-fördelningarna, d. v. s. fördelningarna av de närmevärden på statistiska variabler, som erhållas från små stickprov ur moderfördelningen.

De senaste decenniernas resultat på detta område behandlas i ett av kapitlen i Aitkens i förhållande till omfånget mycket innehållsrika bok. Även grunderna för och de elementära delarna av statistiken genomgas, t. ex. sannolikhetskalkylen, sannolikhetsfördelningarna, korrelationsteori med två och flera variabler och minsta kvadratmetoden. Kunskaper i differential- och integralkalkyl förutsättas.

Framställningen är mycket elegant men kanske väl koncentrerad för den oinvigde. Som repetitorium är boken i varje fall ypperlig, och även som lärobok är den en av de bästa i sitt slag, som för närvarande finns att tillgå. *Gunnar Blom.*

Carl-Erik Lind, *Övningsuppgifter i specialmatematik.* Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1944. 26 s., kr. 1:25.

Vi matematiklärare måste vara förf. tacksamma för att han så här i specialmatematikens elfte timme velat utge denna lilla uppgiftssamling. Den innehåller 170 ex., varvid urvalet är särskilt rikligt på den näst högsta årskursen. Varje lärare kan här få goda uppslag till sina skrivningar, eftersom uppgifterna ha god anknytning till och väl förbereda för de nuvarande studentskrivningarna i specialmatematik. *F. Ehrnst.*

Bengt Lindwall, *Övningsexempel i matematik för realgymnasiet.* I. För RI[3], II[4], 33 s.; II. För RII[3], III[4], 36 s.; III. För RIII[3], IV[3], 41 s. Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1944, per del kr. 1:25.

Delarna I och II innehålla vardera 256 ex., del III 248 ex., alla avsedda för allmän kurs. En granskning ger vid handen, att exempelsamlingen erbjuder ett rikhaltigt, omsorgsfullt tillrättalagt material för innötande av gängse metoder för lösningen av problem av vanliga typer. Man kunde möjligen önska något mer dels av

problem med litet allmännare läggning, som ej direkt finnas i läroböckerna, dels av sådana, som sätta lösarens uppfinningsförmåga på litet hårdare prov d. v. s. ej omedelbart låta sig angripas med vanlig räknerutin, men gärna överraska med en enkel lösning, när man väl kommit på den.

Svaren äro av stickprov att döma mycket omsorgsfullt utarbetade. I häfte I saknas ett svar till A II: 5. I svaret till A IV: 1 skola x och y byta plats i det andra lösningssystemet. I B VII: 8 blir svaret 2: 1. Facit till III, B VIII: 3 blir $\frac{\pi\sqrt{75}}{6}$. Svarets exakta värde kunde lämpligen angivits i III, 106; i III, 41 står 3 i stället för 0 i högra ledet.

Samma idé varieras på olika sätt. Så höra i II ex. 105, 114, 116, A VIII: 4, B IV: 3, B VI: 8 alla under en allmän sats, som kanske förtjänat att komma med. Författaren söker också variera ständigt återkommande ofrånkomliga vändningar. Så lanseras »värdet av triangeln» (= arean) i II, 108; det heter »radien av den cirkel», men även »halvklot av radien 2 dm», »cirkel av radien r» i st. f. resp. *i* och *med.* I III, 113 bör ordet »rak» utgå. Det i II, 127 och A VIII: 3 anvisade resonemanget, som förutsätter, att extremum existerar, kan icke anses bindande. Samma invändning gäller mot anvisningen till II, 50, där dessutom triangeln ej får vara trubbvinklig.

S. Bågman.

E. J. Bowen, *The Chemical Aspects of Light.* Oxford University Press 1942. Pp. 191.

Boken behandlar växelverkan mellan å ena sidan ljuset och å andra sidan atomer och molekyler i de fall denna växelverkan har intresse för kemisten: spektra, dubbelbrytning, spridning, Ramaneffekt, fluorescens och fosforescens, den fotografiska processen, fotokemi och kemisk luminiscens. Växternas mästerliga syntes av kolhydrater med hjälp av klorofyll synes dock vara ett kapitel, som ännu ej är färdigskrivet. Däremot har man nått långt i kännedom om fotografiplåtens subtila reaktioner, ävensom rörande ögats uppfattning av ljus, för att icke nämna fotocellernas mekanism, som man torde kunna anse vara väl utforskad. Boken avslutas med praktiska tabeller över framställning av ljusfiltra för erhållande av monokromatiskt ljus, beredning av fosforescerande preparat, aktuella naturkonstanter m. m. Förf. har presterat en intressant och lättläst monografi, som sammanför en mängd experimentella rön och teoretiska synpunkter, vilka eljest finnas spridda över skilda områden av den vetenskapliga lärobokslitteraturen.

J. Tandberg.

Erik Öman, *Cellulosaindustrien jämte träsliperi*, Tekniskt Folkbibliotek, Bonnier 1944. 265 sid., 28 planscher och 32 figurer. Pris bunden kr. 13:15 (inkl. oms.).

Det har hittills saknats en svensk något så när utförlig, men samtidigt för allmänheten avsedd framställning av var viktigaste kemiska industri, pappersmasse- eller cellulosaberedningen. Docenten Ömans arbete fyller därför ett länge känt behov. Arbetet är detaljerat och belyser alla sidor av tillverkningarna utan att upptaga ingenjörstekniska petitesser. Stilen är lättläst, illustrationerna just sådana som man vill ha dem i ett populärt arbete, dels schematiska konstruktionsritningar, dels översikter över fabrikationsgången, dels fotografier, som verkligen visa vad de uppges visa, vilket inte alltid brukar vara fallet.

Framställningen sönderfaller naturligt i tre stora avsnitt, vart och ett inlett av en historik, nämligen slipmassa (103 sid.), sulfatmassa (88 sid.) och sulfitmassa (72 sid.). Slipmassan, som i de kemiska läroböckerna behandlas styvmoderligt på grund av ringa kemiskt intresse, har som man finner tillmätts det största utrymmet. Det är emellertid värdefullt att få en utförlig beskrivning av denna även ekonomiskt viktiga fabrikation. Mot framställningen vill icke-teknikern endast anmärka, att den på flera ställen uppvisar en beklaglig sammanblandning av begreppen kraft, effekt och energi. Just om dessa storheter har allmänheten ofta mycket dunkla föreställningar, som den populärvetenskaplige författaren bör finna angeläget att klargöra, i varje fall inte konservera.

Som en stor förtjänst hos arbetet i alla dess delar bör framhållas, att författaren inte tvekar att ställa läsaren inför visserligen inte särskilt svåra beräkningar av utbyten, energiåtgång o. a. Den lekman, som penetrerar dessa delar av framställningen har förskaffat sig en god förståelse för några av de problem, som möta teknikern och kanske också någon föreställning om hur de bemästras.

Den egentliga framställningen av cellulosametodernas utförande i tekniken avrundas och kompletteras av sidoordnade kapitel, av vilka må nämnas: Provning av slipmassa, Luktfrågan vid sulfatfabrikerna, Biprodukter vid sulfatcellulosafabrikationen, Biprodukter vid sulfitkokningen, Tillverkning av sulfitsprit samt av en detaljerad statistik. Slutligen erbjuda figurer och planscher ett fylligt material för balloptikonvisningar vid genomgången av cellulosaindustrien. Arbetet kan anbefallas för såväl lärjunge- som institutionsbiblioteken.

G. Starck.

Gradualavhandling.[1]

Börje Steenberg, *Adsorption and Exchange of Ions on Activated Charcoal.* Uppsala 1944, 193 s. — Disp. vid Stockholms Högskola den 2 dec. 1944. Opponenter: docent Cyrill Brosset och fil. lic. Stig Claesson.

Äldre iakttagelser rörande adsorptionen av elektrolyter på aktiva kol äro till antalet många, men ha icke givit ens kvalitativt likartade resultat. Det är känt framförallt genom Millers och Kings undersökningar att askhalten, aktiveringstemperaturen och avkylningssättet har en avgörande betydelse för kolets egenskaper. Förf. ger en framställning av tidigare teorier rörande elektrolytadsorption på aktivt kol, och visar att ingen av dessa teorier kan förklara samtliga iakttagna fenomen.

Författaren begränsar sig till studiet av elektrolytadsorptionen på sådana askfattiga kol, som framställts ur organiskt material genom s. k. gasaktivering vid ca 800°C och som kylts utan närvaro av syre (s. k. H-kol). Dylika kol förmå i motsats till andra kol icke adsorbera alkalihydroxider ur vattenlösningar, men väl mineralsyror. Salter adsorberas hydrolytiskt, d. v. s. under förändring av lösningens pH. Lösningar av oorganiska alkalisalter bliva allt mer alkaliska vid behandling med kolet, ju högre koncentrationen av saltet är. Lösningar av organiska alkalisalter med stora organiska joner bliva vid kolbehandling alkaliska, då utgångskoncentrationen är liten, men lösningens alkalitet avtar med stigande koncentration av saltet. Lösningar av salter av organiska baser bliva först sura, men vid stigande koncentration av saltet småningom neutrala.

Förf. visar att adsorptionen av elektrolyter på H-kol är en långsam process, som emellertid så småningom uppnår ett termodynamiskt jämviktstillstånd. Genom undersökningar av den samtidiga adsorptionen av icke-elektrolyter och starka elektrolyter gör förf. troligt, att de krafter som binda elektrolyterna vid kolet äro av samma slag som de, som äro verksamma vid adsorptionen av icke-elektrolyter (s. k. van der Waals-krafter). Detta visas därigenom att adsorberade elektrolyter kunna förträngas med icke-elektrolyter på H-kol. Särskilt intressant är att detta lyckas även när icke-elektrolyten är en vätska, icke blandbar med vatten, i vilken elektrolyten är löslig.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Med ledning av dessa experiment uppställer förf. en arbetshypotes rörande en orienterad adsorption av elektrolyter på H-kol. Det antages att ur en lösning av en stark elektrolyt innehållande en organisk och en oorganisk jon, den organiska jonen adsorberas primärt, d. v. s. med van der Waals-krafter, medan den oorganiska jonen adsorberas sekundärt, d. v. s. denna jon antages bunden huvudsakligen av elektrostatiska krafter vid den primärt adsorberade jonen. Ur dessa antaganden följer, att det skall vara möjligt att byta ut en sekundärt adsorberad jon mot en annan sekundärt adsorberbar jon med samma tecken. Förf. visar att det är möjligt att tillämpa Donnan-teorin på ett system bestående av en lösning av en elektrolyt och H-kol. Teorins användbarhet prövas genom experiment med pikrinsyra, metylenblåklorid, mineralsyror m. fl. substanser. Undersökningarna ha visat, att efter adsorption av en elektrolyt på ett H-kol detta förhåller sig som en jonoid. Beroende på om elektrolytens katjon eller anjon adsorberas primärt erhålles en anjon- eller en katjonväxlare. Primärt adsorberbara visa sig alla större organiska joner vara, oavsett deras tecken.

En kvalitativ teori rörande salters hydrolytiska adsorption på H-kol framlägges, vilken ansluter sig till den s. k. Donnanhydrolysens teori.

Undersökningarna omfatta slutligen adsorptionen ur blandningar av flera elektrolyter. Det visas att mängden primärt adsorberad vätejon minskas genom närvaron av organiska joner, oavsett deras tecken. Å andra sidan ökar adsorptionen såväl av vätejoner som organiska joner genom närvaron av salter i lösningen. Är den primärt adsorberade jonen negativt laddad är endast arten av saltets katjon av betydelse för denna effekt. Omvänt gäller för adsorptionen av katjoner, att endast de negativa jonerna hos saltet ha inverkan på resultatet. Katjonernas effekt är beroende huvudsakligen av deras valens. Anjonernas inverkan följer den s. k. Hofmeisterska serien. Med utgångspunkt från liknande grundsatser som ovan har en teori för denna salteffekt uppställts, vilken teori även prövas kvantitativt.

De experimentella resultaten av föreliggande undersökning uppvisa en slående parallellism mellan elektrolytadsorption på H-kol och elektrolytadsorption vid en vatten/luft-yta.

Föredrag under hösten 1944 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Lunds Matematiska Sällskap, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. B. Holmberg.

Föredrag: prof. Marcel Riesz, Om olika medelvärden (24/10); pol. mag. M. Weibull, Om normalkurvan i matematisk statistik (8/12).

Kemiska Föreningen, ordf. docent K. J. Karrman, sekr. amanuens Torsten Nilsson.

Föredrag: fil. dr K. E. Thomé, Några minnesord över prof. B. Platon (11/10); prof. L. Smith, Försök med rörliga kalorimeterbomber (11/10); docent K. J. Karrman, Reten, ett inhemskt aromatiskt kolväte (11/10); prof. L. Tiganik, Über die chemische Industrie in Estland (3/11); prof. L. Smith, »Från Biskopsgatan till Helgonavägen», Kemi och kemister i Lund under ett sekel (15/12).

Föreningen i Lund för matem.-naturv. undervisning, ordf. rektor P. G. Persson, sekr. lektor O. Lundquist.

Föredrag: fil. lic. Å. Nilsson, Uppsala, Elektronmikroskopet (19/11); fil. lic. E. Mohrén, Lund, Geologiska undersökningar i sydvästra Skåne: Borrningarna vid Höllviken (19/11).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Hilding.

Föredrag: fil. lic. S. Hilding, Srinivasa Ramanujan, en modern talkonstnär (6/11).

Föreningen för matem.-naturv. undervisning se *28*, s. 39.

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. Lindh, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Föredrag av civilingenjörerna S. Dahlstedt och A. Holtzberg, Om ljudfilm. Visning av Agas och Aga-Baltics utställning (Lidingö) jämte demonstration av ljudfilmsteknisk apparatur (20/10).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Hulthén, sekr. fil. lic. N. Svartholm.

Föredrag: prof. O. Klein, Några synpunkter rörande den kosmiska strålningens ursprung (9/10); prof. Jarl Wasastjerna, Röntgenometriska undersökningar över alkali-halogenkristaller (27/10).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén.

Föredrag: amanuens Gunnar Östergren, Lund, Mitosgifter (7/11); laborator E. Adler, Syntes av nya östrogena substanser (28/11).

Biokemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. dr phil. Lucie Ahlström.

Föredrag: prof. Georg v. Hevesy, Några undersökningar om röntgenstrålars inverkan på vävnader (21/11).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. docent S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: docent H. Bergström, Sannolikhetskalkylens centrala gränsvärdesats (23/11); prof. L. Ahlfors, Helsingfors, Elementär kombinatorisk topologi (12/12).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent S. v. Friesen, v. ordf. docent P. Ohlin.

Föredrag: prof. G. Hägg, Röntgenmikroskopet (1/11).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. I. Jullander.

Föredrag: prof. E. Hammarsten, Försök till bestämning av sammansatta nukleotider i organ (13/10); Demonstration av Münchens bryggerier i Stockholm under ledning av ing. E. Sandegren och demonstration av forskningslaboratoriet LKB vid Alvik under ledning av docent S. Brohult (6/11).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1944: 11—12, 1945: 1.

Ur innehållet: O. Samuelson, Om konstitutionen hos Grahams salt; A. Parts, Some Remarks on the Gay-Lussac-Joule Experiment; U. Vartiovaara, m. fl., Über die Verwendung der naturgemässen Bikarbonatpufferung bei der Züchtung von zellulosezersetzenden Darmbakterien; G. Holst, Über die Reaktion von Chlorat und Schwefeldioxyd in schwefelsaurer Lösung; A. I. Virtanen and O. A. Koistinen, Fermentation of the native cellulose and pentosanes in wood; K. Myrbäck and I. Vallin, Vitamin B_1 in der Presshefe: Über Atmung und Gärung der Hefe; A. Ölander, The Calculation of Reaction Constants in Reversible Reactions; A.-G. Hybbinette, Determination of Manganese and Zinc in Cobalt and Nickel Compounds; K. J. Karrman, Retene Investigations II; E. Larsson, Über 4-Methyl-thiophanon-(3); O. Samuelson, Eine amperometrische Untersuchung der Kinetik der Verseifung von Vinylacetat.

IVA, 1944: 4—6.

Ur innehållet: Konduktometrien som analytiskt hjälpmedel; Tekniskt-vetenskaplig forskning i USA; Erfarenheter gjorda vid användning av mikroklimatografer; Bidrag till mätmetodiken med stålstavar för impulsströmmar; Die durch innere Reibung und Wärmeleitung verursachte Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten.

ERA, 1944: 9—12, 1945: 1—2.

Ur innehållet: Electrical Living in 194x; Reproduktionskonsten — en stor avnämare av tekniskt ljus; Krisens ledningar — och fredens; Erfarenheter av 1939 års säkerhetsföreskrifter; Elektriskt i England; Elektrisk bostadsuppvärmning; Elnyheter.

Ljuskultur, 1944: 2—4.

Ur innehållet: Åtvidabergshusets belysning; En belysningsundersökning i ett stockholmsläroverk; Nyheter inom lysrörsområdet; Kvantitativ behandling av Purkinje-fenomenet; Den ultravioletta strålningens fysiologiska verkningar; Bestämning av transmissionsförmågan hos signalglas; Beräkning av verkningsgrad och ljusflödesfördelning.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København, 1944: 4, 1945: 1.

Ur innehållet: B. Strömgren, De astronomiske Kikkerters Udviklingshistorie; O. Hesselberg, Solformørkelsen 1945 Juli 9; E. Strömgren, Astronomi i Skolen; K. A. Thernøe, Gegenschein.

Norsk populær-astronomisk Tidsskrift, Oslo 1944: 1—4.

Ur innehållet: H. WERGELAND, Energikilder i stjernenes indre; J. V. GARWICK, Optikk for amatører; C. SOLBERG, Cassiopeia, Store Bjørn, Orion, Svanen; I. RUUD, Marskanalenes problem; J. V. GARWICK, Småplanetene; K. H. STORHOUG, Hvor blir det av de største meteorittene?; O. HERFJORD, Litt om montering av speilkikkerter; S. STORAKER, Den Alexandrinske astronomi; J. V. GARWICK, Motordrevne kikkerter for amatører.

Fysisk Tidsskrift, København 1944: 4—6.

Ur innehållet: K. HØJENDAHL, Evne og Fylde; C. B. MADSEN, Fysik og Røntgenbehandling; V. THORSEN, Om Teorien for de tvungne Svingninger. Häfte 6 ägnas helt åt Ole Rømer.

Naturens Verden, København, 1944: 8.

Ur innehållet: B. STRÖMGREN, Ole Rømer som Astronom; M. PIHL, Ole Rømers videnskabelige Liv.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo, 1944: 4.

Ur innehållet: C. STØRMER, Et tallteoretisk problem; J. O. STUBBAN, Om det aritmetiske og geometriske middel.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, 1944: 4.

Ur innehållet: E. HØILAND, Ludwig Boltzmann; E. A. HYLLERAAS, Nobelpristagere i fysikk: G. Lippmann; M. PIHL, Ole Rømers liv; M. PIHL, Ole Rømers Opdagelse af Lysets Tøven; A. K. BRYNILDSEN, En likevektsreaksjon som kan følges titrimetrisk i en skoletime; BJ. BJERKE, Kjøleskapets fysikk.

Naturen, Bergen, 1944: 11—12, 1945: 1.

Ur innehållet: J. TORGERSEN, En hjernefysiologisk studie over Leonardo da Vinci; K. LANGLO, Omkring barometrets 300 års jubileum; TH. HESSELBERG, Klimavariasjoner i Norge i vår tid; T. BRAARUD, Skumrandfenomenet.

Uppsatser av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll i följande tidskrifter under 1944.

Tidning för Sveriges läroverk, C. E. SJÖSTEDT, Studentskrivningarna i matematik (nr 2); A. WAHLGREN, Realgymnasiets matematikkurser (nr 3); B. GUSTAVER, Kemien i realskolan (nr 4 och 6); H. ERIKSSON, Kemiundervisningen i realskolan (nr 5); ELSA LINDBERG, Skolan och dess geometriundervisning (nr 8).

Folkskollärarnas tidning, F. NORDSTRÖM, Ur räkneundervisningens metodik (nr 15—16); S. MALMQVIST, Räkneundervisningen i B 3-skolan (nr 40); S. JONSSON, Riktig svenska i matematiken (nr 20); O. MELLQVIST, Experiment med vattenluftpumpen (nr 37 och 40).

Svensk lärartidning, B. GUSTAVER, Fysiken och kemien i folkskolan (sid. 247).

Skola och hem, Helsingfors 1944 (årg. VII): 1—4. G. TEGENGREN, Provet i matematik vid studentexamen våren 1944.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja, Helsingfors 1944 (årg. 8): 1—4. Uppsats på svenska: T. LINDBLAD, Korrelationsundersökningar beträffande betygsvitsord.

Syn og Segn, Oslo, 1944 (50. Årg.): 1—10. H. FROGNER, Regnbogen; H. VIKSJØ, Lufta i skulerom og andre rom; H. VIKSJØ, Vektmålet vårt og relativitetsteorien.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1376) *Visa, att i varje triangel är* $27Rr \leqq 2p^2$.

Gösta Danielsson.

1377) *Om fyra av sidorna i en femhörning äro parallella med var sin av diagonalerna, äro den återstående sidan och den återstående diagonalen parallella. Visa detta och konstruera en sådan femhörning, då tre hörn äro givna.* *X.*

1378) *I triangeln ABC är avståndet mellan höjdernas skärningspunkt och den omskrivna cirkelns medelpunkt* $= d$. *Visa, att* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 9R^2$. *R. Ingre.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1379 Lös ekv. $4 \cos x \cos 5x = 1$.

Svar: $\pm 15° + n \cdot 90°$; $\pm 60° + n \cdot 180°$.

1380) Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidan BC i D. Beräkna $\cos \frac{B}{2} : \cos \frac{C}{2}$, då $\sin \angle BAD : \sin \angle DAC = f$.

Svar: $\sqrt{f}$.

1381) Man drager linjer parallella med sidorna $a = 25$ cm, $b = 39$ cm, $c = 40$ cm i en triangel på avstånden 1, 9, 14 cm resp., alla utanför triangeln. De så dragna linjerna avgränsa en triangel. Beräkna dess yta.

Svar: 1872 cm^2.

1382) En parallellogram, där vinkeln mellan diagonalerna är A, delas av dessa i fyra trianglar. Kring var och en omskrives en cirkel. Cirklarnas medelpunkter bilda hörnpunkterna i en parallellogram. Visa, att förhållandet mellan parallellogrammernas ytor är $2 \sin^2 A$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1379—1381, 1386—1388 äro insända av *X*, 1382—1385, 1389 av *R. Ingre.*

Tillägg till dec.häftet 1944, s. 243: *T. Lundvall* hade insänt lösningar till 1331 och 1333, *E. Smn.* till 1333.

1383) Vinkeln mellan bissektrisen till vinkeln $2A$ i en triangel och höjden från samma vinkels spets är α. Förhållandet mellan de omskrivna och inskrivna cirklarnas radier är n. Visa, att $2n \sin A (\cos \alpha - \sin A) = 1$.

1384) I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Den omskrivna cirkelns centrum är O. Visa, att $R^3 = HA \cdot HB \cdot HC + R \cdot \overline{HO}^2$.

1385) Två kordor i en cirkel, vars radie är r, skära varandra under räta vinklar i punkten P på avståndet d från medelpunkten. Tangenterna i kordornas ändpunkter bilda en fyrhörning. Visa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen och att diagonalerna råkas i P. Beräkna även den omskrivna cirkelns radie.

Svar: $\dfrac{r^2\sqrt{2r^2 - d^2}}{r^2 - d^2}$.

1386) Mätetalen för volym, total yta och den inskrivna sfärens radie för ett klot, en liksidig cylinder och en liksidig kon äro V_1, V_2, V_3; Y_1, Y_2, Y_3; r_1, r_2, r_3 resp. Om talen i en trippel bilda en geometrisk serie, gäller detta även för de bägge andra. Specialfall: De senare kropparna äro båda omskrivna kring klotet eller båda inskrivna däri.

1387) En tangent till kurvan $9x^2y = 4$ bildar med koordinataxlarna en rätvinklig triangel, som tänkes rotera kring y-axeln. Beräkna den alstrade konens volym.

Svar: π.

1388) AA_1, BB_1, CC_1 äro sidokanterna i ett godtyckligt tresidigt prisma, vars basytor ABC och $A_1B_1C_1$ antagas vågräta. En rät linje utgår från läget AB och rör sig sedan horisontellt genom prismat, varvid den glider längs AB_1 och BC_1, så att den slutar i läget B_1C_1. Sök förhållandet mellan volymerna av de delar, vari prismat delas av den yta, som linjen alstrar.

Svar: 1 : 5.

1389) Visa, att om de gemensamma tangenterna till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ och parabeln $y^2 = 2px$ bilda rät vinkel, så sammanfaller parabelns brännpunkt med en av brännpunkterna till hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Lösn. till uppg. 1346—1348.

1346) *Man bildar punktföljden A_0, A_1, A_2 sålunda: A_0, A_1, A_2 äro hörnen i en rätvinklig triangel med hypotenusan A_0A_1; i fortsättningen är A_{n+1} fotpunkten för normalen mot $A_{n-2}A_{n-1}$ från A_n. Visa, att den punkt P, mot vilken A_n tenderar, ligger där den linje,*

som förenar A_1 med det fjärde hörnet Q i rektangeln $A_0A_3A_2Q$, skär cirkeln $A_0A_3A_2Q$ för andra gången. *F. Ehrnst.*

Trianglarna $T_0 : A_0A_1A_2$, $T_1 : A_1A_2A_3$ ... äro alla likformiga; längdskalan är omväxlande $\sin v$ och $\cos v$, där $v = \angle A_2A_0A_1$, alltså ständigt < 1. Alla sidor i T_n tendera därför mot 0 med växande n. Enär ingen triangel, som följer efter T_n, skjuter ut ur T_n, följer existensen av en gränspunkt för punktföljden $A_0, A_1 \ldots$. Trianglarna T_0, T_2, T_4 ... ha samma omloppsriktning. Höjden i T_{2n} är hypotenusa i T_{2n+2}; A_{2n}, A_{2n+1}, A_{2n+2} äro homologa med A_{2n+2}, A_{2n+3}, A_{2n+4} resp. Drag nu A_0A_4 och fäll normalen A_2P mot denna linje. En likställighetstransformation med P som centrum i skalan $A_2P : A_0P = A_4P : A_2P = A_2A_4 : A_0A_2 = \sin v \cos v$ åtföljd av en vridning på 90° kring P så, att $A_0 \to A_2$, överför A_2 i A_4 och A_1 i en punkt X, så att T_2 och A_2A_4X äro kongruenta med samma omloppsriktning. Alltså sammanfaller X med A_3 och $\angle A_1PA_3 = 90°$. Därför går A_1P genom den punkt Q som är diametralt motsatt till A_3 på cirkeln $A_0A_3PA_2Q$. Samma transformation överför T_2 i T_4, T_4 i T_6 o. s. v., så att T_n med växande n obegränsat sammandrager sig till P, som är den sökta gränspunkten. Det följer vidare, att A_0, A_4, A_8 ... och A_2, A_6, A_{10} ... ligga på var sin av två vinkelräta linjer genom P. Detsamma gäller om A_1, A_5 ... och A_3, A_7 ..., ty resonemanget kan starta lika bra från A_1 som från A_0. *X.*

Även löst av *Hg., E. R. Levanto, E. Smn, B. Svenonius, L. Sandgren, T. Lundvall.*

1347) *Fyra sfärer tangera ett plan och varandra utantill. Om planets tangeringspunkter behållas, i vilket förhållande skola sfärernas radier ändras, för att sfärerna skola råkas i en och samma punkt?* *N. J.*

Kalla de givna sfärernas radier r_1, r_2 etc. och det sökta förhållandet k. Kanterna till den tetraeder, som har sfärernas medelpunkter till hörn, äro då före ändringen $r_1 + r_2$ etc. Motsvarande kanter efter ändringen betecknas med l_1, l_2 etc.

Ur de parallelltrapets, vars hörn ligga i två angränsande klots tangeringspunkter i det givna fasta planet och i klotens medelpunkter beräknas l_1, l_2 o. s. v. Pytagoras' sats ger före ändringen $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + z^2$ och efter ändringen $l_1^2 = k^2(r_1 - r_2)^2 + z^2$. Här betyder z projektionen av $r_1 + r_2$ (eller l_1) på det fasta planet. Elimination av z och förenkling ger $l_1^2 = k^2(r_1 - r_2)^2 + 4r_1r_2$.

Användes nu cosinusteoremet på den triangel, som bildas av de fyra sfärernas gemensamma skärningspunkt och medelpunk-

terna av sfärerna med radier kr_1 och kr_2, erhålles

$$k^2(r_1 - r_2)^2 + 4r_1r_2 = k^2r_1^2 + k^2r_2^2 - 2k^2r_1r_2\cos v_1.$$

Här betyder v_1 vinkeln mellan kr_1 och kr_2 i denna triangel. Ekvationen förenklas till $2 = k^2 - k^2\cos v_1$, d. v. s. v_1 är oberoende av r_1 och r_2. Följaktligen erhålles samma värde på alla de sex vinklar, som ha spetsen i sfärernas gemensamma skärningspunkt. Dessa vinklars storlek erhålles lätt, t. ex. med hjälp av medelpunkten i en reguljär tetraeder. Man får $\cos v_1 = -\frac{1}{3}$, varav $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Svenonius & Sandgren.

1348) *En cirkel tangerar en given liksidig hyperbel och går genom dess centrum. Sök orten för cirkelns medelpunkt.* *X.*

Om hyperbelns ekvation är $xy = 1$ och cirkelns $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$, erhålles genom elimination av y ekv. $x^4 - 2\alpha x^3 - 2\beta x + 1 = 0$ (1). Det gäller att undersöka, när (1) har dubbelrot. Om rötterna äro x_1, x_2, x_3, x_4, införa vi $z_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $z_2 = x_1x_3 + x_4x_2$, $z_3 = x_1x_4 + x_2x_3$. Villkoret $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2 = 0$, (2) som uttrycker, att dubbelrot föreligger, kan även skrivas $(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2 = 0$. Om vänstra ledet av (1) omformas till $(x^2 - \alpha x + t)^2 - (px + q)^2 = 0$, där $-(px + q)^2 \equiv -(\alpha^2 + 2t)x^2 + 2(\alpha t - \beta)x + 1 - t^2$, måste $(\alpha t - \beta)^2 + (1 - t^2)(\alpha^2 + 2t) = 0$ d. v. s. $t^3 + (\alpha\beta - 1)t - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0$. (3) Å andra sidan är $t = \frac{z_1}{2}$ eller $\frac{z_2}{2}$ eller $\frac{z_3}{2}$, ty (1) kan skrivas $(x^2 - \alpha x + t + px + q)(x^2 - \alpha x + t - px - q) = 0$. Rötterna till (3) äro alltså proportionella mot z_1, z_2, z_3 och villkoret (2) är ekvivalent med att (3) har dubbelrot m. a. o. $-4(\alpha\beta - 1)^3 - 27\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 = 0$ eller $16(\alpha\beta - 1)^3 + 27(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0$. Orten är alltså kurvan $16(xy - 1)^3 + 27(x^2 + y^2)^2 = 0$. *X.*

Även löst av *Hg., L. Sandgren, B. Svenonius.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1945.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. $ABCD$ är en kvadrat med sidan a längdenheter. På sidan BC är en punkt E så belägen, att $BE : EC = 1 : 3$. Bissektrisen till vinkeln ADE råkar AB i F. Bestäm längden av AF.
2. I en triangel förhålla sig två sidor som 9 : 13. Den tredje sidan är lika lång som den mot densamma dragna medianen. Beräkna triangelns största vinkel.
3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0. \end{cases}$$

4. I triangeln ABC är $AB = 6$ cm, $AC = 13$ cm och vinkeln $A = 41{,}41°$. På sidan AC är en punkt D så belägen, att BD är medelproportional till AD och DC. Beräkna BD och vinkeln ABD i de båda fall, som äro möjliga.
5. Kring en cirkel med 2,5 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ omskriven. AB är 4 cm och CD 7 cm. Beräkna fyrhörningens yta.
6. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Vinkeln B är 60°, sidan AB förhåller sig till sidan BC som 3 : 2, och punkten D delar bågen AC mitt itu. I vilket förhållande delas diagonalen BD av diagonalen AC?
7. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 1. De övriga termerna utgöras av bråk, som icke kunna förkortas. Seriens första term bildar tillsammans med täljarna i de följande termerna en geometrisk serie med kvoten 2 och tillsammans med nämnarna en annan geometrisk serie. Vilken är den förstnämnda serien, om dess summa är $4\frac{1}{2}$ gånger så stor som dess kvot?
8. Bestäm konstanterna a, b och c i funktionen $y = ax^2 + bx + c$, så att punkterna (1; —1), (0; —1) och (—2; 0) komma att ligga på den motsvarande kurvan. Konstruera därefter kurvan samt ange med tillhjälp av diagrammet eller på annat sätt, när funktionen är positiv respektive negativ, när den är växande respektive avtagande samt när den antar sitt minsta värde. Ange även funktionens minimivärde med två säkra decimaler.

Resultat: **1.** $\frac{a}{2}$. **2.** 86,18°. **3.**

x	0	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$
y	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{2}$

4. $BD = 4{,}690$ cm och $\angle ABD = 16{,}40°$ eller $BD = 6{,}000$ cm och $\angle ABD = 97{,}18°$. **5.** 27,5 cm². **6.** 18 : 7. **7.** 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ ... (observera villkoret »bråk, som icke kunna förkortas»). **8.** $a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{1}{6}$; $c = -1$. Funktionen är negativ för $-2 < x < 3$ och positiv för övriga x-värden, den avtager för $x < \frac{1}{2}$ och växer för $x > \frac{1}{2}$ och har sitt minsta värde $= -1{,}04$ för $x = \frac{1}{2}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. I en geometrisk serie med reella termer är summan av de två första termerna 16 och summan av de fyra följande 5. Vilken är serien?
2. I en regelbunden fyrsidig pyramid, i vilken alla kantlinjer äro a längdenheter, inskrives en kub, så att en av dess begränsningsytor ligger i pyramidens basyta och fyra av dess hörn på var sin av pyramidens sidokanter. I den därvid bildade topppyramiden inskrives på samma sätt en ny kub. Genom upprepning av detta förfaringssätt erhåller man slutligen en oändlig serie kuber. Beräkna förhållandet mellan dessa kubers sammanlagda volym och den ursprungliga pyramidens volym. Förhållandet skall anges dels exakt, dels approximativt med tre säkra decimaler.
3. Beräkna förhållandet mellan sidorna i en likbent triangel, i vilken det kortaste avståndet från basens ena ändpunkt till den inskrivna cirkelns periferi är en fjärdedel av triangelns bas.
4. De räta linjerna $y = 2x + 3$ och $y = 2x + 1$ skäras av en tredje rät linje, av vilken den del, som ligger mellan de båda förra linjerna, är 5 längdenheter. Bestäm vinkelkoefficienten för den tredje linjen.
5. I en triangel ABC är sidan $AB = 3$ cm, medianen från $A = 4$ cm och vinkeln $B = 73{,}90°$. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar.
6. Sök längden av den minsta korda, som genom punkten (1; 5) kan dragas i kurvan $4y = x^2$.

7. Till ekvationen $8\cos 2x + \sin 2x = 7$ äro x_1 och x_2 två olika rötter, vilkas skillnad icke är en heltalsmultipel av 180°. Bestäm i exakt form det eller de värden, som $\cos(x_1 + x_2)$ kan antaga.
8. En kropp består av en rät cirkulär cylinder och ett halvklot, vars plana begränsningsyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Den sammansatta kroppens totala begränsningsyta är $5\pi a^2$, där a är en konstant. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur den sammansatta kroppens volym varierar, då halvklotets radie ändras. Ange särskilt det värde på radien, för vilket volymen blir så stor som möjligt.

Resultat: **1.** 32, -16, 8, -4, 2, -1 eller $\frac{32}{3}, \frac{16}{3}, \ldots, \frac{1}{3}$. **2.** $\frac{15 - 9\sqrt{2}}{7} = 0{,}325$. **3.** 25 : 25 : 14. **4.** $1\frac{1}{3}$ eller $3\frac{3}{7}$. **5.** $a = 7{,}211$ cm; $b = 6{,}998$ cm; $A = 81{,}78°$; $C = 24{,}32°$. **6.** Om $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ äro skärningspunkterna mellan kordan $y - 5 = k(x - 4)$ och kurvan $y = \frac{x^2}{4}$, erhålles genom elimination av y ekv. $\frac{x^2}{4} - 5 = k(x - 4)$ och ur denna $x_1 - x_2 = \pm 2\sqrt{4k^2 - 16k + 20}$. Emedan $y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$ blir $l^2 = (1 + k^2)(x_1 - x_2)^2$, där l är kordans längd. Härav erhålles $l_{\min} = 8$ längdenh. för $k = 1$. **7.** Man får $\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 = \frac{2}{15}$ och $\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{15}$, varav $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{1}{8}$; $\because \cos(x_1 + x_2) = \pm\frac{8}{\sqrt{65}}$. **8.** Volymen växer från 0, då $r = 0$, till maximivärdet $\frac{5\pi a^3}{3}$ för $r = a$ och avtar sedan till $\frac{10\pi a^3\sqrt{15}}{27}$, då $r = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. I en ellips sammanbindes en parameters ena ändpunkt P med storaxelns ändpunkter A och B. Vinkeln APB är 105°. Bestäm ellipsens excentricitet.
2. En punkt P på kurvan $y = 1 - (x - 1)^2$ sammanbindes med punkten A (1; 1), och sammanbindningslinjen AP förlänges över P till en punkt Q, så att $PQ = \frac{1}{2}AP$. Då punkten P genomlöper den givna kurvan, kommer punkten Q att beskriva en annan kurva. Sök dennas ekvation och konstruera kurvan.
3. I en given cirkel med radien r har man inskrivit en rektangel $ABCD$. Mittpunkten P på den mindre av cirkelbågarna AB sam-

manbindes med A och B, och mittpunkten Q på den mindre av cirkelbågarna CD sammanbindes med C och D. Man får på detta sätt en i cirkeln inskriven sexhörning $APBCQD$. Mellan vilka gränser kan sexhörningens omkrets variera, då rektangelns form ändras?

4. Funktionskurvan $y = \frac{3x^2}{4x-16}$ är en hyperbel. Konstruera densamma, och bestäm det exakta värdet på dess excentricitet.
5. I en punkt på kurvan $y = x^3 - x$ drages tangenten till kurvan. Denna träffar kurvan i ytterligare en punkt, i vilken tangenten drages. Beräkna det största värdet på den spetsiga vinkeln mellan de båda tangenterna.
6. Konstruera kurvan $y = 2x + \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ med angivande av eventuella maxima, minima, asymptoter och inflexionspunkter.
7. Normalerna i två punkter, A och B, på en parabel skära varandra i en punkt C på parabeln. Visa, att den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln går genom parabelns vertex.

Resultat: **1.** $\sqrt{3}-1$. **2.** $y = 1 - \frac{2}{3}(x-1)^3$. **3.** Omkretsen varierar från $4r$ över maximum $6r$ till $4r\sqrt{2}$. **4.** Funktionen har max. i $(0;\ 0)$ och min. i $(8;\ 12)$. Asymptoter äro $x = 4$ och $y = \frac{3}{4}x + 3$, som med varandra bilda vinkeln v. Man får $\operatorname{tg} v = \frac{4}{3}$; $\because \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{1}{2}$ och $\cos\frac{v}{2} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **5.** 77,65°. **6.** Man bestämmer först asymptoterna: $x = \pm\sqrt{3}$ och $y = 2x$ och finner, att kurvan överallt ligger ovanför den senare och att inga punkter finnas mellan de förra ($x^2 > 3$). Därav framgå kurvgrenarnas lägen. Andra derivatan beräknas och befinnes vara ständigt positiv (inga inflex.punkter). Först härefter undersökes $(y' =) 2 - \frac{x}{(x^2-3)^{3/2}} = 0$. Den föreg. undersökningen underlättar den *oundvikliga gissningen* av en rot, $x = 2$; den ger $y_{\min} = 5$. **7.** Parabeln är $y^2 = 4ax$, O är origo. Om vinkelkoeff. för AC och AB äro k_1 och k_2, bli vinkelkoeff. för OA och OB $-\frac{2}{k_1}$ och $-\frac{2}{k_2}$. Man visar, att $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$. Normalens ekv. är $y = kx - 2ak - ak^3$ eller $ak^3 + 2ak - kx + y = 0$. Genom en punkt $(x;\ y)$ gå tre normaler, för vilka gäller, att $k_1k_2k_3 = \frac{y}{a}$; men $k_3 = -\frac{y}{2a}$; $\because k_1k_2 = 2$ o. s. v.; se även detta häfte s. 32.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 2 och 5—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En kula, som väger 50 g, kastas mot en vertikal vägg från en punkt på 300 cm avstånd från väggen. Kulan träffar väggen vinkelrätt på 200 cm höjd över horisontalplanet genom utgångspunkten, studsar och råkar åter det nämnda horisontalplanet 100 cm från väggen. Beräkna den av stöten mot väggen orsakade minskningen i kulans energi, uttryckt i erg. Luftmotståndet försummas.
2. En trådrulle har kommit in under en möbel. Trådrullens ändytor äro cirkulära med diametern 3,0 cm, och den innehåller så mycket tråd, att de yttersta varven ha diametern 2,4 cm. Någon har fått fatt i den fria trådändan och försöker få fram trådrullen genom att draga i trådändan. Trådändan löper in på trådrullens undersida; den ligger i rullens mot axeln vinkelräta symmetriplan och bildar en viss vinkel med det horisontella golvet. Angiv, inom vilka gränser denna vinkel måste ligga, för att trådrullen vid dragningen skall närma sig till den dragande.
3. Genom ett rör inmatas en jämn vattenstråle i en ångpanna, i vilken övertrycket antages vara konstant lika med 12 kgf/cm^2. Matningspumpen drives med en elmotor på 5 hästkrafter, varav 80 % kommer pumpningsarbetet till godo. Huru lång tid tar det att mata in 1 m^3 vatten i ångpannan? Man bortser från det arbete, som erfordras för vattnets transport i höjdled. Vattenstrålens diameter får antagas vara 6 cm.
4. Vid ett laborationsförsök ville man bestämma specifika värmet för fotogen. Därvid använde man en termosflaska, försedd med omrörare, termometer och elektrisk uppvärmningsspiral. Spiralens effekt var 19,5 watt. Först hälldes 120 g vatten i termosflaskan, och strömmen slöts i 3 min 20 sek, varvid temperaturen steg från 16,2° till 23,7°. Vattnet utbyttes sedan mot 100 g fotogen, och försöket upprepades. Denna gång var strömmen sluten i 1 min 35 sek, och temperaturen steg från 16,8° till 24,8°. Vilket värde erhölls för specifika värmet för fotogen?
5. En iskristall har formen av ett regelbundet sexsidigt prisma, vars basytor äro vinkelräta mot sidoytorna. En ljusstråle infaller mot en av prismats sidoytor i ett plan, som är vinkelrätt mot denna yta och tillika vinkelrätt mot prismats basytor. Strålen brytes två gånger och lämnar prismat genom ena bas-

ytan under minimideviation. Vilken vinkel bildar den utgående strålen med den infallande? Brytningsindex för is är 1,31.

6. Om den brytande vinkeln i ett prisma är mycket liten, kan den bestämmas med hjälp av en avläsningskikare på följande sätt. Kikarens hårkors, som befinner sig i objektivets fokalplan, belyses genom en särskild anordning. Ljuset från det belysta hårkorset passerar kikarobjektivet och träffar sedan prismat. En del av ljuset reflekteras därvid i den främre prismaytan. En annan del reflekteras i den bakre prismaytan och brytes i den främre vid utträdet ur prismat. Övriga reflexer äro så ljussvaga, att de ej observeras. Prismat injusteras så, att de båda reflekterade strålknippena träffa objektivet, vilket således alstrar två bilder av hårkorset. Slutligen inriktas kikaren så, att den från främre prismaytan kommande reflexen ger en bild, som sammanfaller med hårkorset. Avståndet mellan hårkorset och den andra bilden uppmätes. Vid ett tillfälle, då man använde en kikare med objektivets brännvidd lika med 30 cm, befanns avståndet vara 0,50 mm. Prismats brytningsindex var 1,5; beräkna dess brytande vinkel.

7. Ett ganska stort elektriskt motstånd skall bestämmas. Man har en voltmeter, vars mätområde går till 300 V och vars strömförbrukning vid utslag över hela skalan är 3 mA. Voltmetern anslutes först direkt till ett likströmsnät och visar då 120 V. Sedan anslutes den till samma ledningsnät, kopplad i serie med det obekanta motståndet, varvid den visar 96 V. Beräkna motståndets storlek.

8. En shuntmotor är kopplad till ett likströmsnät på 220 V genom en 125 m lång dubbelledning av koppar. Vardera tråden är 2,5 mm tjock och specifika motståndet 0,017. För att strömrusning icke skall uppstå, då motorn startas, inkopplar man i motorn, i serie med ankarlindningen, ett pådragsmotstånd, som åter urkopplas, sedan motorn kommit i gång. Motståndet skall avpassas så, att strömstyrkan i ankarlindningen vid starten icke överstiger 25 A. Ankarlindningens motstånd är 0,4 Ω och magnetlindningens 100 Ω. Beräkna pådragsmotståndets storlek.

Resultat: 1. 4 905 000 erg. 2. Vinkeln skall ligga mellan $+37°$ och $-37°\left(\cos\eta = \frac{2{,}4}{3{,}0}\right)$; i föreliggande fall kan den undre gränsen sättas $= 0$. Anm. Till momentaxel tages linjen genom rullens kontaktpunkter med golvet. 3. $6\frac{2}{3}$ min. 4. 0,508. 5. 45,74°. 6. 0,032°. 7. 25 000 Ω. 8. 7,47 Ω.

En generalisering av Wilsons sats jämte kongruenser i Pascals triangel.

Av TORE ÖBERG.

a. Wilsons sats lyder som bekant

$$(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}, \tag{1}$$

där p är ett primtal. Samtliga kongruenser i fortsättningen gälla modulen p, varför denna ej utsättes. Nu är

$$\begin{aligned} p-1&\equiv -1\\ p-2&\equiv -2\\ &\cdots\cdots\\ p-a&\equiv -a \end{aligned}$$

$$\therefore (p-1)(p-2)\ \ldots\ (p-a)\equiv a!(-1)^a. \tag{2}$$

Multipliceras (1) med $a!$, erhålles

$$a!(p-1)!\equiv -1\cdot a! \tag{3}$$

Nu kan (3) divideras med (2). Att denna kongruensdivision är tillåten inses omedelbart, om man man tänker på att divisionen med var och en av delfaktorerna för sig är tillåten. Av divisionen följer

$$a!(p-a-1)!\equiv(-1)^{a+1}. \tag{4}$$

Korollarium: Om (1) divideras med (4), fås

$$\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a)}{a!}=\binom{p-1}{a}\equiv(-1)^a,$$

d. v. s. binomialkoefficienterna i utvecklingen av $(x+y)^{p-1}$ ge $+1$ eller -1 i rest vid division med primtalet p.

b. Av (4) följer omedelbart, om $p=2a+1$, att $(a!)^2\equiv(-1)^{a+1}$. Är nu $a=2k$ eller $p=4k+1$, fås $[(2k)!]^2+1\equiv 0$, d. v. s. kongruensen $x^2+1\equiv 0$ har, om $p=4k+1$, lösningen $x=(2k)!$

Är däremot $a=2k+1$ eller $p=4k+3$, fås $[(2k+1)!]^2-1\equiv 0$, d. v. s. $(2k+1)!$ ger vid division med primtalet $4k+3$ resten $+1$ eller -1.

c. Vi utgå från kongruensen

$$\prod_{i=1}^{n}(p-a_i)\equiv(-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i,$$

vars giltighet omedelbart inses, om man sätter $p=0$. Insättes $a_i=q+i$, erhålles

$$\prod_{i=1}^{n}(p-q-i)\equiv(-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}(q+i).$$

Antag, att p är relativt primtal till $n!$ samt att $p>n+q$ och $q\geq 0$. Divideras kongruensen med $n!$, erhålles

$$\binom{p-q-1}{n}\equiv(-1)^n\binom{n+q}{n}. \tag{5}$$

Om p är ett godtyckligt givet primtal, innebär kongruensen följande:

1. Antag, att n är konstant och q varierar. Detta betyder, att vi i Pascals triangel på vardera sidan av ekv. (5) rör oss utefter samma snedrad. (Talen i en sådan snedrad kallas figurtal av ordningen n.) Ekvationen anger alltså kongruenser mellan figurtal av samma ordning.

2. Antag, att n varierar och q är konstant. Detta betyder att vi på vänstra sidan i ekv. (5) rör oss utefter en horisontalrad och på högra sidan efter en snedrad. Ekvationen anger alltså kongruenser mellan å ena sidan binomialkoefficienter av bestämd grad och å andra sidan figurtal av bestämd ordning.

d. Om i ekv. (5) summeras över alla n från 0 till s, där $s=p-q-1$, fås:

$$\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}=\sum_{n=0}^{s}\binom{n+q}{n}(-1)^n.$$

Men nu är enl. en känd sats: $\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}=2^s$

$$\therefore\ 2^s\equiv\sum_{n=0}^{s}\binom{n+q}{n}(-1)^n. \tag{6}$$

Inledning till komplexföreningarnas kemi.

Av G. STARCK.

Om man vid genomgången av metallerna följer det periodiska systemet, är väl koppar den första metall, som bildar komplexföreningar i detta ords trängre bemärkelse. Sedermera möter man komplexa metalljoner hos silver, krom, järn, möjligen talar man också om kobolts, nickels och platinas komplexjoner. Givetvis är det önskvärt att ledsaga genomgången av komplexföreningarna med försök, som göra detta kapitel levande och åskådligt. Jag skall i det följande beskriva några sådana, ganska enkla försök, lämpliga även som laborationsförsök.

Koppar bildar komplexjoner med ammoniak, med vinsyra, cyanjoner m. fl. De ammoniakaliska komplexerna torde vara de enda, som behandlas i skolan — Fehlings lösning användes, men dess komplexkaraktär torde inte vara någon anledning att uppehålla sig vid.

Uppgiften är således närmast att införa begreppet ammoniakalisk kopparjon. Vi göra då följande försök.

Försök 1. Ett provrör fylles med en cirka 1 C $CuSO_4$-lösning,[1] varefter lösningen fördelas ungefär lika på 8 st. provrör. I 4 av provrören utspädes innehållet med vatten till rörets halva volym, i de 4 övriga utspädes på samma sätt med 4 C ammoniak. Man tillsätter nu de vanliga kopparreagenserna enligt nedanstående schema och ifyller resultaten:

	$CuSO_4$	$CuSO_4 + NH_3$
NaOH	Blå fälln. av $Cu(OH)_2$	Ingen fällning
Na_2CO_3	Blå fälln. av Cu-karbonat	» »
Met. järn	Fälln. av koppar	» »
$(NH_4)_2S$	Svart fälln. av CuS	Svart fälln. av CuS

Förutsättning för att försöket skall förlöpa på detta sätt är att ammoniakkoncentrationen är tämligen hög.

[1] 1 C = en koncentration av 1 grammolekyl pr liter.

Av de tre första resultaten att döma innehåller den ammoniakhaltiga lösningen inte kopparjoner. Även lösningens färg är en helt annan än de förut bekanta kopparsaltlösningarnas. Å andra sidan veta vi, att lösningen innehåller koppar. Förklaringen är att koppar i denna lösning bildar en med ammoniak sammansatt »komplex» jon, som vi tillsvidare skriva $[Cu(NH_3)_n]^{+2}$. Hydroxid och karbonat av denna nya jon äro tydligen lösliga i vatten; dess bildning förklarar också, att intet koppar utfälles av järn, eftersom inga kopparjoner finnas i lösningen.

Det fjärde resultatet — med ammoniumsulfid — motsäger de övriga; lösningen innehåller således trots allt kopparjoner, men i mycket ringa koncentration, för liten för att kunna påvisas med okänsliga reagens, tillräckligt stor för att den ytterst svårlösliga kopparsulfiden skall utfalla.

Nästa uppgift blir att bestämma värdet av n i formeln för den ammoniakaliska jonen.

Försök 2. 25 ml 0,1 C $CuCl_2$ eller $CuSO_4$ titreras med NH_3, tills den först bildade fällningen har löst upp sig och lösningen blir fullkomligt klar. Slutpunkten är svår att iakttaga, och det är förspilld möda att försöka arbeta med precision. Vi ha att räkna med ett ganska komplicerat system, för vars tillstånd följande jämvikter äro bestämmande:

$$Cu^{+2} + nNH_3 \rightleftarrows Cu(NH_3)_n^{+2},$$
$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4OH \rightleftarrows NH_4^{+1} + OH^{-1},$$
$$[Cu^{+2}] \cdot [OH^{-1}]^2 = \text{konst.}$$

Det kommer därför alltid att åtgå mera ammoniak än som svarar mot komplexjonens sammansättning för att få en klar, mörkblå lösning. Och det kommer att åtgå proportionsvis mera ammoniak ju mera utspädd denna är. Det bekräftas av följande resultat.

25 ml 0,1 $CuCl_2$ titrerades dels med 0,4 C, dels med 1 C NH_3 till klar lösning. Av den utspädda ammoniaken åtgick 29,5 ml i stället för mot komplexjonens sammansättning svarande 25 ml. Överskottet, 4,5 ml, utgör 18 % av den beräknade mängden. Av den koncentrerade ammoniaken åtgick 10,8 ml i stället för 10,0 ml; överskottet, 0,8 ml, utgör 8 % av den beräknade mängden.

Vid titrering av 0,1 C $CuCl_2$ med 0,1 C NH_3 lyckas det över huvudtaget ej att erhålla en klar komplexlösning även med tillsats av obegränsade mängder NH_3.

Tillvägagångssättet blir därför lämpligen att titrera 25 ml 0,1 C $CuCl_2$ eller $CuSO_4$ med 1 C NH_3 till klar mörkblå lösning. Lösningens klarhet får ej bedömas i genomfallande ljus, utan den måste ses i kraftig sidobelysning, ungefär så som när man demonstrerar

Tyndalleffekten i en kolloid lösning. Den åtgångna ammoniakmängden är 10—11 ml, d. v. s. något större än som motsvarar formeln $Cu(NH_3)_4$. Med den klara, mörkblåa lösningen göras följande försök:

a) Undersök lösningens NH_3-lukt och jämför med styrkan av den till titreringen använda ammoniakens lukt. Jämförelsen visar tydligt, att ammoniak bundits (i komplexen).

b) Som förberedelse till försök c) nedan göres en enkel verifikation av Beers lag på följande sätt. Av en starkt utspädd $KMnO_4$-lösning (cirka 0,001—0,002 C) tagas två lika höga skikt (ungefär 2 cm) i var sitt av två provrör. Provrören hållas bredvid varandra och betraktas i längdaxelns riktning mot en vit bakgrund. Om färgstyrkorna äro lika, förbli de lika även när nu det ena provrörets innehåll successivt utspädes med vatten. Anledningen härtill ha eleverna kunnat se utan handledning: absorptionen är endast beroende av mängden absorberande ämne i det genomlysta skiktet, ej av dettas tjocklek.

c) Då nu motsvarande försök utföres med den genom titrering erhållna Cu-NH_3-lösningen, blir den ena lösningen vid utspädning dels ljussvagare, dels mer och mer blågrön, dels slutligen svagt grumlig (av hydroxid eller hydroxisalt?). Denna avvikelse från Beers lag måste bero på en kemisk förändring som följd av utspädningen. Den ammoniakaliska komplexen är inte absolut stabil utan sönderfaller partiellt, då NH_3-koncentrationen minskas. För att undvika ovannämnda utfällning, som möjligen kan anses störande, kan man före provet försätta den titrerade lösningen med ett litet överskott av NH_3. Av den anti-Beerska effekten kvarstå då endast färgstyrkans minskning och färgnyansens förändring.

Massverkans lag ger för jämvikten

$$Cu^{+2} + 4NH_3 \rightleftarrows Cu(NH_3)_4^{+2} \qquad (1)$$

$$\frac{[Cu^{+2}] \cdot [NH_3]^4}{[Cu(NH_3)_4^{+2}]} = k. \qquad (2)$$

Det inverterade värdet härav betecknades av G. Bodländer, en framstående tysk komplexforskare vid sekelskiftet, som komplexens stabilitetskonstant. Dess värde för speciellt denna komplex har bestämts av fransmannen P. Job till $2 \cdot 10^9$ (16°). Betecknas koncentrationerna av ämnena i formeln (1) i den ordning de uppträda med c_1, c_2 och c_3, ger det ovan anförda exemplet med titrering av 0,1 C $CuCl_2$ med 1 C NH_3, varvid slutvolymen blev 35,8 ml, följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \dfrac{c_3}{c_1 \cdot c_2^4} = 2 \cdot 10^9, \\ c_1 + c_3 = 0{,}07025, \\ c_2 + 4c_3 = 0{,}2928, \end{cases}$$

som satisfieras av

$$c_1 = 0{,}00032; \quad c_2 = 0{,}01808 = 0{,}018; \quad c_3 = 0{,}06993 = 0{,}070.$$

Vid insättning i jämviktsekvationen (2) erhåller man

$$1/k = 2{,}05 \cdot 10^9.$$

Vid titreringens slutpunkt kan lösningen anses just mättad i avseende på $Cu(OH)_2$, och c_1 utgör då Cu-jonkoncentrationen i en mättad $Cu(OH)_2$-lösning. Om vi tillåta oss att betrakta OH-jonkoncentrationerna vid titreringarnas slut såsom tillnärmelsevis konstanta (eftersom alltid större delen av ammoniaken är komplexbunden), så är vid titreringarnas slutpunkt även $[Cu^{+2}] = c_1$ konstant och lika med den koncentration, varmed Cu^{+2} i rent vatten ingår i kopparhydroxidens löslighetsprodukt. Då nu kopparhydroxidens löslig-

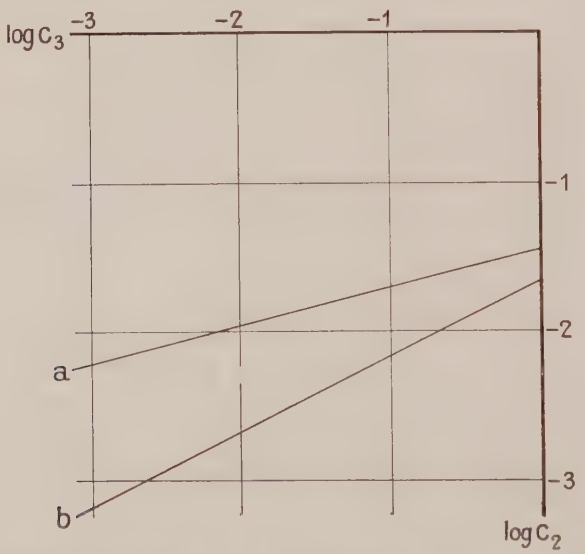


Fig. 1. Koncentrationen c_3 av komplexjonen $[Cu(NH_3)_4]$, (kurva *a*), resp. $[Ag(NH_3)_2]$ (kurva *b*) mot koncentrationen c_2 av fri ammoniak vid titreringens slutpunkt, båda i logaritmisk framställning.

het är obekant, använder jag ovanstående värde på $c_1 = 0{,}00032$ [1] och erhåller

$$\frac{c_3}{c_2^4} = 6{,}4 \cdot 10^5 \text{ eller } c_2^4 = 1{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot c_3$$

och slutligen

$$\log c_2 = 0{,}25 \cdot \log c_3 + 0{,}25 \cdot \log (1{,}56 \cdot 10^{-6}).$$

I figur 1 är log c_2 avsatt mot log c_3, och man kan således där uttaga (den ungefärliga) koncentrationen av fri NH_3 vid varierande komplexjonkoncentration och vid titreringarnas slutpunkt. Sålunda svara mot varandra följande koncentrationsvärden:

$[Cu(NH_3)_4]$	1	0,1	0,01	0,001
[Fri NH_3]	0,035	0,020	0,011	0,0063

Denna lilla tabell visar tydligt bilden av en mycket instabil komplexjon.

Det bör kanske framhållas, att det här ovan framförda teoretiska och säkerligen ganska inexakta resonemanget ingalunda är avsett att ingå såsom någon del av undervisningen i dessa stycken.

Silver bildar välbekanta och även till skolkursen hörande komplexer med NH_3, $S_2O_3^{-2}$ och CN^{-1}. Av dessa är dicyanoargentatjonen $(AgCy_2)^{-1}$ så stabil, att dess bildning kan användas för kvantitativ silverbestämning; tiosulfatoargentat-jonerna dels många, dels så till vida instabila, att de lätt sönderfalla under bildning av Ag_2S. Med NH_3 bilda fasta silverhalogenider ett litet antal olika sammansatta föreningar, men i lösning egentligen endast en komplexjon, nämligen $Ag(NH_3)_2$, varmed nedanstående försök utföras.

De försök med Ag^{+1}, som motsvara ovan beskrivna försök med Cu^{+2}, äro lättare att utföra, därför att den ammoniakaliska lösningen är ofärgad och den fällning, som skall upplösas, Ag_2O, brun. Det är därför ganska lätt att avgöra, när fällningen är upplöst och lösningen fullt klar. Emellertid måste man fordra, att ammoniaken är klorfri, emedan AgCl fordrar mycket större NH_3-koncentration för att upplösas än AgOH på grund av sin mindre löslighetsprodukt. Finnes klor närvarande, blir det svårt att avgöra, när all silveroxid just är upplöst, emedan lösningen då alltjämt är oklar och ger Tyndalleffekt.

Ännu skarpare blir slutpunkten, om man använder en fällningsindikator, lämpligen diklorfluorescein (0,1 %-ig lösning i 70 %-ig etanol), varav ett par droppar sättas till lösningen av $AgNO_3$. Lös-

[1] Detta värde motsvarar en löslighetsprodukt för $Cu(OH)_2 = 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ och en löslighet av 0,031 g pr l, allt vid rumstemperatur; rimliga värden.

ningen antar då grön fluorescens. Vid tillsats av NH_3 utfaller Ag_2O, varvid fluorescensen försvinner och fällningen som alltid vid denna metod blir ganska kraftigt rödfärgad. Vid fortsatt NH_3-tillsats blir färgen först rödbrun, därefter brun, sedan ånyo svagare; till sist blir lösningen klar och samtidigt ånyo kraftigt fluorescerande i grönt. Denna punkt tages som titreringens slutpunkt.

Att inte heller denna komplex är absolut stabil, framgår av att lösningen av Ag_2O i minsta möjliga mängd NH_3 ger fällning med klorider, t. ex. vid utspädning med vattenledningsvatten.

Komplexens sammansättning framgår av följande tabell. Vid titrering av 10 ml 0,1008 C $AgNO_3$ åtgick

av 0,1 C NH_3	21,37 ml	0,1 C NH_3		(3)
0,2 » »	10,56 ml = 21,12	» »	»	(4)
0,4 » »	5,30 » = 21,20	» »	»	(5)
1,0 » »	2,16 » = 21,60	» »	» ?	(6)

Komplexens formel är sålunda sannolikt $Ag(NH_3)_2$. De 3 första raderna synas bekräfta, att komplexen sönderfaller vid minskad NH_3-koncentration.

Stabilitetskonstanten för $Ag(NH_3)_2$ har formen

$$\frac{[Ag(NH_3)_2]}{[Ag^{+1}] \cdot [NH_3]^2} = \frac{c_3}{c_1 \cdot c_2^2} = 1{,}6 \cdot 10^7.$$ (enl. Bodländer, 1903, o. a.)

Om vi genomföra samma resonemang som i fråga om koppar, är att börja med c_1 = konstant = kvadratroten ur silverhydroxidens löslighetsprodukt = $\sqrt{1{,}52 \cdot 10^{-3}}$ och $c_2^2 = 5{,}08 \cdot 10^{-4} \cdot c_3$. Logaritmering ger

$$\log c_2 = 0{,}5 \log c_3 - 1{,}647.$$

Kurvan återfinnes i figuren och vi uttaga följande samhöriga värden:

$[Ag(NH_3)_2]$	1,0	0,1	0,01	0,001
[Fri NH_3]	0,022	0,0071	0,0022	0,00071

Vidare kunna vi på kurvan uttaga de värden på fri NH_3, som motsvara komplexkoncentrationerna i ovanstående försöksserie (NH_3, ber.). Men de fria NH_3-mängderna kunna också erhållas ur försöken själva, nämligen såsom differenserna mellan den åtgångna och den för komplexbildningen erforderliga mängden (NH_3, obs.). Vi erhålla

	(3)	(4)	(5)	(6)
$[Ag(NH_3)_2]$	0,00321	0,00490	0,00658	0,00828
[Fri NH_3] ber.	0,0041	0,0050	0,0058	0,0065
[Fri NH_3] obs.	0,0039	0,0047	0,0066	0,012

Överensstämmelsen är förvånande god i betraktande av att värdena vunnits på av varandra fullständigt oberoende vägar under införande av några måhända diskutabla förenklingar.

En jämförelse mellan jämviktsekvationerna för de båda komplexbildningarna och mellan deras grafiska ekvivalenter bestyrker, att tetramminkopparjonen är mycket mindre stabil än diamminsilverjonen.

Krom. Om denna metall har en fransk författare yttrat, att hela dess kemi egentligen är en enda komplexkemi, och om detta tillspetsade omdöme inte täcker hela sanningen, så är det i det väsentliga otvivelaktigt riktigt. I omedelbar och osökt kontakt med kromens komplexkemi kommer man i skolan genom iakttagelsen av kromkloridens olika färger eller av kromsulfatets egendomliga förhållande till Ba^{+2}, medan de »Wernerska salterna» (termen införd av W. Biltz) på sin höjd torde bli föremål för ett flyktigt omnämnande. Med kromklorid och -sulfat kunna följande enkla laborationsförsök göras.

Försök 1. Av handelns gröna kristalliserade kromklorid beredes en lösning av den ungefärliga koncentrationen 0,1 C (27 g pr l). Så snart som möjligt bestämmes klorhalten i 10 ml av lösningen genom titrering med 0,1 C $AgNO_3$ (indikator: diklorfluorescein). Bestämningen upprepas med 10 ml av samma lösning, sedan provet först upphettats till kokning, och slutligen med 10 ml av samma lösning, sedan den förvarats några timmar vid rumstemperatur. Det skall visa sig att Ag-åtgången i de båda senare fallen är ungefär 2 gånger Ag-åtgången i det första fallet.

Förhållandet illustrerar jämvikten mellan diklorotetrakvokromklorid och hexakvokromklorid:

$$[Cl_2Cr(H_2O)_4]\,Cl + 2H_2O \rightleftarrows [Cr(H_2O)_6]\,Cl_3.$$

Försöken visa, att det vid jämvikt finnes lika många molekyler av vardera slaget.

Jämsides med klortitern ändrar sig lösningens ledningsförmåga. Man bestämmer den för den nyss beredda, den till kokning upphettade och därpå avkylda samt den några timmar gamla lösningen.

Försök 2. En nyss beredd lösning av handelns kromsulfat ger ingen fällning med $BaCl_2$; den innehåller sålunda sulfatjonen dold i en komplexjon, sannolikt $Cr^{+3}\,[Cr(SO_4)_3]^{-3}$. Efter en stunds förvaring ger lösningen fällning med $BaCl_2$, beroende på att komplexjonen delvis sönderfallit.

Kemisk formelskrivning.

Av **BERTIL ENGLUND.**

1. I en uppsats i denna tidskrift har adjunkt Kjell Runquist [1] framlagt en metod för formelskrivning och inbjudit intresserade till närmare utformning av vissa uppslag. Runquists metod är främst avpassad för redoxreaktioner av den i gymnasiet vanliga typen på krom och mangan. I det väsentliga är principen för bestämning av koefficienter i sådana reaktionsformler utredd i Nylén-Wigren. Runquist formulerar två regler, som rent algebraiskt ge siffrorna. »M-regeln» innebär, att summan av alla elektroner är lika på båda sidor, med andra ord att summan av de i redoxprocessen förändrade atomernas valenstal är oförändrat. »N-regeln» säger, att elektroneutralitet skall råda.

Som första exempel behandlar Runquist reaktionen mellan permanganat och ferrosalt i sur lösning. Med M-regeln fås antalet Mn- och Fe-atomer, med N-regeln, att ett visst antal positiva joner dessutom erfordras på utgångssidan i ekvationen. Det är väl med tanke på att H_2O är en väntad reaktionsprodukt som Runquist sätter in 8 H^+, eljest kunde ju vilka positiva joner som helst duga för utjämningen enligt N-regeln. Uttalandet mitt på sidan 32: »Den studerade reaktionen kan endast gå för sig i sur lösning. Vi se, att denna synpunkt framkommer såsom en direkt konsekvens av metoden» är sålunda vilseledande, om det uppfattas som allmängiltigt. Jag tror, att det måste påpekas med skärpa vid undervisningen, att man icke av reaktions*formlerna* kan få fram reaktions*betingelserna*. Eleverna skola genom resonemang »i kemisk anda» taga reda på vilka ämnen, som bildas. Se t. ex. Nylén-Wigren 4:e uppl. s. 15.

Som en tillämpning på den rekommenderade metoden valde jag reduktion av permanganat till manganat med — för jämförelsens skull — ferrojon också här som reduktionsmedel. M-regeln ger då enkelt

$$MnO_4^- + Fe^{++} \rightarrow MnO_4^{--} + Fe^{+++}.$$

N-regeln visar, att villkoret för elektroneutralitet redan är uppfyllt, d. v. s. reaktionen skulle i analogi med resonemanget i

[1] Litteraturhänvisningar i slutet av uppsatsen.

Runquists ex. 1 och 2 försiggå i neutral lösning. Den fullständiga reaktionsformeln kunde t. ex. vara

$$KMnO_4 + FeCl_2 + KCl \longrightarrow K_2MnO_4 + FeCl_3,$$

vilken naturligtvis är alldeles felaktig. Det framkommer icke »som en konsekvens av metoden», att lösningen bör vara starkt alkalisk. Det algebraiska betraktelsesättet kan föranleda kemiska misstag, även om de icke behöva vara så grova, som det jag lyckats finna på. Satsen om »språkets makt över tanken» skall inte gälla det kemiska formelspraket. Reaktionsformlerna skola vara ett kort och adekvat uttryck för de kemiska förändringar, som iakttagits.

2. I Nylén-Wigrens 4:e uppl. infördes »termen valenstal, varmed menas det algebraiska värdet av ett elements elektrovalens, d. v. s. den laddning, man bör tilldela atomerna, om bindningen mellan dem antages vara av rent elektrostatisk natur. Valenstalet skrives lämpligen med arabiska siffror över symbolen för elementet» (s. 12). Med utgångspunkt från Runquists till synes kanske djärva ansats, att kolatomerna i oxalsyra (ex. 6) äro trevärdiga, har jag försökt reda ut, om valenstalbegreppet också kan användas, då de av förändringen berörda atomerna förenas genom elektronparbindningar. Nylén-Wigren anmärker, att begreppet ej är lämpligt exempelvis för organiska ämnen. Begreppet valenstal är gammalt; det uppträder redan i J. Starks valensteori 1910 och betecknar där antalet av de på atomytan belägna valenselektronerna samt sedermera under olika namn med ibland något olika innebörd: Oxidationswert, formale Wertigkeit, electrovalency, laddning o. s. v.

Schwarzenbach lanserar termen Bindigkeit = antalet elektronparbindningar, som en atom ingått i en förening. Sådana bindningar skola i strukturformler markeras med två punkter eller med ett streck. Bolin-Gustaver använder i 4:e uppl. uttrycket bindningsvärde och flera exempel givas (s. 118, 119, 123). Ur Schwarzenbachs bok anför jag: »Aus Gründen der Systematik der Verbindungen und der chemischen Prozesse wollen wir den schon eingeführten Begriff der elektrochemischen Wertigkeit erweitern. Wir haben die Ladung eines Ions seine Wertigkeit genannt. Da nun auch eine Elektronenpaar-Bindung — besonders eine stabile Bindung — polar ist und man häufig kein Mittel hat, um zwischen einer solcher und einer Ionenbindung zu unterscheiden, ist es notwendig, den Wertigkeitsbegriff auf die polaren Elektronenpaar-Bindungen zu übertragen. Zu diesem Zwecke ionisieren wir auf dem Papier auch die Elektronenpaar-Bindungen gemäss ihrer Polarität und erhalten wiederum Ionen, deren Ladung uns die Wertig-

keit anzeigt. Eine solche Ionisierung findet ja in Wirklichkeit nicht statt ...» Detta betraktelsesätt innebär, att vi t. ex. i H_2O anse H ha valenstalet + 1, O valenstalet — 2. Oxidation och reduktion definieras bäst som en höjning resp. sänkning av atomens valenstal.

För salpetersyrans reduktion till ammoniak uppställa Bauer och Wieland ett schema, som jag i obetydligt förändrad form återger. Föreningarnas formler tecknas så, att väteatomer, direkt bundna till kväve, stå före, men syreatomer och hydroxylgrupper, direkt bundna till kväve, efter tecknet N. Varje åt höger riktad pil innebär ett upptagande av två väteatomer. Bauer och Wieland anse, att reaktionsmekanismen som regel skall uppfattas så, att två H-atomer lagra sig till dubbelbindningen N = O, d. v. s. som en hydrering, t. ex. $R-N=O+2H \rightarrow R-N\begin{matrix}OH\\H\end{matrix}$, varefter en molekyl H_2O i flera fall avspjälkas. I schemat representerar en förskjutning 1 rad nedåt förlust av 1 molekyl H_2O.

$$\begin{array}{lllll} +5 & +3 & +1 & -1 & -3 \\ NO_2OH \rightarrow & HNO(OH)_2 & & & \\ & NOOH \rightarrow & HN(OH)_2 & & \\ & & HNO \rightarrow & H_2NOH \rightarrow & H_4NOH? \\ & & & & H_3N \end{array}$$

Ingen har väl tvekat om att tilldela N olika värdighet i t. ex. salpetersyra och i ammoniak. Nu torde alla i schemat upptagna föreningar sammanhållas av elektronparbindningar. Talen i översta raden äro de för N erhållna valenstalen, om bindningarna upplösas enligt förut antydda principer. För alla redoxprocesser, som beröra kväveatomerna, erhållas koefficienter enkelt med hjälp av dessa valenstal. Så för den elektrolytiska reduktionen av salpetersyra till hydroxylamin:

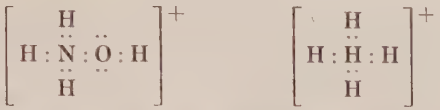
$$\overset{+5}{H}\overset{+5}{N}O_3 + 6H \rightarrow H_2\overset{-1}{N}OH + 2H_2O.$$

För väte och syre *inom föreningarna* ändras naturligtvis icke valenstalen. Man ser alltså, att N i hydroxylamin bör tilldelas valenstalet — 1. Följande jämförelse visar också det berättigade häri. Hydroxylamins nitrit sönderfaller liksom ammoniaks nitrat vid upphettning. Reaktionsprodukterna vid dessa intramolekylära redoxprocesser äro desamma:

$$[H_3\overset{-1}{N}OH]\,\overset{+3}{N}O_2 \rightarrow N_2O + H_2O$$

$$[H_4\overset{-3}{N}]\,\overset{+5}{N}O_3 \rightarrow N_2O + H_2O$$

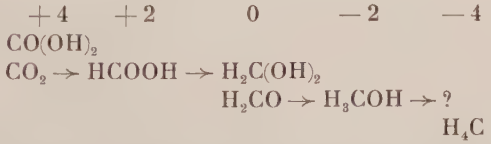
I N_2O ha båda N-atomerna formellt valenstalet +1 (medeltalet av kväveatomernas, i verkligheten torde de ha olika valenstal, motsvarande t. ex. strukturen $N \equiv N - O$). I de komplexa positiva jonerna



äro kväveatomerna 4-bindiga (ett vackrare svenskt ord vore önskvärt). Om en proton avlägsnas från kvävet, erhållas de fria baserna med 3-bindiga kväveatomer med de karakteristiska ensamma elektronparen. För alla i schemat upptagna ämnen kunna elektronformler med fullständiga oktetter för N och O samt elektronpar för H uppställas utom för $-H_4NOH$. Som skäl för denna diskutabla förenings existens har anförts, att såväl H_2O- som H_3N-molekyler ha en tydlig tendens till inbördes association. Då skulle också en association mellan H_3N och H_2O kunna ske med bindningen förmedlad av s. k. vätebrygga med en 2-bindig väteatom (*hydrogen bridge* eller *hydrogen bond*). SPEAKMAN ger föreningen formeln

där pilen representerar en semipolär bindning, av honom kallad »dative covalency» med syftning på att elektronparet helt härstammar från den ena atomen.

3. För kolföreningar kan nu också ett reduktionsschema uppställas



En viktig olikhet mellan kväve och kol är, att aldrig ensamma elektronpar uppträda i kolföreningarna; kolatomen är alltid 4-bindig. I detta förhållande ha vi väl orsaken till att kolet alltid omtalats som 4-värdigt. I själva verket är det nog lika stor skillnad mellan kolatomernas kemiska funktion i CO_2 och CH_4 som mellan kväveatomernas i HNO_3 och H_3N, där man som sagt aldrig tvekat i valensfrågan.

Den alifatiska C–C-bindningen är en typisk elektronparbindning.

En uppfattning om hur dess upplösning genom oxidation kan behandlas ur valenstalssynpunkt fås av följande tablå:

	valenstalsändring per kolatom
$2CH_4 + 8\,O \rightarrow 4H_2O + 2CO_2$	8
$C_2H_6 + 7\,O \rightarrow 3H_2O + 2CO_2$	7
$C_2H_4 + 6\,O \rightarrow 2H_2O + 2CO_2$	6
$C_2H_2 + 5\,O \rightarrow H_2O + 2CO_2$	5
$2C + 4\,O \rightarrow 2CO_2$	4

Kolatomen kan således tilldelas följande valenstal:

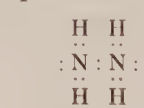
i	CH_4 (inga kolatomer bundna sinsemellan)	-4
»	$-CH_3$ (enkelbindning mellan 2 kolatomer)	-3
»	$=CH_2$ (dubbelbindning » » »)	-2
»	$\equiv CH$ (trippelbindning » » »)	-1
»	$\equiv C$ (diamantbindning)	0.

För varje elektronparbindning mellan två lika atomer ökas således valenstalet med 1 enhet. Då bindningarna enligt Schwarzenbach joniseras på papperet böra bindningar mellan *lika* atomer icke medräknas. För en kolatom, som binder 2 eller 3 andra kolatomer, räknar man som för dubbel- resp. trippelbindning. Oxalsyra HOCO–COOH, innehåller 2 kolatomer, vardera bunden till en syreatom, en hydroxylgrupp och en annan kolatom. Valenstalet blir $+3$, vilket just är vad Runquist föreslagit i ex. 6.

Beträffande hydrazin, som ju uppstår enligt schemat

$$\overset{-1}{N}H_2Cl + \overset{-3}{N}H_3 + NaOH \rightarrow N_2H_4 + NaCl + H_2O,$$

finner man på samma sätt valenstalet -2 för kväveatomerna.



Hydrazin

Hydrazinhydrat

Varken de ensamma elektronparen eller det par, som förmedlar N–N-bindningen skola tagas med i valenstalsberäkningen. Det skall påpekas i detta sammanhang, att en elektronformel kan uppställas för hydrazins hydrat N_2H_5OH, som i motsats till ammoniakens hydrat kan framställas i fri form. Molekylen innehåller 2 st. 3-bindiga kväveatomer med valenstalen -1 och -3.

4. Reduktion av nitrobensol i sur lösning går över en serie väl kända föreningar. I analogi med föregående uppställes schemat (Ar betyder en aromatisk radikal t. ex. C_6H_5):

$$\begin{array}{llll} +3 & +1 & -1 & -3 \\ ArNO_2 \rightarrow & ArN(OH)_2 & & \\ & ArNO \rightarrow & ArHNOH \rightarrow & \\ & & & ArH_2N \end{array}$$

De anförda valenstalen för N äro erhållna under förutsättning, att kvävet i slutprodukten (t. ex. anilin) är ammoniakkväve, alltså negativt 3-värdigt. Aminernas baskaraktär göra ju ett sådant antagande troligt. Vad som då kanske förvånar, är att nitrogruppen skall anses innehålla kväve med valenstalet + 3, icke + 5. Alifatiska nitroföreningar bildas av alkyljodid och nitrit, samtidigt uppstå alkylestrar av salpetersyrlighet. Nitritjonen förekommer liksom sulfit- och arsenitjonen i två tautomera former $-O-N=O$ och $-NO_2$. Det finns intet skäl att som ofta skett tillskriva atomerna olika valens i dessa. — Aromatiska nitroföreningar erhållas vid den bekanta nitreringen av bensolkolväten. Nyare undersökningar, ref. av Stott s. 85—87, över mekanismen visa, att nitreringen verkställes av additionsföreningar mellan salpetersyran och lösmedlet (svavelsyra, ättikssyraanhydrid). Bensolringen fungerar som elektrongivare till den atomgrupp, som ingår jämte NO_2-gruppen i nitreringsmedlet, och därvid återbildas alltså molekyler av lösmedlet under det att salpetersyra förbrukas. Jag tolkar detta så, att C_6H_5 skall anses få valenstalet + 1. Jämför sålunda

$$\begin{aligned} C_6H_6 + \overset{+5}{H}ONO_2 &\rightarrow C_6H_5\overset{+3}{N}O_2 + H_2O \\ H_2 + HONO_2 &\rightarrow HNO_2 + H_2O. \end{aligned}$$

Reaktionsformeln

$$C_6H_5\overset{+3}{N}O_2 + 6\overset{0}{H} \rightarrow C_6H_5\overset{-3\ +1}{N}H_2 + 2\overset{+1}{H_2}O$$

är i överensstämmelse med denna uppfattning.

5. Tolkningen av den s. k. Meyerska reaktionen, då metylarsonsyrans salt uppstår enligt

$$CH_3J + Na_3AsO_3 \rightarrow CH_3AsO(ONa)_2 + NaJ$$

har alltid berett svårigheter. Arsonsyror reagera icke momentant med jod, vilket ju anses som ett belägg för att de innehålla 5-värdig arsenik. I samband med en annan undersökning observerade jag, att bensylarsonsyrans sönderfall i vattenlösning kunde följas genom titrering med jod

$$2C_6H_5CH_2AsO(OH)_2 \rightarrow 2C_6H_5CH_2OH + As_2O_3 + H_2O.$$

Denna omvändning av Meyers reaktion är ej en redoxprocess i vanlig mening. Arsonsyrorna visa analogi med nitroföreningar

även på så sätt, att de i vissa fall kunna framställas genom inverkan av arseniksyra på aromatiska ämnen. Motsvarande fosforföreningar förhålla sig icke analogt.

Med antydningen om dessa delvis icke uppklarade problem har jag till synes kommit från det ursprungliga temat, valenstalen och deras användning. — Undersökningen av röntgenstrålars absorption visade, att den skarpa absorptionskantens våglängd var beroende av den absorberande atomens kemiska funktion, så nämligen, att kanten var förskjuten mot kortare våglängd, då valenstalet var högre. Kväveatomen och kolatomen ha ej kunnat undersökas med denna metod, men ett intressant exempel erbjuda svavelföreningarna. För svavel befanns våglängden vara i sulfider 5005—5011 X. E., i sulfiter 4996 och i sulfater 4988. Med $(C_6H_5)_2SO$ erhölls 5002 och med $(C_6H_5)_2SO_2$ 4994, d. v. s. då svavelatomen är bunden till kolväteradikaler erhållas absorptionskanter, som svara mot lägre valenstal än de på klassiskt sätt beräknade (+ 4 i sulfoxiden och + 6 i sulfonen). Om kolväteradikalerna tilldelas valenstalet + 1 erhållas talen 0 och + 2. Då många olika faktorer synas ha inflytande på kantens läge, kan en bättre överensstämmelse nog icke väntas.

Litteraturhänvisningar:

Runquist, Elementa 27 (1944), s. 30.
Nylén-Wigren, Elementära kemiska räkneuppgifter.
Bolin-Gustaver, Kemi för gymnasiet.
Bauer und *Wieland*, Reduktion und Hydrierung organischer Verbindungen (1918).
Schwarzenbach, Allg. und Anorg. Chemie (1941).
Stark, Prinzipien der Atomdynamik (1910).
Speakman, An Introduction to the Modern Theory of Valency (1943).
Stott, Electronic Theory and Chemical Reactions (1943).

Litet om kaströrelsen.

Av O. KLEIN.

Följande betraktelser över kaströrelsen innehålla ingenting i sak nytt. I sina huvuddrag gå de tillbaka på GALILEI, och en kort framställning av satserna i fråga finnes t. ex. i APPELLS Traité de mécanique rationelle. Emellertid tyckas de vara relativt okända och torde utgöra ett särskilt gott exempel på möjligheten att i elementarundervisningen i högre grad än vad nu brukar vara fallet samarbeta matematiken med fysiken, något som otvivelaktigt skulle komma undervisningen i bägge ämnena tillgodo.

Vi utgå från parabelns två huvudegenskaper: att parabeln är en kroklinje, där varje punkts avstånd från en given linje, styrlinjen, är lika stort som dess avstånd från en fixpunkt, brännpunkten, och att tangenten i en punkt på kurvan delar vinkeln mellan den från samma punkt dragna normalen mot styrlinjen och brännpunktsradien mitt itu. Bägge dessa egenskaper, av vilka den andra ju följer omedelbart av den första, illustreras f. ö. enkelt av den paraboliska spegelns förmåga att samla alla med axeln parallella strålar i brännpunkten. Detta följer ju sålunda ur den första egenskapen genom en enkel tillämpning av Huygens princip och ur den andra egenskapen på grund av reflexionslagen. Ur den första egenskapen följer parabelns ekvation, som vi skriva

$$y = \frac{x^2}{2p}, \tag{1}$$

i det vi lägga origo i parabelns topp, y-axeln parallellt med parabelns axel (vertikalt nedåt) och x-axeln horisontellt. Härvid betecknar $2p$ parametern, d. v. s. längden av en mot axeln vinkelrät korda genom brännpunkten. Storheten p är alltså också avståndet mellan brännpunkten och styrlinjen, och ur den första egenskapen följer att toppen ligger mitt emellan styrlinjen och brännpunkten.

Vi betrakta nu en kaströrelse, där banan ligger i ett givet vertikalplan. En sådan rörelse kännetecknas av den kastade kroppens begynnelsehastighet v och dess begynnelseriktning, elevationsvin-

keln, eller, vilket är detsamma, av begynnelsehastighetens komponenter v_x och v_y i horisontell resp. vertikal led. Man har härvid

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{2}$$

Vi välja nu kaströrelsens högsta punkt till origo och det ögonblick projektilen passerar denna punkt till nollpunkt för tiden. Vi kunna då skriva

$$x = v_x t, \; y = \frac{1}{2} g t^2, \tag{3}$$

där t betecknar tiden och g tyngdkraftens acceleration. Genom elimination av t få vi kastparabelns ekvation

$$y = \frac{g x^2}{2 v_x^2} = \frac{x^2}{2p}.$$

Halva parametern p bestämmes alltså på följande sätt av horisontalhastigheten v_x

$$p = \frac{v_x^2}{g}. \tag{4}$$

Parabeltoppens höjd h över utgångspunktens horisontalplan, alltså stighöjden, erhålla vi genom att insätta värdet v_y/g för t i (3). Vi få då

$$h = \frac{v_y^2}{2g}. \tag{5}$$

På samma sätt erhålles för den största med begynnelsehastigheten v förenliga stighöjden H uttrycket

$$H = \frac{v^2}{2g} = h + \frac{v_x^2}{2g} = h + \frac{p}{2}. \tag{6}$$

H, som utgör ett mått på kastets energi, anger alltså styrlinjens höjd över det horisontalplan, från vilket rörelsen utgick, och brännpunkten ligger stycket $v_x^2/2g$ under toppen. Enligt parabelns första huvudegenskap är vidare avståndet mellan en godtycklig punkt på kastparabeln och brännpunkten lika med den stighöjd, som motsvarar den återstående rörelseenergien.

Låt oss nu på geometrisk väg lösa några typiska kaströrelseproblem. Först fråga vi oss då, vilken utgångsriktning en kaströrelse av given hastighet, motsvarande den maximala stighöjden H, bör ha, för att kastvidden skall ha en uppgiven storlek. Problemet är ett typiskt churu starkt idealiserat artilleriproblem, i det den sökta riktningen motsvaras av kanonens elevationsvinkel. Lösningen finna vi på följande sätt. Kastparabelns brännpunkt måste

på grund av parabelns första huvudegenskap vara belägen på en cirkel i rörelsens vertikalplan med medelpunkten i utgångspunkten *O* (fig. 1) och med radien *H*, en cirkel alltså, som tangerar styrlinjen. På grund av parabelns symmetri kring den vertikala axeln genom brännpunkten ligger brännpunkten dessutom rätt ovanför en punkt *P*, vars avstånd från *O* är lika med halva kastvidden. En vertikal linje från *P* skär sålunda cirkeln i brännpunkten *B*. På grund av parabelns andra huvudegenskap erhålla vi den sökta elevationsvinkeln, som ju anger tangentens riktning i punkten *O*, genom att halvera vinkeln mellan brännpunktsradien *OB* och den mot styrlinjen dragna normalen *OS*.

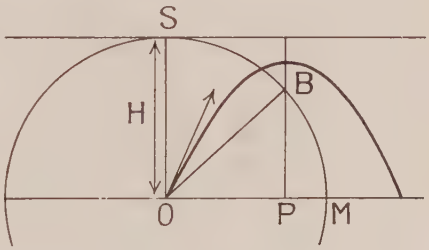


Fig. 1.

Det föregående resultatet löser nu också omedelbart ett annat typiskt kastproblem, att finna den största möjliga kastvidden och därtill hörande elevationsvinkel. Eftersom halva kastvidden *OP* utgör projektionen av brännpunktsradien *OB* (av längden *H*) på horisontalplanet genom *O*, se vi att kastvidden blir så stor som möjligt, när *OB* är horinsontell, d. v. s. när B faller i punkten *M*. I detta fall blir vinkeln mellan brännpunktsradien och normalen mot styrlinjen rät och elevationsvinkeln följaktligen 45°. Vidare se vi, att den största kastvidden blir $2H$.

Vi ställa nu följande allmännare problem: att finna den eller de kastparablar, som med givet *H* föra från punkten *O* till en annan given punkt *Q*. Vi låta pappersbladet föreställa ett vertikalplan genom punkterna *O* och *Q* (fig. 2), och vi draga styrlinjen *SS'*, som är gemensam för alla de parablar, som kunna komma i fråga. Med *O* och *Q* som medelpunkter draga vi två cirklar, som tangera styrlinjen. Tydligen måste den sökta parabelns brännpunkt ligga på bägge dessa cirklar. Vi ha nu tre möjliga fall, i det cirklarna kuna skära varandra i två punkter, tangera varandra, eller ligga helt och hållet utanför varandra. Problemet har sålunda två, en eller ingen lösning. Så snart brännpunkten är funnen, kunna vi på samma sätt som ovan konstruera elevationsvinkeln, och det är ju också lätt att upprita så mycket av parabeln, som vi önska.

Ett särskilt intresse har den kurva, som utgöres av orten för alla medelpunkter *Q* till de cirklar, vilka tangera cirkeln kring

O med radien OS och samtidigt tangera styrlinjen. Låt Q (fig. 2) vara en dylik medelpunkt, T och T' cirkelns tangeringspunkter med cirkeln kring O resp. med styrlinjen SS', och låt vidare G' ligga i förlängningen av den vertikala linjen QT' på avståndet $OS = H$ från T'. Emedan $OT = T'G'$ och $QT = QT'$, har man tydligen $OQ = QG'$. Härav följer att Q ligger på en parabel med O till brännpunkt och en med SS' parallell styrlinje på avståndet

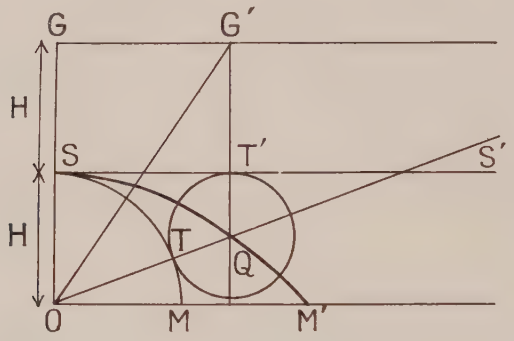


Fig. 2.

$2H$ från O. Denna parabel eller rättare den paraboloid, som bildas, när parabeln roterar kring OS, vars topp ligger i S, och som passerar genom M', orten för den största horisontella kastvidden, betecknar tydligen gränsen för det område av rummet, vilket kan nås från O med kast motsvarande den maximala stighöjden H. Den spelar en viktig roll för kaströrelsens teori och kallas säkerhetsparaboloiden. Med hjälp av densamma kan man t. ex. lösa problemet att finna den elevationsvinkel, som ger den största möjliga kastvidden i en godtycklig icke-horisontell riktning. För den skull behöver man blott från O draga en linje i riktningen i fråga. Om denna linje skär säkerhetsparaboloiden i Q, är OQ den största kastvidden i denna riktning, och på grund av paraboloidens definition (se fig. 2) ligger brännpunkten till motsvarande kastparabel likaledes på OQ. Elevationsvinkeln får man därför genom att halvera vinkeln mellan linjen i fråga och lodlinjen, vilket för horisontella riktningar leder till det gamla resultatet.

Ett annat problem, som man också omedelbart kan lösa, är att finna elevationsvinkeln för ett kast, som träffar en given lodlinje på största möjliga höjd över horisontalplanet. Den största höjden betecknas tydligen av den givna lodlinjens skärning med säkerhetsparaboloiden. Elevationsriktningen halverar åter vinkeln mel-

lan sammanbindningslinjen, som förenar O med skärningspunkten i fråga, och vertikalriktningen, och vi se att den syftar mot skärningspunkten T' mellan vår lodlinje och säkerhetsparabelns styrlinje. Ty triangeln OQG' är likbent, emedan OG' är bissektris till vinkeln SOT. Alltså måste $QG' = OQ$, vilket visar att G' ligger på styrlinjen i fråga.

Som avslutning på ovanstående redogörelse för några enkla egenskaper hos kaströrelsen skall påpekas att alldeles liknande satser gälla, när man tar hänsyn till att tyngdkraften utanför jorden avtar omvänt proportionellt mot kvadraten på avståndet till jordens medelpunkt. Banan blir ju då en ellips med ena brännpunkten i jordens medelpunkt, och liksom projektilens energi vid den enkla kaströrelsen bestämmer hur högt kastparabelns styrlinje ligger över jordytan, bestämmer energien i det allmänna fallet längden av banellipsens storaxel, som är lika med avståndet mellan jordens medelpunkt och projektilens högsta möjliga höjd över jordytan. Härur kan man härleda alldeles liknande konstruktioner som ovan. Sålunda ersättes t. ex. säkerhetsparaboloiden av en säkerhetsellipsoid med utgångspunkten och jordens medelpunkt till brännpunkter och med summan av jordradien och dubbla maximala stighöjden över jordytan till storaxel.

Nomenklatur vid vinst- och förlusträkning.

I cirkulär av den 8 febr. 1945 har Kungl. Skolöverstyrelsen meddelat att följande nomenklatur kommer att användas i provräkningen i realexamen fr. o. m. vårterminen 1946:

fakturapris = varans nettopris hos leverantören,
inköpspris = fakturapriset + de direkta inköpskostnaderna (frakt, emballage, tull o. dyl.) = varans värde för köparen vid framkomsten till affärslagret,
försäljningspris = det pris, till vilket varan försäljes,
pålägg = skillnaden mellan försäljningspriset och inköpspriset, angiven i procent av inköpspriset,
(netto)vinst — skillnaden mellan försäljningspriset och samtliga kostnader för varan (inköpspris + lagrings- och försäljningskostnader), om det förra är högre,
(netto)förlust — skillnaden mellan samtliga kostnader för varan (inköpspris + lagrings- och försäljningskostnader) och försäljningspriset, om det senare är lägre.

Brytning i en sfärisk yta.

Ett laborationsförsök.

Av **BERTIL ENGLUND.**

Formeln för brytning i en sfärisk yta bevisas geometriskt i gymnasiets läroböcker i fysik. Problem, i vilka formeln kommer till användning, tyckas ofta bereda svårigheter för eleverna, som kanske också tvivla på att en bild verkligen uppkommer på detta sätt, eftersom de varken ha fått se eller konstruera fram den. Med det enkla experiment, som beskrives här, kan formelns fysikaliska innehåll göras mera levande.

Ett större provrör (längd 12—18 cm, diameter 3—4 cm), vars botten bör vara möjligast sfärisk, fastsättes i vertikal ställning i ett stativ och fylles helt med t. ex. glycerin. En mattglasskiva skjutes över mynningen och lägges så, att inga luftblåsor uppstå mellan vätskan och glaset. Rakt under rörets botten placeras en liten glödlampa med lystråden horisontell (ficklampa med S-formad lystråd är bra). Genom att förflytta lampan uppåt och nedåt finner man ett sådant läge (3—4 cm från bottnen), att en skarp bild av lystråden uppstår på glasskivans matta yta, som är vänd uppåt. Ljusbrytningen sker vid övergång från luft till glas och från glas till vätska, men då glasväggen är tunn, räknar man med att brytning endast sker *i vätskemassans sfäriska begränsningsyta.* Under försättning att blott centrala strålar alstra bilden erhålles

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{x}=\frac{n-1}{r},$$

där a = avståndet mellan lystråden och provrörets nedersta ända, x = provrörets längd, r = provrörsbottnens krökningsradie, n = vätskans brytningsindex.

Sträckorna a och x kunna uppmätas. Om man önskar beräkna n ur försöket, kan r elimineras genom att bestämningen upprepas med en annan vätska, vars n-värde antages bekant. Med glycerin och vatten brukar man få bra värden, men även andra kombinationer av vätskor med ej alltför lika brytningsindices kunna användas. — En nyttig övning är att konstruera gången av strålarna, som alstra bilden.

Kaskadgeneratorns verkningssätt och användning.

Av SIGVARD EKLUND.

År 1932 lyckades det engelsmännen Cockcroft och Walton i Cambridge att åstadkomma kärnomvandlingar med hjälp av på konstgjord väg accelererade joner. Det teknisk-fysikaliska problemet att alstra snabba joner har bearbetats efter två olika linjer. Antingen kunna jonerna direkt accelereras i urladdningsrör, mellan vilkas elektroder mycket höga potentialdifferenser (hittills högst 5 MV) upprätthållas, eller också kan s. k. multipel acceleration komma till användning. Vid denna metod tvingas jonerna genomlöpa ett och samma potentialfall av storleksordningen 50—150 kV ett stort antal gånger med motsvarande ökning av partiklarnas energi till följd. Metoden, som fått sin mest fulländade tillämpning i cyklotronen (Lawrence 1930), medger en praktiskt taget obegränsad ökning av jonernas energi. En under byggnad varande cyklotron i U. S. A. väntas ge deuteriumjoner med en energi av 100 MeV.

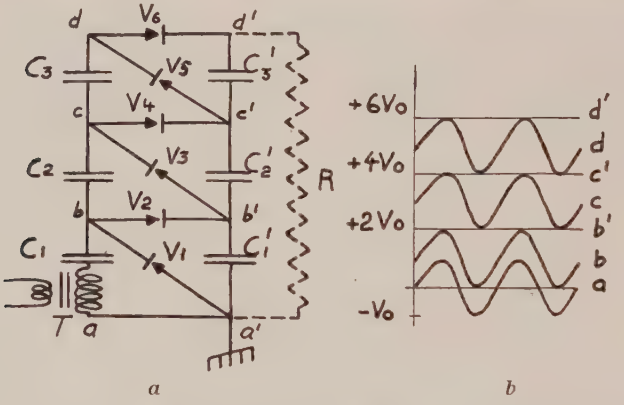
Trots att den direkta högspänningsmetoden inte kan ge joner med samma höga energi som cyklotronen äro högspänningsanläggningar ett viktigt och i många fall oumbärligt hjälpmedel vid kärnfysikaliska undersökningar. Anledningen är den, att man i ett urladdningsrör i förening med en högspänningsanläggning kan erhålla en jonstråle, som antingen är helt monokromatisk eller också blott visar en obetydlig spridning i fråga om energin, en spridning huvudsakligen betingad av fluktuationer i den använda högspänningen. Därtill kommer att jonstrålens energi kan kontinuerligt ändras från noll till den högsta spänning anläggningen ger. De nämnda egenskaperna äro av största betydelse vid studiet av tröskelspänningar och resonansprocesser vid olika kärnreaktioner.

Här skall redogöras för en inom den fysikaliska högspänningstekniken ofta använd koppling för ernående av höga spänningar med hjälp av likriktare och kondensatorer, den s. k. kaskadgeneratorn. Den angavs ursprungligen av Greinacher 1920, upptäcktes på nytt av de förut nämnda Cockcroft och Walton och bragtes till

fulländning genom arbeten i slutet av trettiotalet av BOUWERS hos Philips och MEHLHORN hos Siemens.

Kaskadgeneratorn i tomgång.

Principen för kaskadkopplingen framgår av fig. 1 a, där T betecknar en högspänningstransformator, V likriktare av något slag, t. ex. ventilrör, och C kondensatorer. Strömmens riktning i ventilrören antydes genom pilarna. Ventilerna släppa blott igenom ström under den del av en växelströmsperiod, då katoden är negativ i



a *b*

Fig. 1. *a*. Kopplingsschema. *b*. Spänningarna i olika punkter av generatorn vid tomgång.

förhållande till anoden. Under följande halvperiod är all strömgenomgång spärrad. Transformatorn antas lämna sinusformad växelspänning, d. v. s.

$$v = V_0 \cdot \sin \omega t, \tag{1}$$

där v är momentanvärdet, V_0 toppvärdet och $\omega = 2\pi n$, där n är periodtalet.

Strömkretsen aba' består av transformatorn T, kondensatorn C_1 och ventilen V_1. Om kaskadgeneratorn inte belastas, kommer kondensatorn C_1 att sedan stationärt tillstånd uppnåtts vara uppladdad till en spänning lika med transformatorns toppspänning. Om spänningen i punkten b betecknas med v_b blir

$$v_b = V_0 \sin \omega t + V_0 = V_0 (1 + \sin \omega t). \tag{2}$$

Den maximala potentialskillnaden mellan b och a' d. v. s. den största spänning för vilken ventilen V_1 måste spärra, blir alltså

$v_{b\,\max} = 2V_0$, och vidare uppgår potentialdifferensen över kondensatorn C_1 högst till V_0. I diagrammet i fig. 1b betecknar kurvan *a* den växelspänning, som representeras av (1) och kurvan *b* den pulserande likspänningen i punkten *b* enligt (2). Den pulserande likspänningen v_b laddar genom ventilen V_2 upp kondensatorn C_1', d. v. s. punkten b' antar i tomgång och stationärt tillstånd en spänning $v_{b'}$, som enligt (2) blir $v_{b'} = v_{b\,\max} = 2V_0$. Kondensatorn C_1' måste således dimensioneras för att tåla spänningen $2V_0$ och på samma sätt utsättes ventilen V_2 för en spänningsdifferens av

$$v_{b'} - v_b = 2V_0 - V_0(1 + \sin \omega t) = V_0(1 - \sin \omega t), \qquad (3)$$

vars maximalvärde är $2V_0$. Uppladdningen av kondensatorn C_2 förstås lättast, om vi låter *b* och b' vara poler i en strömkälla, som består av kondensatorn C_1, transformatorn T och kondensatorn C_1'. Över ventilen V_3 laddas alltså C_2 upp medelst den pulserande likspänningen $v_{b'} - v_b$ enligt (3). Om generatorn antas arbeta förlustfritt och i tomgång, är C_2 efter några perioder uppladdad till en spänning lika med maximala värdet av $v_{b'} - v_b$ eller $2V_0$. Spänningen i punkten *c* blir följaktligen

$$v_c = 2V_0 + v_b = 2V_0 + V_0(1 + \sin \omega t) = V_0(3 + \sin \omega t). \qquad (4)$$

Spärrspänningen för ventilen V_3 blir

$$v_c - v_{b'} = V_0(3 + \sin \omega t) - 2V_0 = V_0(1 + \sin \omega t). \qquad (5)$$

Eftersom (3) och (5) ha samma maximivärde, utsättas ventilerna V_2 och V_3 för samma påfrestningar, maximalt $2V_0$. Den pulserande likspänning, som (4) representerar, åskådliggöres i diagrammet av kurvan *c*. Genom ventilen 4 laddas kondensatorn C_2' upp av en strömkälla, bestående av kondensatorerna C_2 och C_1, transformatorn T och kondensatorn C_1'. Spänningen representeras av (5) och följaktligen laddas C_2' upp till maximivärdet av $v_c - v_{b'}$ d. v. s. $2V_0$. Spänningen $v_{c'}$ gentemot jord i punkten c' blir följaktligen $v_{c'} = v_{b'} + 2V_0 = 4V_0$, under det att spärrspänningen för ventilen 4 blir

$$v_{c'} - v_c = 4V_0 - V_0(3 + \sin \omega t) = V_0(1 - \sin \omega t). \qquad (6)$$

Det kan visas, att samtliga kondensatorer och ventiler i en kaskadkoppling utom den med C_1 betecknade kondensatorn utsättas för en maximal spänningspåkänning av $2V_0$. Häri ligger den stora fördelen med kaskadkopplingen: genom att öka antalet »steg» (med ett steg förstå vi i det följande en maska av kopplingsnätet omfattande t. ex. C_2 och C_2', V_3 och V_4) kan slutspänningen undan för undan ökas, utan att de enskilda konstruktionselementen behöva

dimensioneras för större påkänning än dubbla transformatorspänningen. Den jämna spänningsfördelningen över de seriekopplade kondensatorerna är också av den största betydelse för den tekniska utformningen av kaskadgeneratorn.

Kaskadgeneratorn vid belastning.

1. *Vågighet.* När generatorn belastas, t. ex. över ett motstånd mellan d' och jord, sjunker slutspänningen i samband med att kondensatorerna berövas en del av sin laddning, som dock i stationärt tillstånd delvis ersättes under varje period genom en ström genom de olika likriktarna.

Om i betecknar strömmen genom motståndet R (fig. 1) och n den primära växelströmmens periodtal, blir den laddning som flyter bort från kaskadgeneratorn under en period $\frac{i}{n}$. Förlorar emellertid kondensatorn C_3' (och därmed också C_2' och C_1')[1] laddningen $\frac{i}{n}$ under en period, måste denna laddning ersättas under samma tidrymd, om stationärt tillstånd skall råda. Under den tid, då punkten d är positiv gentemot punkten d', ersättes laddningsförlusten $\frac{i}{n}$ för kondensatorn C_3' genom att en laddning av denna storlek genom ventilen V_6 flyter över från kondensatorn C_3 (och därmed också från C_2 och C_1) till C_3' (och $C_2' + C_1'$). Den från C_3 avgivna laddningen ersättes från C_2' (och C_1') under den tid då c' är positiv i förhållande till d. Kondensatorn C_2' förlorar (och mottar) alltså två gånger under varje period elektricitetsmängden $\frac{i}{n}$: första gången på grund av strömmen genom motståndet R och andra gången på grund av kondensatorn C_3:s uppladdning. På samma sätt förlorar och mottar C_2 laddning två gånger under varje period, under det att samma sak sker tre gånger varje period med kondensatorerna C_1' och C_1.

I en kondensator med kapaciteten C, som är laddad med elektricitetsmängden Q råder mellan beläggen en potentialdifferens

[1] Om en kapacitet C består av en rad seriekopplade kondensatorer C_1, C_2, C_3, . . . , d. v. s. $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$ och C laddas (eller urladdas) med elektricitetsmängden Q, laddas (eller urladdas) också kondensatorerna C_1, C_2, C_3 . . . med samma elmängd. Spänningen V_1, V_2, V_3 . . . över de enskilda kondensatorerna blir omvänt proportionell mot deras kapacitet C_1, C_2, C_3 . . .

$V = \frac{Q}{C}$. Ändras laddningen med beloppet ΔQ ändras spänningen så, att $\Delta V = \frac{\Delta Q}{C}$. Laddningsändringarna i kondensatorerna C_1', C_2' och C_3' medföra alltså spänningsändringar δV över varje kondensator, nämligen nedifrån räknat

$$\delta V_1' = \frac{3i}{nC_1'}; \quad \delta V_2' = \frac{2i}{nC_2'} \quad \text{och} \quad \delta V_3' = \frac{i}{nC_3'}.$$

Dessa spänningsfluktuationer i de enskilda elementen av kondensatorkedjan $C_1'\, C_2'\, C_3'$ förorsaka en vågighet δV i totalspänningen

$$\delta V = \delta V_1' + \delta V_2' + \delta V_3' = \frac{i}{n}\left(\frac{3}{C_1'} + \frac{2}{C_2'} + \frac{1}{C_3'}\right). \tag{7}$$

Tydligen förorsaka spänningsvariationerna i de nedersta kondensatorerna största delen av vågigheten. Då man i de flesta fall eftersträvar så ren likspänning som möjligt, d. v. s. vill göra vågigheten så obetydlig som möjligt, låter man kondensatorernas kapacitet tilltaga räknat uppifrån och ned. Om $C_1' = 3C$, $C_2' = 2C$ och $C_3' = C$,blir

$$\delta V = \frac{i \cdot 3}{n \cdot C},$$

eller, om antalet »steg» är N,

$$\delta V = \frac{i \cdot N}{n \cdot C}. \tag{8}$$

Ha i stället alla kondensatorerna samma kapacitet C, blir

$$\delta V = \frac{i}{nC}(1 + 2 + \ldots + N - 1 + N) = \frac{i}{nC}\frac{N(N+1)}{2}. \tag{9}$$

2. *Spänningsfall.* Som framgår av det tidigare sagda, är för aggregatet i fig. 1 tomgångsspänningen $V = 6V_0$, om inga förluster förekomma, eller i det allmänna fallet med N steg

$$V = 2N \cdot V_0. \tag{10}$$

Då kaskadgeneratorn belastas, inträffar ett spänningsfall ΔV, vars storlek kan uppskattas genom följande överläggning. Kondensatorn C_1' uppladdas inte till full spänning $2V_0$, ty C_1 avger under varje period en laddning $\frac{3i}{n}$, vilket medför ett spänningsfall $\frac{3i}{nC_1}$, så att maximala spänningen över C_1' högst blir $2V_0 - \frac{3i}{nC_1}$. Detta medför att C_2 inte kommer att laddas upp till högre spänning än

$2V_0 - \frac{3i}{nC_1} - \frac{3i}{nC_1'}$, ty C_1' avger själv under varje period laddningen $\frac{3i}{n}$ med motsvarande spänningssänkning till följd. Spänningen över C_2' blir följaktligen $2V_0 - \frac{i}{n}\left(\frac{3}{C_1} + \frac{3}{C_1'} + \frac{2}{C_2}\right)$, eftersom C_2 varje period avger laddningen $\frac{2i}{n}$. Kondensatorn C_3 laddas upp till $2V_0 - \frac{i}{n}\left(\frac{3}{C_1} + \frac{3}{C_1'} + \frac{2}{C_2} + \frac{2}{C_2'}\right)$ och C_3' till $2V_0 - \frac{i}{n}\left(\frac{3}{C_1} + \frac{3}{C_1'} + \frac{2}{C_2} + \right.$ $\left. + \frac{2}{C_2'} + \frac{1}{C_3}\right)$. Spänningen V i d' mot jord blir lika med summan av delspänningarna över de olika kondensatorerna eller

$$V = 6V_0 - \frac{i}{n}\left(\frac{9}{C_1} + \frac{6}{C_1'} + \frac{4}{C_2} + \frac{2}{C_2'} + \frac{1}{C_3}\right). \tag{11}$$

Antagas alla kondensatorerna lika stora ($= C$) fås

$$V = 6V_0 - \frac{i}{n \cdot C} \cdot 22 \quad \text{eller} \quad \Delta V = \frac{i}{n \cdot C} \cdot 22.$$

Allmänt gäller, att om antalet steg är N och alla kondensatorerna ha samma värde C, spänningsfallet ΔV kan skrivas

$$\Delta V = \frac{i}{n \cdot C}\left(\frac{2}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{6}N\right). \tag{12}$$

Om man försummar de två sista termerna i uttrycket, uppträder ett fel som emellertid blir mindre och mindre ju större N är. Om $N \geqq 4$, är felet högst 15 %, och med den reservationen kan man sätta

$$\Delta V \approx \frac{i}{n \cdot C} \cdot \frac{2}{3}N^3. \tag{13}$$

Jämföras (9) och (13), ser man att spänningsfallet ΔV är ca N större än vågigheten δV. Sambandet mellan ΔV och δV framgår f. ö. av fig. 2. Tydligen bli ΔV och δV mindre i samma mån som frekvensen n ökas. En övre gräns för n sättes dock av de vid stora n-värden uppträdande starka kapacitiva strömmarna. I praktiken väljer man n knappast högre än 500—600 p/s.

Ökar man antalet steg, ökar också slutspänningen V enligt (10). Vid belastning inträffar, som nyss visats, ett spänningsfall ΔV, som för det fall att alla kondensatorerna ha samma kapacitet C bestämmes av sambandet (13), varav framgår att spänningsfallet ökar mycket snabbt med N. Betraktar man $V - \Delta V$ som funktion av N,

är det tydligt att $V - \Delta V$, d. v. s. den vid belastning med strömmen i verkligen förhandenvarande likspänningen passerar ett maximum, då

$$N = \sqrt{\frac{V_0 \cdot n \cdot C}{i}}. \qquad (14)$$

Om i är litet, d. v. s. om belastningen är obetydlig, kan aggregatet byggas upp av många steg, i vilka kondensatorer och likriktare endast utsättas för små påfrestningar. Är i stället belastningen kraftig, måste N väljas mindre: ett N-värde större än det som (14) bestämmer medför en minskning i stället för en ökning av den resulterande spänningen.

Om $V_0 = 100\,000$ volt, $n = 500$ p/s, $C = 0{,}025$ μF och $i = 4$ mA blir enligt (14) $N = 18$ och enligt (13) $\Delta V = 300$ kV/mA, ett utomordentligt högt värde. I praktiken väljer man därför N mycket mindre än vad som fås ur (14). Stora N-värden medföra endast en obetydlig vinst i slutspänningen men däremot stora spänningsfall ΔV också vid måttliga strömstyrkor. Ofta är det svårt att hålla i konstant, enligt (13) medföra emellertid också måttliga strömvariationer (om N är stort) stora spänningsändringar ΔV, vilket är till stor nackdel.

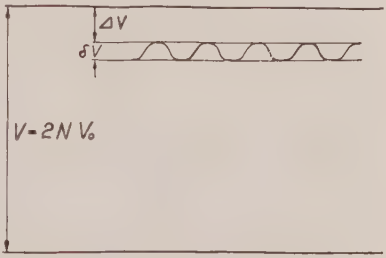


Fig. 2. Spänningsfall ΔV och vågighet δV.

Som framgår av de gjorda överläggningarna förorsaka de understa kondensatorerna också största delen av spänningsfallet ΔV. Bygges generatorn upp av kondensatorer, vilkas kapaciteter tilltaga uppifrån och ned, så att $C_1 = C_1' = N \cdot C$ och $C_N = C'_N = C$, kan man visa att

$$\Delta V = \frac{i}{n \cdot C}(1 + 3 + 5 + \ldots + 2N - 1) = \frac{N^2 \cdot i}{n \cdot C}.$$

Beräkningarna i detta avsnitt äro endast approximativa (för den fullständiga teorin hänvisas till Mehlhorns nedan citerade arbete) och i utförda anläggningar visar det sig, att såväl vågighet som spänningsfall uppgå till värden avsevärt större än vad som här angivits.

Utförda anläggningar.

I högspänningsanläggningar enligt kaskadprincipen användas som likriktare genomgående ventilrör. Dessas glödspiraler befinna sig i allmänhet på högspänning (se fig. 1), varför särskilda anordningar måste vidtagas för att tillgodose rörens behov av glödström. I de första anläggningarna löste man frågan helt enkelt på det sättet, att man anslöt glödspiralerna till ackumulatorer monterade i metallkåpor, vilka voro utförda som koronaskydd och som befunno sig på samma potential som glödspiralerna. Senare började man använda små generatorer, vilka monterades isolerade från jord och som drevos medelst isolerade axlar av en på jordpotential befintlig motor. Högvakuumventiler av den storleksordning det här är fråga om kräva avsevärda effekter för glödtrådarna, i allmänhet 100—200 watt. Gasfyllda ventiler åter, vilka på senare år konstruerats hos Philips, kräva en många gånger mindre glödeffekt, och det har lyckats den nämnda firman att framställa en gasfylld ventil med en spärrspänning av 250 kV, som endast fordrar 8 watt för sin glödströmsförsörjning.

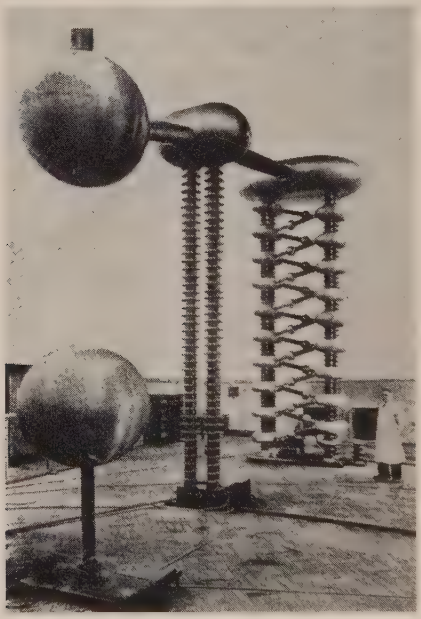


Fig. 3. Högspänningsanläggning för 2000 kV (Philips); höjd 6,25 m; vikt 1,5 ton.

Denna ringa effektförbrukning har möjliggjort en elegant lösning av glödströmsproblemet, nämligen med hjälp av högfrekvensupphettning. Högfrekvensen, t. ex. från en rörgenerator med frekvensen 500 kH ($\lambda = 600$ m), matas via särskilda isolationskondensatorer in i vardera av kondensatorpelarna C och C' i fig. 1. Mellan de olika kondensatorerna, t. ex. C_1 och C_2, äro högfrekvenstransformatorer monterade, som transformera den högfrekventa strömmen till ett för glödtråden lämpat värde. Särskilda anordningar minska utstrålningen från systemet. Mellan punkterna d

och d' är ett särskilt överföringsled anordnat för högfrekvensen (i praktiken huvudsakligen en kondensator, som dock måste tåla spänningen över ventilen V_6).

I fig. 3 är återgiven en av Philips byggd kaskadgenerator för maximalt 2000 kV och 5 mA. Den totala höjden är 6,25 m, vikten 1,5 ton och antalet steg 9. Kondensatorerna äro närmast jord på

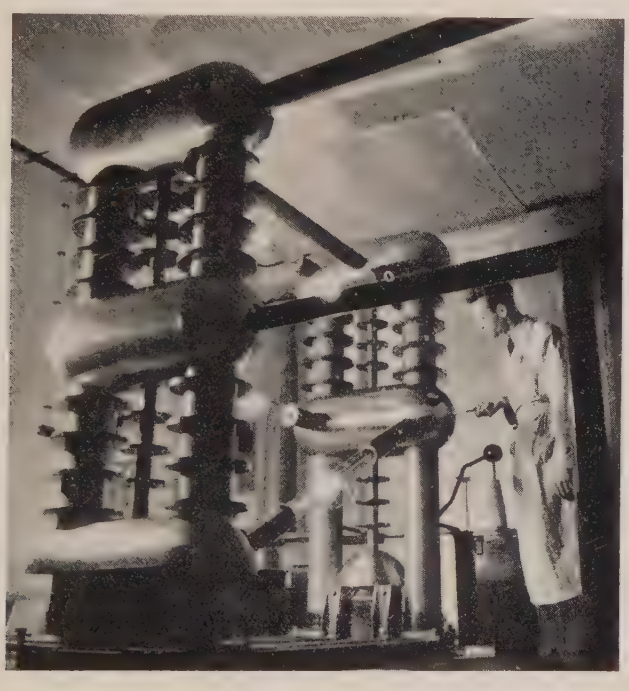


Fig. 4. Högspänningsanläggning för 400 kV vid Forskningsinstitutet för fysik i Stockholm.

0,09 μF; kapaciteten avtar uppåt och är för de översta kondensatorerna endast 0,01 μF. Primärspänningen lämnas av en transformator, som lämnar 120 kV toppspänning. Frekvensen är 200 p/s.

I vårt land finns vid Sieverts Kabelverk i Stockholm en kaskadgenerator för 600 kV och vid Vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik en anläggning för 400 kV. Den senare är avbildad i fig. 4. Antalet steg är 2. Ventilrör (högvakuumtyp) och kondensatorer (utom C_1, som endast behöver tåla 100 kV) äro dimensionerade för en maximispänning av 200 kv. Glödströmsförsörj-

ningen för ventilerna sker med hjälp av små likströmsgeneratorer, vilka sitta på en gemensam isolerad axel och drivas av en trefasmotor på jordpotential. Kondensatorerna ha följande värden: $C_1 = 0{,}05\ \mu F$; $C_2 = C_1' = C_2' = 0{,}025\ \mu F$. Kondensatorerna ligga i fyra bakelitrör av 150 mm diameter och äro två och två parallellkopplade, varvid nyssnämnda kapacitetsvärden uppnås. De fyra kondensatorpelarna, varav två och två äro förenade med koronaskydd innehållande likströmsgeneratorerna, möjliggöra en enkel och stabil konstruktion i mekaniskt avseende av generatorn.

Primärspänningen 100 kV (toppvärdet), 500 p/s, lämnas av en transformator, som i sin tur matas från en generator. Genom reglering av dennas fältström får man en kontinuerlig reglering av den avgivna likspänningen. Kaskadgeneratorns höjd över golvet är 2,1 m. Takhöjden i det rum där den är uppställd är endast 3,0 m, varför särskilda försiktighetsmått fått vidtagas för att förhindra överslag mot taket. Anbringandet av en isolerad pappersskärm mellan de översta konduktorerna och taket är ett mycket effektivt medel i detta avseende. Från ojämnheter på konduktorerna eller från en för ändamålet anbringad koronaspets spryar laddning ut mot skärmen. Denna laddas upp med samma polaritet som den spryande elektroden, varigenom fältstyrkan vid denna minskar och därigenom också risken för överslag. Belastningen utgöres av ett accelerationsrör, där f. n. elektroner accelereras, och har maximalt uppgått till 5 mA vid 390 kV, d. v. s. nära 2 kW.

Kaskadprincipen är användbar inte bara vid höga spänningar utan också för generering av de likspänningar av storleksordningen 1000 volt, som erfordras vid försök med Geiger-Müllerrör och jonisationskammare. En för ändamålet av författaren utarbetad koppling återges i fig. 5. Ventilerna (V) utgöras av selenventiler, Elektroskandia typ EEA 25/1—1 för maximalt 450 volt växelspänning (25 element à 18 volt eff.) och 40 mA likström. Med tanke på att ett Geiger-Müllerrör inte utgör någon strömbelastning, hade det varit lämpligare att välja en likriktare avsedd för mindre effekt; dylika stå tyvärr inte att erhålla f. n. I serie med metallikriktarna ligga begränsningsmotstånd (r) på ca 50 Ω i syfte att förhindra att likriktarna överbelastas vid inkopplingen (en tom kondensator, som skall laddas upp av en likriktare, innebär ju en direkt kortslutning av den senare). Ingångsspänningen regleras med hjälp av en potentiometer (R_1) och en voltmeter (mjukjärnsinstrument, Siemens AZE) parallellt med ingången kan kalibreras att ange utgående likspänning. För att likspänningen skall vara så konstant som möjligt har i serie med potentiometern inkopplats ett Philips regulatorrör 1928 (järn-vätgas-motstånd) (T_2), som

håller strömmen genom potentiometern noggrant konstant lika med 180 mA. I fig. betecknar vidare (T_1) en vanlig signallampa.

Antalet steg i kaskadkopplingen har valts så litet som möjligt för att minska vågighet och spänningsfall. Då de använda kondensatorerna av i radiotekniken vanlig typ (Alpha, provspänning 2000 V) ha en driftspänning av 650 V, erfordras för erhållande av ca 1500 V utgångsspänning 3 steg.

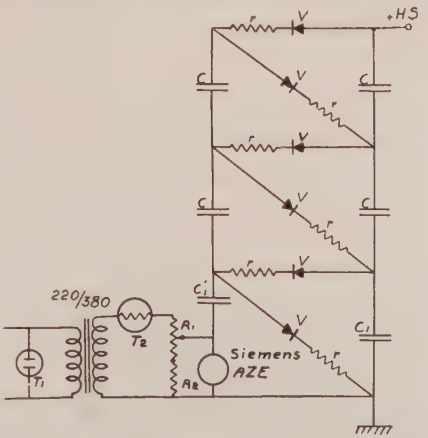


Fig. 5. Kaskadgenerator för Geiger-Müllerrör och jonisationskammare. $R_1 = 1000\ \Omega$; $R_2 = 250\ \Omega$; $C = 2\mu F$; $C_1 = C_1' = 4\mu F$. Se f. ö. texten.

I fig. 6 äro återgivna resultaten av några mätningar av spänningsfall och vågighet vid en tomgångsspänning av ca 1500 V. Som synes av diagrammet, är spänningsfallet ca 120 V vid en belastning av 0,7 mA. Enligt (11) borde man vänta ett spänningsfall av 102 V. Att (11) inte exakt återger funktionssambandet mellan ΔV och i framgår f. ö. av fig. 6, där $\Delta V = f(i)$ inte är en rät linje, som teorin fordrar.

Vågigheten vid olika belastningar är som diagrammet visar ganska betydande. Vid 0,6 mA har man enligt fig. 6 en vågighet

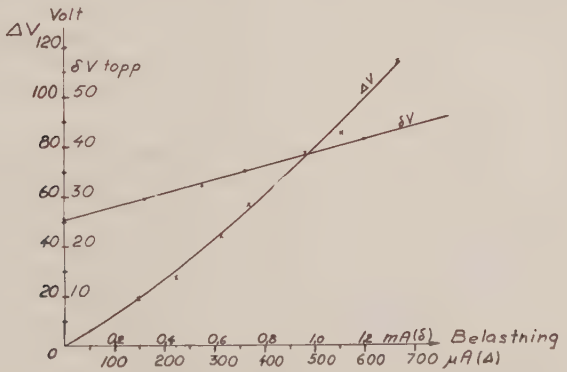
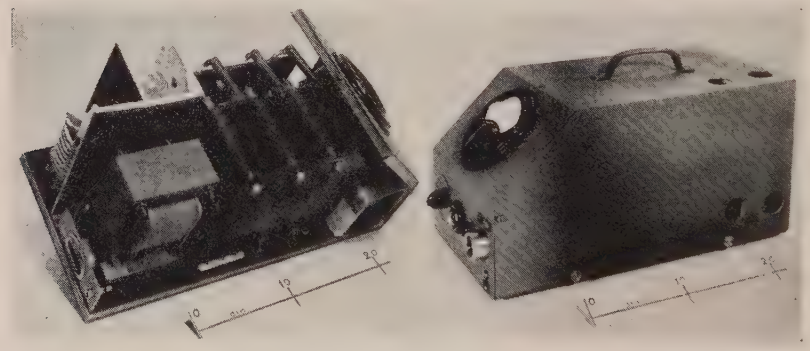


Fig. 6. Belastningskarakteristik.

av 33 V — enligt (7) skulle man vänta sig 27 V — och denna vågighet minskar endast obetydligt, då belastningen sjunker; vid tomgång uppgår den fortfarande till 26 V. Mätningar gjorda vid lägre spänningar ge lägre värde på δV (vid 990 V i tomgång 11 V). Antagligen beror vågigheten i tomgång på en återläckning genom likriktarna under den del av perioden, då de egentligen skola spärra för strömgenomgång. Vågigheten kan minskas avsevärt, om kaskadgeneratorn över ett motstånd på utgångssidan parallellkopplas med en kondensator på t. ex. 2 μF (som då måste tåla hela spänningen 1500 V). I stället för de ovan anförda värdena i tomgång vid 1500 resp. 990 V erhåller man då 8 resp. 3 V.



a *b*

Fig. 7. Interiör (*a*) och exteriör (*b*) av kaskadgenerator för 1500 V.

I fig. 7 äro återgivna interiör och exteriör av den kaskadgenerator för vilken några mätvärden lämnats ovan. Regulatorröret, som avger ca 30 watt, har placerats i ett särskilt bås skilt från den övriga delen av apparaten. Likriktarna (de horisontella, cylinderformade detaljerna i fig. 7 a) äro i ändarna fastskruvade i en vertikal isolitskiva.

Kaskadkopplade likspänningsgeneratorer byggas nu kommersiellt för spänningar upp till 2 MV. I fråga om driftsäkerhet och förmåga att avgiva ström syntes i slutet av trettiotalet kaskadgeneratorn överträffa sin svåraste medtävlare bland högspänningsgeneratorerna, nämligen van de Graaff-generatorn. Den senare har emellertid också fullkomnats i hög grad under de sista åren, och tryckisolerade van de Graaff-generatorer, som kunna belastas med flera mA, användas nu på många ställen för drift av röntgenrör i radioterapeutiskt syfte. För laboratoriets behov kunna de

båda systemen f. n. kanske anses likvärdiga: van de Graaff-generatorn lämnar en jämnare likspänning (utan vågighet) än kaskadgeneratorn, under det att den senare kan lämna mera ström (vilket förhållande dock sällan kan utnyttjas till fullo) än van de Graaff-generatorn.

Kaskadkopplingen har på sistone fått betydelse för lösning av problemet med högspänd överföring av likström. I en kaskadkoppling av den typ som beskrivits här omvandlas en relativt lågspänd växelspänning till högspänd likström, som matas in på överföringslinjerna. På mottagarsidan befinner sig en »omvänd» kaskadgenerator, där ventilrören (kvicksilverlikriktare) äro försedda med galler, så att ventilverkan kan styras genom växelspänningar, som tryckas på gallren. I en sådan koppling kan den högspända likströmmen omvandlas till lågspänd växelström, av en frekvens motsvarande den som använts för gallerstyrningen. Utomlands ha framgångsrika sådana försök gjorts i teknisk skala, och i vårt land ha nyligen liknande försök påbörjats.

Litteratur.

A. Bouwers, Elektrische Höchstspannungen, s. 48, 96 och 276. Berlin 1939.
F. A. Heijn och *A. Bouwers,* Philips' Techn. Rundschau 6, s. 46—53 och 74—79, 1941.
H. Mehlhorn, Wiss. Veröff. Siemens-Werken s. 1—46, XXI. Band, 2. Heft, 1943.
R. Nordell, Teknisk Tidskrift, Årg. 72, A & B s. 169—173, 1942.

Enkel anordning vid försök med polariserat ljus.

Av CARL RENDAHL.

På en svartfärgad pappskiva lägger man ovanpå varandra 4 till 6 skivor (30 cm · 30 cm) av ej för tjockt fönsterglas. De fasthållas av smala svärtade träribbor och skyddas mellan försöken mot damm genom ett lock.

Denna glassats *Gl* (fig. 1) lägges på ett bord, och vid ena kanten ställes en lodrät, rektangulär skärm, *Sk*, av vit tjock kartong; bredd 40 cm, höjd 45 cm. Skärmen belyses av en elektrisk lampa *La* (40 W). Den avskärmas åt sidorna och mot observatören.

Ett öga vid *A* träffas av ett från glassatsen *Gl* återkastat, konvergent ljusknippe, som skenbart utgår från den belysta skärmens spegelbild *Sk'*.

Detta ljus, som är polariserat i ett mot papperet vinkelrätt plan, passerar först en lins L ($f = 5$ cm), som ökar konvergensen. Därefter passerar det ett kristallsnitt O_1 och en liten analysator *An*.

Lämpliga objekt äro slipsnitt av kalkspat, höger- och vänstervridande kvarts, aragonit, kaliumnitrat, kandisocker, rött blodlutsalt samt blad av ljus eller mörk glimmer. Man ser nu de granna interferensfärgerna i konvergent ljus med deras ringsystem och lemniskator samt skuggpenslar. Särskilt granna bli bilderna vid glimmer i diagonalställning.

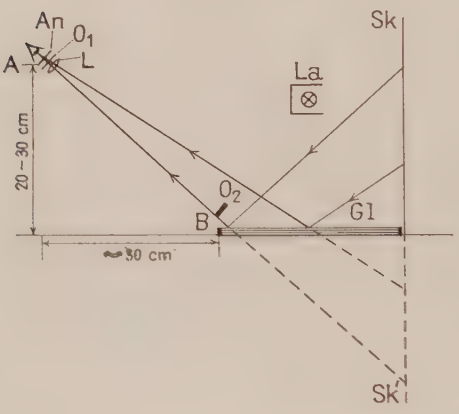


Fig. 1. Anordning vid försök med polariserat ljus.

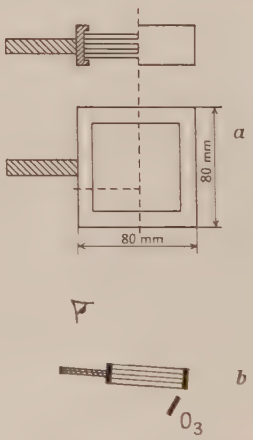


Fig. 2. *a*. Analysator bestående av 15 på varandra lagda fotografiplåtar, infattade i en ram försedd med hållare.

b. Detalj av anordning vid A utvisande glasanalysatorns (*a*) och objektets (O_3) placering vid försök med konvergent ljus.

Linsen L infattas lämpligen i en lagom tjock, kvadratisk pappskiva och på denna lägges objektet samt analysatorn. De hållas samman av en klämma. Man bör vrida anordningen åt sidorna, om vid 2-axiga kristallsnitt ej båda ringsystemen synas fullständigt.

Vill man studera kromatisk polarisation i parallellt eller svagt konvergent ljus, hålles ögat och analysatorn — utan lins — alltjämt vid *A*, men objektet ställes i en lämplig hållare (eller hålles i handen) vid *B*; objekt O_2.

Lämpliga objekt äro blad av cellofan eller på glas monterade

figurer av olikfärgad cellofan, härdat glas, pressad celluloid, glimmerskivor, lameller av bladiga gipskristaller, kristaller av benzoesyra, som fått smälta mellan två tunna glasskivor och sedan vid svalnandet kristallisera. Då analysatorns svängningsriktning är vinkelrät mot eller parallell med det infallande ljusets, framträda vackra och lysande färger. Ställes vid *B* en med glykos fylld glascylinder, ser man vid analysatorns vridning i sitt eget plan den för varje varv 2 gånger upprepade färgserien rött, gult, grönt, blått. Glykos vrider nämligen svängningsplanet för de skilda färgerna i det polariserade vita ljuset olika mycket.

Har man ej tillgång till en liten polaroidanalysator, kan man sammanlägga 15 glasskivor av formatet 8 cm · 8 cm. De utskäras ur tunna fotografiplatar, och monteras i en lämplig träram med hållare för att kunna fästas i ett stativ (fig. 2 a).

Särskilt vackert synas interferensfärgerna i parallellt polariserat ljus. Glasanalysatorn hålles något framåtlutad. Vid försök med kristallsnitt vid *A* i starkt konvergent ljus hålles snittet enligt fig. 2 b vid O_3 något under glasanalysatorn och vrides i olika riktningar.

Den ovan beskrivna anordningen är billig. Försöken kunna utföras i ljust rum. Direkt solljus eller starkt dagsljus bör avskärmas. Försöken passa för intresserade elever, som vilja studera några enkla grundfenomen inom detta lockande område.

Not. I Elementa *21*, s. 105, 1938 beskrives en anordning för polarisation i konvergent ljus. Om linsen med $f = 10$ cm utbytes mot 3 sammanställda linser med brännvidderna 10, 5, 5 cm resp., synas vid försök med glimmer båda ringsystemen samtidigt.

Om man har två polaroider, bör man ej försumma att betrakta kristallsnitt mellan korsade eller parallella polaroider mot en ljus bakgrund, ljusa moln eller snö. Lins användes ej. Betagande, genomskinliga färger.

Meddelande från föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Tisdagen den 3 april 1945 höll föreningen tillsammans med Biologilärarnas förening ett vårsammanträde på Stockholms byggnadsförening, Norrlandsgatan 11, Stockholm. Sammanträdet öppnades kl. 9.30 av ordföranden, rektor Torsten Wetterblad, som meddelade, att styrelsen från adjunkt S. G. Cederstrand mottagit en skrivelse, vari denne föreslog styrelsen att anordna en sällskapsresa för föreningens medlemmar till området för den totala solför-

mörkelsen den 9 juli. Dr CEDERSTRAND kommenterade sitt förslag, varefter sekreteraren redogjorde för de förberedelser som vidtagits för en eventuell resa. Sveabolaget hade meddelat, att ingen båtförbindelse med Skellefteå på grund av bränslebristen kunde anordnas i sommar. Förslagsställaren hade tänkt sig, att studiebesök vid någon eller några industrier skulle anordnas för resedeltagarna, men alla industriföretag som tillfrågats om dylika studiebesök, hade avböjt. Därtill kommer svårigheterna att ordna inkvarteringsfrågan. Skellefteå stad har i sommar en jubileumsutställning, varför inkvarteringsmöjligheterna där äro mycket små. På grund av alla dessa samverkande, ogynnsamma omständigheter har styrelsen ansett sig nödsakad att avstå från att anordna en gemensam sällskapsresa.

Vid sammanträdet förekom vidare föredrag, dels av nobelpristagaren, professor GEORG VON HEVESY, som talade om konstgjorda radioaktiva ämnen och deras användning, dels av professor ARNE TISELIUS, vars föredrag handlade om elektronmikroskopet i virusforskningens tjänst. Föreningen står i stor tacksamhetsskuld till dessa framstående forskare för den villighet varmed de ställt sig till föreningens disposition och för de utomordentligt intressanta redogörelser de lämnade över aktuella forskningsområden, inom vilka de själva äro aktivt verksamma.

Efter sammanträdet följde gemensam lunch. Sammanträdet var besökt av ett 80-tal av de båda föreningarnas medlemmar.

Bror Gustaver.

Bokanmälningar.

T. BJERGE, *Elektricitet og Magnetisme*. 2. ændrede Udgave. Ejnar Munksgaard, København 1944, 291 s.

Den första upplagan av Professor Bjerges lärobok i elektricitet och magnetism utkom 1941. Den är liksom de tidigare i Elementa anmälda böckerna »Lyslære» av samme förf. och »Mekanisk Fysik» av E. S. Johansen[1] avsedd för de studerande vid Danmarks tekniske Højskole. Föreliggande upplaga har utökats med ett kapitel om vektorräkning och dess användning på elektromagnetiska fält. I övrigt förekomma desutom mindre tillägg och omredigeringar. Emedan boken icke tidigare anmälts i Elementa, torde en kort redogörelse för innehållet vara av intresse.

[1] Elementa 27, (1944), s. 170 resp. 25, (1942), s. 214.

I början av de båda första kapitlen, elektrostatik och magnetostatik, återfinnes den Coulombska lagen för kraftverkan mellan elektriska och magnetiska laddningar. Förf. använder sig nämligen av begreppet magnetismmängd — givetvis endast såsom en matematisk hjälpstorhet — i tydlig avsikt att uppnå parallellitet i framställningen inom de båda kapitlen.

Med hjälp av några enkla försök, hämtade från gränsområdet mellan statik och dynamik, erhålles en naturlig övergång till den elektriska strömmen och dess magnetiska verkningar. I detta avsnitt samt i kapitlet Induktion använder förf. en rad högerhandsregler, bl. a. tumregeln och lillfingersregeln, för att erhålla en orientering över riktningen av kraftlinjer, rörelser och inducerade spänningar. Frågan är, om man inte med hjälp av den Maxwellska skruvregeln och kraftlinjernas allmänna egenskaper erhåller en enklare tydning av ifrågavarande fenomen.

I några avsnitt behandlas mätinstrument och mätmetoder för likström och växelström, elektriska maskiner, transformatorer, likriktare, elektroakustiska apparater m. m. Förf. fördjupar sig härvid i regel inte i tekniska detaljer, men ger en klar framställning av de fysikaliska grunderna. Detta hindrar ej, att han ofta reder ut frågeställningar och förtydligar termer, hämtade från mer tekniskt betonad fysik. Man saknar här en beskrivning av kWh-mätaren, ett av de vanligaste elektriska mätinstrumenten. Såsom måttsenheter användas huvudsakligen det tekniska systemets, men c.g.s.-enheterna erhålla dock en kort beskrivning.

De tre sista kapitlen behandla elektriska svängningar, Maxwells teori för det elektromagnetiska fältet och elektriska vågor.

Det är ju klart att var och en har sina önskningar beträffande innehållet i en elektricitetslära — i föreliggande bok saknas sålunda nästan helt en framställning av elektricitetsledning genom elektrolyter, gaser och vakuum — men man måste ändå konstatera, att innehållet begränsats på ett lyckligt sätt. Boken är lättläst, icke endast på grund av dess begränsning utan framför allt på grund av förf:s klara och enkla stil, där oväsentliga detaljer ha uteslutits och där matematiken smidigt lånat sina tjänster till fysiken. Boken kan rekommenderas lärare, ingenjörer och andra såsom självstudium och repetitionskurs i elektricitetslära.

Birger Grundström.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 22, 1944, 176 s. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavg. kr. 10, medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Lilljeborgsv. 3, Uppsala.

Den senaste årgången av »Kosmos» inledes med en dödsruna av dr Anna Beckman över framlidne professor C. W. Oseen, Svenska Fysikersamfundets förste ordförande, vari skildras Oseens insatser till samfundets fromma. En teckning av denne forskares vetenskapliga insatser är avsedd att inflyta i nästa band av tidskriften. I en dödsruna över den i förfjor avlidne holländske nobelpristagaren P. Zeeman behandlar professor E. Hulthén omständigheterna kring och betydelsen av upptäckten av den magnetooptiska effekt, som bär Zeemans namn. De nya nobelpristagarna i fysik och kemi presenteras i en kort artikel av dr Anna Beckman.

I tvenne uppsatser av rent fysikaliskt innehåll avhandlas den kosmiska strålningen och frågan om mesonens livstid. Den kosmiska strålningen behandlas av fil. lic. K. G. Malmfors, varvid en översiktlig framställning ges av de undersökningar, som på detta forskningsområde utförts under det senaste decenniet, särskilt de arbeten, som gällt utforskandet av strålningens natur och studiet av skurfenomenet. De allra senaste årens undersökningar över den viktiga frågan om livstiden för de obeständiga mesonerna skildras av dr Rozenthal i en intressant uppsats, vari i synnerhet de geniala men på samma gång i princip enkla försöksanordningarna för bestämning av denna storhet behandlas.

En för många fysikaliska undersökningar betydelsefull teknik, konsten att framställa goda polerade ytor, är ämnet för en uppsats av fil. kand. Tryggve Johansson. I denna skildras utvecklingen av teorierna för denna teknik under de senaste 25 åren, särskilt med avseende på förståelsen av poleringsförfarandets verkan. Överingenjör Å. T. Vrethem beskriver i en artikel åskans inverkan på elektricitetsförsörjningen och de skyddsanordningar, som för detta ändamål förefinnas vid distributionen av den elektriska energien. Bandet avslutas med en större uppsats av docent Helmer Bäckström, vari ingående behandlas de undersökningar, som under de senaste decennierna utförts för att klarlägga den fotografiska processens natur. Förf. skärskådar närmare den teori, som framställts 1938 av Gurney och Mott och numera i stort sett synes vara allmänt antagen, och skildrar försök, som utförts för att pröva densamma, samt fenomen och effekter, som genom teorien kunnat vinna förklaring.

Nils Ryde.

John H. Villis, *Weatherwise. Englands Weather Through the Past Thirty Years*, London 1944, second impression, 108 sid., 7 s. 6 d.

Detta är ej någon lärobok i meteorologi; ej heller är det någon redogörelse för Englands klimat i egentlig mening, vilket man möjligen skulle kunna tro av titeln att döma. Boken innehåller 30 »årskrönikor» över vädret från en viss plats i England. Den 30-åriga »resan» börjar under en av århundradets mildaste vintrar, 1913, och slutar 1942 med en av de kallaste vintrarna på ett par hundra år. Man kunde mycket väl misstänka, att det skulle bli 30 torra årsredogörelser över vädret, men så är ingalunda fallet. Förf., som är en av observatörerna åt Meteorological Office i London, har förmått servera sina många iakttagelser i en synnerligen njutbar form. Att han varit en utomordentlig intresserad meteorologiens tjänare är alldeles uppenbart. Någon närmare redogörelse för innehållet i boken kan knappast komma i fråga här. Några klimattabeller, som innehålla maximum-, minimum- och medeltemperatur samt nederbörd och solskenstid för varje månad under 30-årsperioden, komplettera årsöversikterna och ökar överskådligheten. Framställning illustreras slutligen av 132 förnämliga fotografier av snödroppe, påsklilja, kastanj och bok. En och samma planta resp. gren har fotograferats vid samma tidpunkt varje år, varigenom man får en mycket god uppfattning om hur stränga eller milda vintrarna varit samt hur långt våren framskridit varje år. Helhetsintrycket av denna unika bok är mycket gott.

H. Henrikson.

Noel L. Allport, *Colorimetric Analysis*. Chapman & Hall Ltd, London 1945. 452 sid., pris inb. kr 37:— inkl. skatt.

Förf. har enligt förordet velat tillgodose behovet av en praktisk handledning i kolorimetrisk analys av måttligt omfång. Han har för att arbetet skall fylla det sista villkoret nödgats helt utesluta behandlingen av alla teoretiska spörsmål och beskrivningen av de instrument, som användas vid denna analys. Arbetet vänder sig sålunda i första hand till kemister, som redan äro insatta i de kolorimetriska arbetsmetoderna och begagna dem i sitt yrke eller sin forskning. Följande översikt över kapitelrubrikerna ger en föreställning om metodikens mångsidiga användbarhet. I Metaller, II Syraradikaler, III Ämnen med klinisk eller biokemisk betydelse, IV Alkaloider, hormoner och vitaminer, V Diverse ämnen. Efter den utförliga och noggranna redogörelsen för bestämningsmetoderna för varje särskilt ämne följer en diskussion, där metoderna vägas mot varandra och särskilda försiktighetsmått eller försöksdetaljer framhävas.

Arbetet förefaller att vara ett värdefullt tillskott till litteraturen på ifrågavarande område. Framställningen är som i regel hos engelska författare enkel och rakt på sak gående, och boken kan studeras med nöje även av den, som inte har någon egen erfarenhet på detta arbetsområde.

G. Starck.

K. Helmer Gustavson, *Läder, dess kemi, tillverkning och egenskaper.* Bonniers, Stockholm 1944, 291 s., inb. kr 13:50. (Tekniskt Folkbibliotek XVI.)

Den både vetenskapligt och tekniskt högt meriterade författaren ger här en koncentrerad redogörelse för lädrets mångsidiga teknologi och kemi, belyst av diagram och ett stort antal helsidesfotografier. Boken, som är avsedd för såväl yrkesmän som naturvetenskapligt intresserade, förutsätter kemiska kunskaper. Intressant är att ur den välskrivna framställningen oupphörligt konstatera, huru den moderna fysikaliska och organiska kemien lyckats belysa och förklara många av de uråldriga garvericketekniska processerna och i vissa fall helt revolutionerat lädertekniken.

Även en större allmänhet torde vara intresserad av redogörelsen för de viktigaste lädersorterna, som ingå i reseffekter, bilar, handskar, portföljer, bokband etc. Värdefulla upplysningar lämnas rörande skodonens vård, läderfärgens betydelse för fötternas temperatur, lackskors olämplighet samt skokrämens och fotsvettens inverkan. Att liktornar ha rykte som väderleksspåmän förklaras bero på att skorna krympa och därför klämma mer, då luften blir torrare.

E. Nordefeldt.

F. G. Müller, *Theoretische Kapitel aus der allgemeinen Chemie. Anhang: Lösungen zu den Übungen.* Vierte Auflage 1945, 92 + 20 s., Verlag Ernst Wurzel, Zürich. Kr. 5:20 + 2:30.

Boken ger i koncentrerad form en framställning av den allmänna och fysikaliska kemiens grunder i ungefär samma omfattning som vår gymnasiekurs. Här behandlas översiktligt atom- och molekylteorien, kemiska formlers innebörd och användning, syror, baser och salter, massverkans lag, gaslagarna, jonteori, principerna för bestämning av molekyl- och atomvikter samt periodiska systemet. Radioaktivitet och atomfysik samt illustrationer saknas. Räkneuppgifterna inom de olika områdena (162 exempel) äro väl valda. Lösningarna härtill lämnas i ett särskilt häfte.

Boken kan, trots enstaka tryckfel, rekommenderas vid repetitioner för studentexamen.

E. Nordefeldt.

Bonniers Konversationslexikon, band X, Stockholm 1945, hfrb. kr. 27: 50.

Bandet omfattar *Nerman—Psalm* och upptager 1576 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som äro av intresse, må nämnas: *Neutrino, Neutron, Newton, Nickel, Norrsken, Nya stjärnor, Objektiv, Oscillograf, Osmium, Osmos, Packningsbråk* (ett oskönt ord, som rec. gärna såge ersatt med *packningskvot*), *Pendel, Petroleum, Pipa, Planetsystemet, Polarisation* (de två sistnämnda art. välskrivna och koncentrerade), *Polarografi, Positron, Potens, Potential, Prisma* och *Proton.*

Listan över »rättelser och tillägg» har tyvärr ej influerats av de små sakliga anmärkningar, som gjorts i recensionen av näst föregående band, publicerad i Elementas decembernummer 1944.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Bengt Ekenberg, *A Study of Visual Binary Stars with Regard to the Errors of Observation and the Problem of Orbit Determination.* Lund 1945, 190 s. — Disp. vid Lunds Universitet den 14 mars 1945. Opponenter: docent Erik Holmberg och fil. mag. Henrik Kristenson.

Avhandlingen behandlar de verkliga eller fysiska dubbelstjärnsystemen. Ett dylikt system består av två stjärnor, vilka under inflytande av den ömsesidiga gravitationen röra sig i elliptiska banor kring den gemensamma tyngdpunkten. Vidare har behandlingen begränsats till att gälla enbart de visuella systemen. De båda komponenterna i ett dylikt system kunna (till skillnad från komponenterna i en spektroskopisk dubbelstjärna eller en förmörkelsestjärna) iakttagas åtskilda, antingen visuellt eller fotografiskt.

Av de fem kapitlen i avhandlingen behandla de båda första frågan om observationsfelen vid de mätningar, som utföras i och för bestämning av komponenternas relativa bana. Vid dylika mätningar bestämmer man i regel dels det angulära avståndet mellan komponenterna, dels positionsvinkeln (= vinkeln i förhållande till nord-syd-linjen på himlen) för den ljussvagare komponenten i förhållande till den andra. Efter en översikt över olika metoder att eliminera eller bestämma de systematiska felen i visuella dubbelstjärnmätningar kommer förf. in på egna undersökningar,

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

vilka grunda sig på en jämförelse mellan observerade och beräknade värden på avstånd och positionsvinklar. De beräknade värdena grunda sig på tidigare gjorda banbestämningar för 42 dubbelstjärnor. De observerade värdena äro mätningsresultat, erhållna av sju kända observatörer. Av särskilt intresse äro resultaten i fråga om avstånden. Bl. a. befinnes det, att de flesta av observatörerna ha en benägenhet att mäta de allra minsta vinkelavstånden (till storleksordningen mindre än ungefär 0″,30) betydligt större, än de i verkligheten äro. Däremot synas de flesta observatörers systematiska fel icke uppvisa några större variationer från en tidpunkt till en annan.

De tre sista kapitlen gälla mera direkt banbestämningsproblemet. Först ges en översikt över de många banbestämningsmetoder, som föreslagits under det senaste decenniet. Därefter framställes en av förf. själv utarbetad metod. Genom denna överföres så att säga det vanliga problemet: att ur givna observationer beräkna banelementen, till det motsatta, vida enklare: att ur givna banelement beräkna den ljussvagare komponentens lägen vid givna tidpunkter. Detta sker på så sätt, att ett diagram, som ger sambandet mellan de observerade positionsvinklarna och observationstiderna för den dubbelstjärna, vars bana skall bestämmas, jämföres med en serie på förhand uppritade nomogram. Genom denna jämförelse erhållas så gott som omedelbart preliminära värden på banelementen. Det sista kapitlet innehåller banbestämningar för tio dubbelstjärnor, av vilka sex bestämts med den ovan skisserade »efemeridkurve-metoden».

Alf Nyberg, *Synoptic-aerological Investigation of Weather Conditions in Europe 17—24 April 1939.* Stockholm 1944, Geografiska Annaler, årg. 26, 1944; Statens meteorol.-hydrografiska anstalt: Meddelanden, serien »Uppsatser no 48». 122 s. Disp. vid Uppsala Universitet den 10 februari 1945. Opponenter: Professor Hilding Köhler, Uppsala, och professor Erik Palmén, Helsingfors.

Den synoptiska meteorologien befinner sig i början av sin utveckling, och de lösningar till en mängd problem som givits av teoretici under förenklande antaganden måste prövas med hjälp av iakttagelser inte blott vid marken utan även i högre nivåer. Det observationsmaterial från högre luftlager, som i allmänhet står till förfogande, är mycket sparsamt, men under s. k. internationella veckor ökas observationerna överallt och sådana veckor äro särskilt avsedda för noggranna undersökningar. Kända observationer av temperatur och fuktighet i högre luftlager utfördes

tätare än eljest med flygplan och radiosonder 17—22 april 1939. Materialet, som omfattar ett femtiotal stationer med dagliga sonderingar i hela Europa, från Reykjavik och Tromsö i norr till Marocko och Malta i söder, från Angra på Azorerna i väster till Rostow i öster har granskats och korrigerats med hjälp av antaganden om fel i tryck eller temperatur som äro konstanta under hela sonderingen. En metod att skilja tryck och temperaturfel från varandra har utarbetats.

Luftens temperaturtillstånd och rörelse i olika nivåer har beskrivits med hjälp av kartor, som visa geopotentialen (approximativt även höjden) vid tryckytorna 700, 500, 300 och 200 mb, samt temperaturen vid dessa nivåer. Metodiken för ritning av geopotentiallinjernas och isotermernas gång i och nära fronter har utvecklats. Vindbanor som visa luftens horisontella rörelse under ett dygn i fasta nivåer ha beräknats ur geopotentialkartorna, på vilka förloppet av isogeopotentiallinjer visa vindens approx. riktning; avståndet mellan linjerna ger gradientvindstyrkan.

Genom studium av luftens specifika fuktighet samt nederbördsförhållandena i de områden, som luften strömmat över, har beräkning av vertikala rörelser kunnat genomföras. I ett fall har en avvikelse från gradientvinden uppgående till 15° åt höger kunnat påvisas i samband med en retardation av luften. Termoisopletdiagram visande temperaturens och potentiella fukttemperaturens förlopp i vertikala snitt ha uppritats. Flera konstateranden av tidigare erhållna resultat ha gjorts, såsom att ett inbrott av varmluft sker från nordväst i högre luftlager, att vinden är starkast i tropopausnivån, dvs. på omkring 10 km, och att den horisontella temperaturskillnaden i denna nivå är mindre än i lägre och högre nivåer.

Företeelserna i atmosfären äro ytterst komplexa, och generaliseringar av vunna resultat måste i allmänhet anstå. Undersökningen, som utförts med Bergenskolans idéer som ledtråd, har givit resultat, som i flera avseenden äro oförenliga med dessa idéer. Existensen av distinkta fronter i högre luftlager är i många fall oemotsäglig, men det finns starka skäl att anta, att existensen av fronter varken är ett nödvändigt eller tillräckligt villkor för bildning av cykloner eller regnområden i cykloner. Vid en vågstörning över Skottland den 21 april fanns till att börja med inga fronter i de högre luftlagren men bildades efterhand genom cirkulationen för att senare åter upplösas genom vertikalrörelser.

Då en cyklon ockluderas häves den varma luften i dess centrum och omvandlas i högre nivåer till kalluft i samband med att vatt-

net utfälles som regn. Denna process, som ofta beskrivits som en diskontinuerlig process, har den 21—24 april ett fullt kontinuerligt förlopp, så att den kalluft, som vid marken först kommit in i cyklonen, uppträder som varmluft i förhållande till senare inströmmande kalluft och därvid stiger uppåt och ger nederbörd.

Den omvandling som varmluften undergår i cyklonerna motsvaras av kalluftens omvandling till varmluft i anticyklonerna. I områdena mellan cykloner och anticykloner kan omvandlingen gå synnerligen långsamt. En kalluftmassa, som den 17 april strömmade ned över Mellaneuropa mot Sydryssland, avskars från sin förbindelse med den nordliga kalluften, då varm luft trängde fram mot öster över mellersta Ryssland (55° N) den 20 april. Ännu den 21 hade kalluften samma egenskaper som den 17; först därefter började luften uppvärmas i samband med att ett högtryck bildades i Sydryssland, i vilket nedåtgående luftrörelser förekommo.

Användningen av luftmassebegrepp kan bli vilseledande. Omvandlingen av en luftmassa kan icke följas medelst markobservationer och kan, som nämnts, vara mycket långsam. Så till exempel strömmade en del av kalluften upp till 2 km i Mellaneuropa den 17 april mot väster, gick runt ett högtryck med centrum i södra England och uppträdde den 21 som varmluft i en ny vågstörning över Skottland, varvid den potentiella fukttemperaturen endast stigit 2°. Den varmluft, som ingick i varmsektorns högre skikt hade ett helt annat ursprung, vilket visar störningens komplexa natur.

Vattenhalten i en cyklon har beräknats under vissa antaganden. Betydelsen av de lägsta skikten för nederbördsbildningen har påvisats. Om en med fuktighet mättad luftpelare höjes 1 km, avgives en vattenmängd, varav 30 % kommer från det lägsta 1 km tjocka skiktet, medan 85 % kommer från ett skikt närmast marken 4 km tjockt.

Några fall då instabilitet i luftmassan kan ha uppkommit genom vindökning med höjden, som medfört hastig avkylning där, har diskuterats. Ett fall med instabilitetsbildning genom varmluftstillförsel vid marken har likaså beskrivits.

Det har visats hur den av Palmén beskrivna nedsjunkningen av tropopausen sydväst om cykloncentrum är ett mycket vanligt fenomen, men frågan om dessa tropopaustrattars betydelse för väderleksutvecklingen är oklar.

En mängd andra oklara problem ha behandlats utan att kunna definitivt lösas med hjälp av det givna materialet. Det har visats att tryckförändringarna delvis äro beroende av faktorer långt utanför undersökningsområdet och att följaktligen kommande undersökningar måste utsträckas att omfatta ett betydligt ökat nät av aerologiska observationer.

Föredrag under våren 1945 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Lunds Matematiska Sällskap, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. B. Holmberg.

Föredrag: fil. mag. S. Andersson, Om Warings sats ($^{16}/_{2}$); fil. kand. Ingrid Lindström, Matematiska kuriositeter ($^{21}/_{3}$); prof. H. Bohr, Om sannolikhetskalkylens matematiska grundvalar ($^{4}/_{5}$).

Kemiska Föreningen, ordf. docent K. J. Karrman, sekr. amanuens Torsten Nilsson.

Föreningen för matem.-naturv. undervisning se *28* s. 101.

Föredrag: disponent B. Höglund, Några intryck från U. S. A:s kemiska industri ($^{2}/_{2}$); fil. dr E. Troell, Krut och sprängämnen i modern krigföring ($^{9}/_{3}$); prof. G. Ahlgren, De kemiska primärreaktionerna vid läkemedelsverkningar ($^{4}/_{5}$); Studiebesök å Sveriges Utsädesförening, Svalöv. Visning av laboratorierna jämte orienterande föredrag av prof. Åkerman, dr Lindberg, docent Levan och dr Granhall ($^{18}/_{5}$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Hilding.

Föredrag: prof. H. Faxén, En ny lösning till ett klassiskt hydrodynamiskt problem ($^{6}/_{2}$); fil. kand. O. Hanner, Fyrfärgsproblemet och dess utveckling ($^{17}/_{4}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. Lindh, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Årsmöte med föredrag av Dr S. Rozental, Draabemodellen for Atomkernen ($^{27}/_{2}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Hulthén, sekr. fil. dr N. Svartholm.

Föredrag: fil. mag. H. Rådström, Något om raketens teori ($^{29}/_{1}$); docent K. Siegbahn, Experimentella undersökningar över β- och γ-strålning ($^{12}/_{3}$); prof. G. Ising, Fysikaliska synpunkter på fåglarnas orienteringssinne ($^{28}/_{5}$); fil. lic. E. Fredlund, Om radiometereffekten ($^{4}/_{6}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén.

Föredrag: fil. dr H. Willstædt, Nyare försök om tuberkulosens kemoterapi ($^{16}/_{3}$); prof. A. I. Virtanen, Nyare rön betr. den biologiska kvävebindningen ($^{13}/_{4}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: docent J. Lotz, De två Bolyai ($^{27}/_{4}$); fil. dr H. Heyman, Demonstration av Universitetsbiblioteket ($^{25}/_{5}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent S. v. Friesen, v. ordf. docent P. Ohlin.

(Forts. å sid. 116.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1390) *I en rät stympad kon med basradierna R och r samt höjden h tänkas generatriserna vara elastiska trådar. Vrides den ena bascirkeln vinkeln* $v \leqq 180°$ *omkring konens axel, tänjas trådarna och bilda en hyperboloidmantel. Beräkna volymen som inneslutes mellan denna och konmanteln.* *X.*

1391) *Om serien* $\sum_1^\infty a_r^2$ *är konvergent, så är* $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_1^n a_r = 0$. *(Talen* a_1, a_2 ... *äro reella).* *Hg.*

1392) *a) Att bestämma maximum för volymen av en cylinder, vars bascirklar ligga en på vardera av två givna koncentriska sfärer.*

b) Att bestämma maximum för volymen av den öppna låda, som erhålles av en given rektangulär platta, om kvadrater utskäras ur hörnen och kanterna sedan vikas upp.

Vilket enkelt samband finnes mellan a) och b)?

Gösta Danielsson.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1393) I en geometrisk serie med första termen 1 är summan av termerna med udda ordningsnummer 85 och summan av termerna med jämnt ordningsnummer 42. Sök serien.

Svar: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64.

1394) Visa, att ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ satisfieras av $x = 2 \sin 10°$ samt beräkna övriga rötter.

Svar: $2 \sin 50°$ och $2 \sin 250°$.

1395) Från punkterna *A*, *B* och *C* i samma horisontalplan synes ett torn rakt i öster. Toppens elevationsvinklar i *A*, *B* och *C* för-

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1393—1395, 1397—1404 äro insända av *B. Svenonius;* 1396 av *A. A.*

hålla sig som 1 : 2 : 3. Bestäm toppens höjd över horisontalplanet, om $AB = a$ och $BC = b$.

Svar: $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$.

1396) Uttryck $\frac{(1-\sin 50°)(0{,}5+\cos 80°)}{4+8\sin 70°}$ som en funktion av $\sin 20°$.

Svar: $\sin^4 20°$.

1397) Ett regelbundet tresidigt prisma skäres av ett plan så, att snittytan blir en likbent och rätvinklig triangel. Sök vinkeln mellan snittytan och bottenytan.

Svar: 54,73°.

1398) I ett rätvinkligt koordinatsystem äro utplacerade sex punkter: $O\,(0;0)$, $A\,(a;0)$, $B\,(b;0)$, $C\,(0;c)$, $D\,(d;c)$, och $E\,(e;c)$. Visa, att skärningspunkterna mellan OD och AC, OE och BC samt AE och BD ligga i rät linje.

1399) Visa, att de gemensamma tangenterna till kurvorna $x^2+y^2=1$ och $y^2=4x-4$ tillsammans bilda en liksidig triangel samt beräkna dennas yta.

Svar: $3\sqrt{3}$ ytenh.

1400) I en likbent triangel, vars bas och höjd äro lika, inskrives en ellips, vars ena axel faller utefter höjden. Sök ellipsens excentricitet, om dess yta skall vara ett maximum.

Svar: $e=\frac{1}{2}$.

1401) En korda genom ena brännpunkten i en hyperbel bildar 60° vinkel med transversalaxeln och delas av brännpunkten i två delar, som förhålla sig som $1 : n$. Bestäm hyperbelns excentricitet.

Svar: $e=\frac{2(n-1)}{n+1}$; $n>3$.

1402) Från ena ändpunkten av storaxeln i en ellips upptager den närmaste parametern samma synvinkel som lillaxeln sedd från en av brännpunkterna. I en annan ellips synes från lillaxelns ena ändpunkt storaxeln under dubbelt så stor vinkel som brännpunktsavståndet. Vilken av ellipserna har den största excentriciteten?

Svar: Den förra, som har $e>\frac{1}{2}$, medan den senare har $e<\frac{1}{2}$.

1403) Från en punkt på sidan AB i en given triangel ABC drages en normal. Denna råkar sidan BC i D. Var skall P väljas för att ytan av triangeln PDA skall bli ett maximum?

Svar: Mitt på AB.

1404) Vilken är den största spetsiga vinkel, som medianerna mot kateterna i en rätvinklig triangel kunna bilda med varandra?

Svar: 36,87°.

Lösn. till uppg. 1362—1364.

1362) *I en konvex fyrsiding kan en cirkel inskrivas. Sök relationerna mellan radierna i de tolv cirklar, som tangera tre men i allmänhet ej fyra av sidorna.* *N. J.*

Den givna cirkeln antages vara $x^2 + y^2 = 1$, och a) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$, b) $x\cos\beta + y\sin\beta - 1 = 0$, c) $x\cos\gamma + y\sin\gamma - 1 = 0$, d) $x\cos\delta + y\cos\delta - 1 = 0$ fyra tangenter till denna, som bilda fyra trianglar (a, b, c), (b, c, d) ... Vi betrakta nu triangeln (a, b, c). Dessa linjer indela planet i 7 områden. Fyra av dessa innehålla var sin av de fyra cirklar (den givna medräknad), som tangera a, b, c. Till det område, där den givna ligger, gränsar vid a ett annat. Finnes någon cirkel inom detta, som tangerar a, b, c? Dess centrum $(x; y)$ och radie r skulle erhållas ur systemet: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = r$, $x\cos\beta + y\sin\beta - 1 = -r$, $x\cos\gamma + y\sin\gamma - 1 = -r$ (A), vilket ger $\frac{1}{r} = -\cot\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\gamma}{2}$ (B). Resultatet kan direkt erhållas planimetriskt. Är den givna cirkeln inskriven eller vid a vidskriven, utfaller $\frac{1}{r}$ positivt och är inverterade värdet av radien i den vid a vidskrivna, resp. inskrivna cirkeln. Vi införa symbolen $\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{1}{r}$. Är däremot den givna vidskriven vid b eller c, finnes ingen önskad cirkel inom det intill a gränsande området. (A) ger negativt värde på $\frac{1}{r}$. Vi sätta fortfarande $\left(\frac{a}{d}\right) = -\cot\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\gamma}{2}$, som då betyder inverterade värdet med ombytt tecken av radien i den vid c, resp. b vidskrivna cirkeln, såsom framgår av (A), om man byter tecken för de tre högra leden. På samma sätt tolkas t. ex. talvärdet av $\left(\frac{b}{c}\right) = -\cot\frac{\beta-\alpha}{2}\cot\frac{\beta-\delta}{2}$ o. s. v. Även om cotangensfunktionen ersättes med en udda funktion v. s. h. gäller identiskt: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = -\left(\frac{d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)$ (1) och vidare genom cyklisk permutation av b, c, d: $\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{d}{a}\right) = -\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{d}{b}\right)$ (2), $\left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = -\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c}\right)$ (3). Det finnes ytterligare 9 sådana relationer bl. a. $\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{b}\right) = -\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$. Multipliceras ledvis med (1) fås $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$ (4) och genom permutation

$\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = \left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{d}{b}\right)$ (5), $\left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{d}{a}\right) = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)$ (6), vilka kunna ersätta tre nya ekv. av typ (1). Sedan finnas inga andra av redan nämnda oberoende relationer av denna typ. Men den välbekanta formeln $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, som verifieras allmänt med hjälp av (B), ger $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{d}{b}\right) = 1$ (7), $\left(\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{d}{c}\right) = 1$ (8), $\left(\frac{a}{d}\right) + \left(\frac{b}{d}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = 1$ (9) Ekvationerna (1) ... (9) utgöra ett system av nio av varandra oberoende relationer mellan de tolv radierna. Om man nämligen sätter $\left(\frac{a}{b}\right) = \lambda$, $\left(\frac{a}{c}\right) = \mu$, $\left(\frac{a}{d}\right) = \nu$, kan man lösa systemet och få $\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{\lambda(1-\nu)}{\lambda-\mu}$, $\left(\frac{d}{c}\right) = -\frac{\lambda(1-\mu)}{\nu-\lambda}$, $\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\lambda(1-\mu)(1-\nu)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}$. Talen $\left(\frac{d}{b}\right)$ och $\left(\frac{b}{c}\right)$ erhållas genom cyklisk permutation ur $\left(\frac{c}{d}\right)$ o. s. v. Känner man tre, kunna alltså de nio återstående beräknas. *X.*

1363) *En cirkel, två punkter P och Q, sträckan k samt vinkeln a äro givna. Att konstruera punkterna A och B på cirkeln så, att AB = k och vinkeln mellan PA och QB = a.* *X.*

Om O är cirkelns medelpunkt är $\angle AOB = \beta$ känd. Vrides triangeln AOP vinkeln β kring O, faller A i B och P i P_1. Linjen P_1B (eventuellt förlängd) gör med PA vinkeln β. Alltså blir $\angle P_1BQ = \beta - \alpha$, om vi förutsätta att $\beta > \alpha$. Konstruktionen blir alltså: Avsätt $\angle POP_1 = \beta$ åt endera hållet, så att $OP = OP_1$. Uppslå över P_1Q ett segment, som innehåller en vinkel $= \beta - \alpha$. Cirkelbågens skärningspunkt med den givna cirkeln ger punkten B. *S. B.*

1364) *Konstruera ett kägelsnitt, då man känner en tangent med dess tangeringspunkt, en brännpunkt samt en punkt på kurvan.* *C. E. Fröberg.*

För konstruktionen använder jag följande två hjälpsatser:

Om tangenten i punkten P råkar den till brännpunkten F hörande styrlinjen i R, så är FR vinkelrät mot FP.

Om P och Q äro två punkter på ett kägelsnitt, och om den till brännpunkten F hörande styrlinjen skär PQ i punkten S, så är FS antingen yttre eller inre bissektris till vinkeln PFQ.

Bevisen återfinnas i Fritz Carlson: Lärobok i geometri I, sid. 280.

Vi kalla den givna tangenten t och tangeringspunkten P. Brännpunkten betecknas med F och den givna punkten på kägel-

snittet med Q. Den följande konstruktionen går ut på att bestämma kägelsnittets styrlinje. Är denna konstruerad, är det lätt att bestämma godtyckligt många punkter på kurvan.

Drag genom F en normal till PF. Denna normal skär t i punkten R. Då ligger R på styrlinjen. Konstruera sedan den yttre och den inre bissektrisen till vinkeln PFQ. Bissektriserna skära PQ i punkterna S_1 och S_2. (S_1 på den yttre bissektrisen och S_2 på den inre.) Enligt de båda ovan anförda satserna kan styrlinjen vara antingen RS_1 eller RS_2. Det finns således i allmänhet två kägelsnitt, som uppfylla de givna villkoren. Hur ett kägelsnitt kan konstrueras, då en brännpunkt, den till denna hörande styrlinjen och en punkt på kurvan äro givna, torde vara överflödigt att här redogöra för.

De specialfall, som uppkomma, om någon av punkterna R eller S_1 rycker oändligt långt bort, äro lätta att diskutera och upptagas därför ej till närmare behandling. Ett annat specialfall fås, då P, Q och F ligga i rät linje. Då konstrueras en punkt S så, att F och S dela sträckan PQ harmoniskt; RS blir styrlinjen. Endast en lösning erhålles.

Per Olof Fröman.
Även löst av *B. Svenonius.*

En annan konstruktion (av principalcirkeln) erhålles av satsen: Om ett kägelsnitt med fokus F tangerar linjen t i T och går genom P, tangerar principalcirkeln de båda cirklarna, som uppritas med FP och FT som diametrar, den senare i dess andra skärningspunkt med t. *X.*

(Forts. från sid. 111.)

Föredrag: prof. O. Klein, Elementära exempel på Bohrs komplementaritet ($^{21}/_{2}$); laborator E. Bäcklin, Förhållandet mellan röntgenskalan och den absoluta skalan ($^{11}/_{4}$); Dr S. Rozental, Atomkerneomdannelser som Energikilde i Stjernerne ($^{25}/_{4}$); lektor A. Sandström, Den fotoelektriska mekanismen vid selenfotoelement ($^{16}/_{5}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. I. Jullander.

Föredrag: fil. dr J. Heuberger, Pulvermetallurgiska rön och deras tillämpning på porösa sintermetaller, spec. självsmörjande glidlager ($^{23}/_{2}$); laborator G. Sjöstedt, Fysikalisk-kemiska synpunkter på tillverkning av fotografiska emulsioner ($^{13}/_{3}$); docent S. Gard, Bakteriernas cilieprotein, några kemiska och biologiska synpunkter ($^{13}/_{4}$); fil. lic. S. Claesson, En ny metod för kvantitativ adsorptionsanalys av gaser och ångor ($^{15}/_{5}$).

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars 1945.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. En person upptog vid början av ett år ett lån på 5 000 kr och återbetalade detsamma jämte enkel ränta efter 12 år. Efter vilken procent beräknades räntan, om man vet, att han skulle fått erlägga 5 kr mera, ifall räntan kapitaliserats vid varje års slut och beräknats efter 4 %?
2. I en rätvinklig triangel förhålla sig medianerna mot kateterna som 3 : 4. Beräkna triangelns vinklar.
3. En fyrhörning, vars sidor i ordning äro 3, 6, 9 och 12 cm, är inskriven i en cirkel. Den första och den tredje sidan förlängas, tills de skära varandra. Hur stora äro förlängningarna, och vilken vinkel bilda de med varandra?
4. I en triangel ABC är vinkeln A 60°, sidan AB 30 m och sidan AC 40 m. På sidan BC är en punkt D så belägen, att vinkeln BAD är 20°. Beräkna sträckan AD och vinkeln ADC.
5. Ekvationerna $2x + a + 1 = 0$ och $3x^2 + ax + x + a + 2 = 0$ ha en gemensam rot. Bestäm denna och värdet på konstanten a.
6. I en rätvinklig triangel äro kateterna a och b och höjden mot hypotenusan h. Bevisa formeln

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

7. I en triangel är omkretsen 44 cm och en sida 15 cm. Uttryck ytan av den i triangeln inskrivna cirkeln som funktion av en av de övriga sidorna, och åskådliggör denna funktion grafiskt. För π användes det approximativa värdet $3\frac{1}{7}$.
8. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} xy = a(1 + y), \\ x + y^2 = 1; \end{cases}$ och ange antalet reella lösningar för olika värden på konstanten a. Om två lösningar bli lika, räknas de icke som en utan som två (sammanfallande) lösningar.

Resultat: **1.** 5 %. **2.** 31,09°; 58,91°; 90°. **3.** 7 cm; 5 cm; 57,12°. **4.** $AD = 28{,}89$ m; $\sphericalangle ADC = 93{,}90°$. **5.** $x = 1$; $a = -3$. **7.** Om cirkelns yta $= y$ cm² och en av de övriga sidorna $= x$ cm, erhålles $y = (22 - x)(x - 7)$. Ytan är $= 0$ för $x = 7$ och $x = 22$; $y_{max.} = 56{,}25$ för $x = 14{,}5$, då triangeln är likbent.

8. $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2}(1+2a+\sqrt{1-4a}) & \frac{1}{2}(1+2a-\sqrt{1-4a}) \\ \hline y & -1 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a}) \end{array}$. För $a \leqq \frac{1}{4}$ finnas tre reella lösningar, för $a > \frac{1}{4}$ endast en.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Lös ekvationen $\sin^2 2x = \sin^2 x + \sin^2 3x$.
2. Upprita kurvorna $16y = 3x^3 - 36x$ och $27y = 27x - x^3$ i deras huvuddrag. Visa, att kurvornas maximi- och minimipunkter utgöra hörn i en kvadrat.
3. I en triangel ABC äro D (3; 2) och E (5; 0) mittpunkterna på sidorna AB och AC samt F (4; −3) fotpunkten för höjden från A mot BC. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor.
4. På sidan AC i en triangel ABC finns en punkt D så beskaffad, att $AD = BD$ och $CD = AB$. Vinkeln C är 30°. Bestäm triangelns övriga vinklar.
5. I en halvcirkel har man inskrivit en rektangel $ABCD$, i vilken sidan AB faller utefter diametern. Mittpunkten E på halvcirkelns periferi sammanbindes med C och D. Figuren $ABCEDA$ får rotera kring normalen från E mot diametern. Bestäm förhållandet mellan rektangelns sidor, då volymen av den uppkomna rotationskroppen är så stor som möjligt. Förhållandet skall anges dels exakt i förenklad form, dels approximativt med tre decimaler.
6. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är höjden h och de parallella sidorna AB och CD respektive a och b, där $a > b$. Man konstruerar en följd av parallelltrapets, CDD_1C_1, $C_1D_1D_2C_2$, ..., likformiga med $ABCD$, så att C_1D_1 faller inom $ABCD$, C_2D_2 inom CDD_1C_1 o. s. v. Då konstruktionen upprepas ett obegränsat antal gånger, komma parallelltrapetsen att obegränsat avtaga i storlek och slutligen närma sig en punkt P inom $ABCD$. Sök läget av punkten P, uttryckt i a, b och h.
7. I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är höjden h och basytans diagonal $6h$. Ett plan lägges genom pyramidens topp, parallellt med basytans ena diagonal. Undersök, hur ytan av den inom pyramiden belägna delen av detta plan varierar, då planet vrider sig kring toppen, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.
8. En obegränsad rät cirkulär cylinder med radien r skäres av två plan, vilkas skärningslinje ligger helt utanför cylindern. Den

mellan planen belägna delen av cylinderns axel har längden h. Sök mantelytan och volymen av den mellan planen belägna stympade cylindern, uttryckta i r och h.

Resultat: **1.** $n \cdot 60°$; $45° + n \cdot 90°$. Överflytta en term och använd konjugatregeln. **2.** Den första kurvan har max. i $(-2; 3)$ och min. i $(2; -3)$; den andra kurvan har min. i $(-3; -2)$ och max. i $(3; 2)$. **3.** Ekv. för sidorna AB, BC och CA äro resp. $x + 5y - -13 = 0$, $x + y - 1 = 0$ och $x - 3y - 5 = 0$. **4.** $A = 60°$ och $B = 90°$ eller $A = 20°$ och $B = 130°$. **5.** $\frac{AB}{AD} = \sqrt{10 + \sqrt{52}} = 4{,}149$. **6.** P ligger på mittpunktsnormalen till sidorna a och b och på avståndet $\frac{ah}{a+b}$ från den förra. P ligger alltså i diagonalernas skärningspunkt; detta inses direkt, om man observerar, att diagonalerna i samtliga trapets ligga utefter det ursprungliga trapetsets diagonaler. **7.** Om T är planets yta och x är avståndet från dess spår i basytan till ena basdiagonalen, erhålles $T^2 = y = (3h - x)^2 (x^2 + h^2)$. Om x ökar från 0, minskar ytan från max. $= 3h^2$ (där kurvan har en spets) till min. $= \frac{h^2\sqrt{125}}{4}$ för $x = \frac{h}{2}$ för att sedan öka till max. $= h^2\sqrt{8}$ för $x = h$ och slutligen avtaga till 0 för $x = 3h$. Kurvan T är tydligen ena hälften av den sökta kurvan, som har T-axeln till symmetriaxel. **8.** Mantelytan $= 2\pi rh$ och volymen $= \pi r^2 h$. Lägg genom h:s ändpunkter plan vinkelräta mot cylinderns axel.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. I två godtyckliga punkter P och Q på kurvan $y = \frac{1}{x}$ dragas tangenterna, vilka skära y-axeln i A och B. Visa, att mittpunkten på sträckan AB ligger på kordan PQ eller dess förlängning.
2. Den räta vinkelns spets i en likbent rätvinklig triangel ligger i punkten (3; 2), hypotenusan är parallell med den räta linjen $2x + y = 0$, och triangelns yta är 20 ytenheter. Angiv ekvationerna för triangelns sidor.
3. De tre uttrycken $7x - y + 40$, $x + y$ och $y + 2$ betecknas för korthetens skull med L_1, L_2 och L_3 respektive. Bestäm konstanterna p och q så, att ekvationen $L_1L_2 + pL_2L_3 + qL_3L_1 = 0$ betyder en cirkel, och bevisa, att denna är omskriven kring den

triangel, som bildas av de räta linjerna $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ och $L_3 = 0$.

4. Sök maximivärdet för uttrycket $(\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y)$, där x och y äro två positiva vinklar, vilkas summa är 120°.
5. Huvudaxlarna i en ellips ha samma längd som huvudaxlarna i en hyperbel med excentriciteten e. Bestäm ellipsens excentricitet, uttryckt i e, och undersök, hur den varierar, då e genomlöper alla de värden, som äro möjliga för en hyperbels excentricitet.
6. P är en godtycklig punkt på parabeln $y^2 = 4x$, vars vertex är O. Genom P drages en rät linje parallellt med x-axeln. Sök orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar den nämnda räta linjen, x-axeln och den räta linjen PO. Angiv även ortens utseende i huvuddrag.
7. Ekvationen $3xy - 4y^2 - 6y - 9 = 0$ betyder en hyperbel. Sök ekvationen för diametern till de kordor i denna hyperbel, vilkas vinkelkoefficient är k. Använd den erhållna ekvationen för att bestämma medelpunktens koordinater samt ekvationerna för kurvans symmetriaxlar och asymptoter.

Resultat: **2.** Kateternas ekv. äro $x + 3y - 9 = 0$ och $3x - y - 7 = 0$; hypotenusans ekv. är $2x + y - 18 = 0$ eller $2x + y + 2 = 0$. **3.** $p = \frac{25}{4}$; $q = -\frac{7}{4}$. **4.** Tillämpas produktformlerna, blir uttrycket $= 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin (x+y) \cdot \cos^2 \frac{x-y}{2} = 2 \cdot \sin 120° \cdot \cos^2 \frac{x-y}{2}$, vars max. $= \sqrt{3}$ för $x = y = 60°$. **5.** Ellipsens exc. är $\sqrt{2 - e^2}$, om $1 < e \leqq \sqrt{2}$, och $\sqrt{\frac{e^2 - 2}{e^2 - 1}}$, om $e \geqq \sqrt{2}$. **6.** Orten, vars ekv. är $y = \pm \frac{x}{\sqrt{x+1}}$, utgöres av två kurvgrenar, som skära varandra i origo under rät vinkel och ha asymptoten $x + 1 = 0$. **7.** Diametern till kordor med vinkelkoeff. $= k$ är $3y + k(3x - 8y - 6) = 0$. För alla k-värden satisfieras denna ekv. av rötterna till ekv. syst. $3y = 0$; $3x - 8y - 6 = 0$, d.v.s. av koord. för punkten (2; 0), som alltså är hyperbelns centrum. Diameterns vinkelkoeff. är $k_1 = \frac{3k}{8k - 3}$. För symmetriaxlarna gäller $kk_1 = -1$, varav axlarnas ekv.: $3x + y - 6 = 0$ och $x - 3y - 2 = 0$. Sättes $k = k_1$, erhålles asymptoternas ekv.: $y = 0$ och $3x - 4y - 6 = 0$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 2 och 6—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Av vissa tekniska skäl måste locket till en brunn göras mycket tungt. Locket erhåller formen av en rektangulär platta *ABCD*, som väger 150 kg och ligger horisontellt, då brunnen är tillsluten. Gångjärnen sitta på sidan *AB* och handtaget på samma höjd mitt på den motsatta sidan *CD*. Man vill, att en person skall kunna öppna brunnen genom att fatta i handtaget och lyfta med en kraft, som vid rörelsens början skall vara 25 kgf och riktad rakt uppåt. För att möjliggöra detta fäster man i handtaget ett rep, som lägges över en trissa rakt ovanför lockets vridningsaxel, och fäster en lämplig motvikt i repets nedhängande ända. Hur tung måste motvikten vara, om repet i utgångsläget bildar en vinkel av 55° med horisontalplanet? Repets fäste i handtaget ligger 1,6 m och lockets tyngdpunkt 0,8 m från vridningsaxeln. Repets vikt och friktionen försummas.
2. Ovanpå ett dricksglas ligger ett rektangulärt styvt kort och på kortet ett mynt. Glasets övre kant bildar en vågrät cirkel med radien 4,0 cm. Myntets medelpunkt ligger omedelbart över medelpunkten av denna cirkel. Friktionskoefficienten mellan myntet och kortet är 0,2. Kortet drages hastigt undan i en riktning, som är parallell med dess längre sidor. Myntet blir därvid efter, och om rörelsen är snabb nog, faller det ned i glaset. Hur lång tid får högst förflyta från rörelsens början, tills kortets bakre kant passerar glasets kant, om myntet skall falla ned i glaset? Rörelsen är sådan, att myntet hela tiden alltifrån rörelsens början befinner sig i glidning i förhållande till kortet. Vid beräkningen anses myntets radie och glasgodsets tjocklek små i förhållande till glasets radie.
3. Huru många m^3 syrgas av temperaturen + 20° C och trycket 750 mm kvicksilver erhållas genom avdunstning av 1 liter flytande syre? Tätheten av flytande syre är 1,13 g/cm^3 och tätheten av syrgas vid 0° C och 760 mm kvicksilver 1,429 kg/m^3.
4. För att bestämma smältvärmet för tenn begagnar man en liten, nästan fullständigt sluten behållare av metall, försedd med en elektriskt isolerad upphettningsspiral, vars motstånd är 5,0 Ω, och en termometer. Den är upphängd i ett större slutet kärl, vars väggar hållas vid konstant temperatur. I behållaren införes först 20,0 g tenn, varefter behållaren med innehåll genom en ström i spiralen uppvärmes något över tennets smältpunkt, som är + 232° C. Sedan strömmen därefter frånslagits och be-

hållaren överlämnats åt sig själv, sjunker dess temperatur ned till smältpunkten, där den blir stående oförändrad under 9,9 min för att sedan fortsätta att sjunka. Efter detta försök avlägsnar man tennet och fyller behållaren med glycerin, vars kokpunkt ligger väsentligt högre än tennets smältpunkt. Man söker nu att med en konstant ström genom spiralen hålla behållaren precis på temperaturen + 232° C, men detta lyckas inte riktigt. Vid en strömstyrka av 0,64 A vill temperaturen stiga 0,50° per minut, medan den i stället vill falla 1,50° per minut, om den lägre strömstyrkan 0,59 A användes. Beräkna av dessa observationer tennets smältvärme.

5. En modern s. k. lysämneslampa och en vanlig glödlampa äro båda avsedda för en växelspänning av 220 V (eff.). Lysämneslampan tar en effekt av 75 W och ger då ljusflödet 300 dekalumen (Dlm). Glödlampan, som är stämplad 150 Dlm, befinnes vid anslutning till nätet draga en strömstyrka av 0,45 A (eff.). Angiv förhållandet mellan ljusflödet per effektenhet för de båda lamporna. Dekalumen är en överavdelning av lumen: 1 Dlm = = 10 lm. Glödlampan antages fri från självinduktion och kapacitet.
6. En kamera är inställd på oändligt avstånd. Utan att denna inställning rubbas, inriktas kameran mot ett föremål på ändligt avstånd. Bilden av föremålet blir då mer eller mindre oskarp. Om föremålet speciellt är en punktformig ljuskälla, faller vid exponeringen en cirkelrund ljusfläck på plåten. Dess diameter kan tagas som mått på bildens ofullkomlighet för avståndet i fråga. För de flesta ändamål är bristen på skärpa utan betydelse, om ljusfläckens diameter inte upptager större vinkel än 0,05°, sett från objektivets centrum. Hur långt från kamerans objektiv måste föremålet minst ligga, för att detta villkor skall vara uppfyllt? Avståndet, uttryckt i meter, skall angivas som funktion av bländaröppningens diameter, uttryckt i millimeter. Objektivet behandlas som en tunn lins, och bländaren tänkes placerad tätt intill denna.
7. En galvanometer har inre motståndet 50 Ω och ger utslag över hela skalan för en strömstyrka av 0,02 A. Man önskar använda den som ampèremeter med två olika mätområden. Man kopplar därför två motstånd *BC* och *CD* i serie och ansluter galvanometern till punkterna *B* och *D*. Om den strömförande huvudledningen anslutes till *B* och *C*, skall utslag över hela skalan betyda 10 A i huvudledningen; anslutes den till *B* och *D*, skall samma utslag betyda 1 A i huvudledningen. Huru stora måste de båda motstånden tagas?

8. Vid en laboration elektrolyserades utspädd svavelsyra mellan två plana, vertikala blyskivor i ett parallellepipediskt glaskärl. Blyskivorna voro avpassade efter kärlets ändytor och höllos under försöket tryckta till var sin av dessa ytor med nedre kanten vid kärlets botten. Strömkällan var ett ackumulatorbatteri, som tillsammans med elektrolyskärlet, ett regleringsmotstånd och en ampèremeter bildade en sluten strömkrets. Spänningen mellan blyskivorna mättes med en voltmeter med mycket stort motstånd. När elektrolysen pågått under några minuter, visade ampèremetern en ström av 1,39 A och voltmetern en spänning av 5,80 V. Den nedsänkta delen av vardera blyskivan var därvid 16,2 cm² och avståndet mellan dem 20,0 cm. Då man nu bröt strömmen, föll spänningen till 2,50 V. Vilket värde på svavelsyrans spec. ledningsförmåga beräknas av detta försök? Spec. ledningsförmågan hos ett ämne definieras såsom inverterade värdet av motståndet hos en pelare av ämnet med längden 1 cm och genomskärningsytan 1 cm².

Resultat: **1.** 61,0 kgf. **2.** Friktionskraften ger myntet en acceleration $= 0{,}2g$; vägen är 4 cm, varav tiden $= \sqrt{\frac{40}{981}} = 0{,}20$ sek. **3.** 0,860 m³. **4.** 14,1 cal/g. **5.** Förhållandet är 2,64. **6.** Om bländaröppningens diameter är d mm, bör föremålets avstånd vara minst $\frac{3{,}6}{\pi} d$ meter ($= 1{,}15\, d$ meter). Låt en randstråle från föremålet A (en punkt på huvudaxeln) träffa objektivets fokalplan i B, och sammanbind B med optiska medelpunkten O; BO är då parallell med nyssnämnda randstråle. Bländaröppningen synes alltså från A under samma synvinkel (0,05°) som bildfläcken från O. **7.** Motstånden i BC och CD skola vara resp. 0,102 Ω och 0,918 Ω. **8.** 0,520.

Realexamen V. T. 1945.

Provräkning.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{5x-1}{6} - \frac{5y-x}{10} = 4 - \frac{3y-x}{4}, \\ \frac{y-1}{2} + \frac{3-2y}{5} - \frac{x-8}{30} - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

2. När klockan är 12.00 i Stockholm, är den 13.00 i Riga och 14.00 i Moskva. Före kriget avgick ett trafikflygplan från Stockholm kl. 9.00 och anlände kl. 12.15 till Riga, varifrån ett annat plan startade kl. 12.30. Detta kom fram till Moskva kl. 18.00 efter en

mellanlandning, som krävde 30 min. Samtliga tider äro de, som gälla på respektive orter. Hur lång var den verkliga flygtiden, och med vilken medelhastighet flögo planen på sträckan Stockholm—Moskva, om avståndet mellan dessa städer är 135 mil?

3. Under en utflykt besökte två sällskap ett konditori, där det ena sällskapet förtärde 8 läskedrycker och 15 bakelser och det andra 10 läskedrycker och 17 bakelser. Räkningen lydde för det förra sällskapet på 9 kr 79 öre och för det senare på 11 kr 66 öre. I vartdera fallet var 10 % betjäningsavgift inberäknad. Vad var priset utan betjäningsavgift för en läskedryck och för en bakelse?
4. En person köpte den 15 februari 10 st 4 % obligationer, var och en å nominellt 100 kr, och betalade för dem, inberäknat upplupen ränta, 1 055 kr. Den 30 november samma år, då kursen stigit med $\frac{1}{2}$ %, köpte han ytterligare 12 st obligationer av samma slag. Vad fick han betala för dessa, inberäknat upplupen ränta? Ränteterminerna voro $^{30}/_{6}$ och $^{31}/_{12}$.
5. Lös ekvationen

$$\left(\frac{2}{x}-3\right)\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2x}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}\right)=0.$$

6. En lada är 24 m lång och 8 m bred. Dess höjd till takfoten är 3,5 m och till takåsen 6,5 m. Ladans gavlar äro vertikala och ha formen av en rektangel med en därpå ställd likbent triangel, vars bas sammanfaller med rektangelns ena sida. Taket skall beläggas med tegelpannor av formatet 415 mm × 280 mm. Tegelpannorna täcka varandra delvis, och härför åtgår enligt uppskattning 14 % av varje panna. Hur många pannor behövas, om ingen hänsyn tages till att taket skjuter ut över ladans väggar?
7. Efter en häftig snöstorm i nordligaste Sverige i januari 1925 hade enligt beräkningar den ursprungligen 3 mm tjocka telegrafledningen utefter Riksgränsbanan på grund av isbildning blivit i genomsnitt 27 mm tjock. Hur mycket tyngre än förut blev ledningen på en sträcka av 70 m, om isens specifika vikt är $\frac{8}{9}$? $\pi = 3\frac{1}{7}$.
8. I triangeln ABC ligger höjden AH inom triangeln. BH är 5 cm. AH är 1 cm kortare än AB. Vidare äro AC och CH tillsammans 36 cm. I den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln drages diametern AD, varefter D sammanbindes med C. Beräkna längden av CD.

Resultat: **1.** $x = 5$; $y = 3$. **2.** 6 tim. 15 min.; 216 km/tim. **3.** För en läskedryck 55 öre, för en bakelse 30 öre. **4.** 1286 kr. **5.** $x = 0{,}5$. **6.** 2 400. **7.** 35,2 kg. **8.** $8\frac{1}{3}$ cm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Ett trästycke, som väger 42 g och har spec. vikten 0,7, är fastklämt nära bottnen av en vattenbassäng men lossnar av någon anledning och stiger upp genom vattnet. Till följd av vattnets motstånd blir stighastigheten nästan genast konstant. Hur stort är då vattnets motstånd mot rörelsen?
2. För att bestämma höjden av ett träd försöker en pojke kasta en sten rakt uppåt med sådan begynnelsehastighet, att stenen vänder mitt för trädets topp. Med ett stoppur bestämmer han varje gång den tid kastet tar, från det ögonblick, då stenen lämnar handen, tills han åter uppfångar den med samma hand. Slutligen lyckas han få upp ett kast, vid vilken stenen vänder praktiskt taget i jämnhöjd med trädtoppen. Vid detta kast avläste han tiden 2,8 sek på stoppuret. Han antog vidare, att handen befann sig 1,6 m över marken, både då stenen lämnade den och då den kom tillbaka. Vilket värde på trädets höjd erhöll han? $g = 9{,}8$ m/sek^2.
3. En ränna med V-formigt tvärsnitt och med 30° vinkel mellan sidoytorna ställes så, att bottenlinjen blir horisontell och ena sidoytan vertikal. Ett klot med tyngden 5 kgf lägges i rännan. Beräkna den kraft, som klotet utövar dels på den vertikala och dels på den snedställda ytan. Friktionen lämnas ur räkningen.
4. En mindre dieselmotor skall driva en generator, som skall lämna 20 A vid en polspänning av 600 V. Man brukar räkna med att bränsleåtgången för en sådan dieselmotor är 200 g för varje hästkrafttimme, som uttages från motoraxeln. Huru mycket bränsle kan man vänta sig, att motorn kommer att förbruka per timme? Generatorns verkningsgrad är 85 %. 1 hk = 736 W.
5. På södersidan av ett hustak låg en senvinterdag ett tjockt snötäcke av temperaturen 0° C, packat så att snöns spec. vikt var 0,15. Mitt på dagen tillförde solstrålningen varje cm^2 av snötäckets yta en energimängd av 0,9 cal/min. Större delen härav återstrålades visserligen, men omkring 10 % av energien upptogs av snötäcket och smälte en motsvarande snömängd. Hur mycket kan snötäckets tjocklek beräknas avtaga på en timme vid denna solställning, om snöns spec. vikt inte ändras? Isens smältvärme är 80 cal/g.
6. Man vill på 1 tim. 10 min. uppvärma 18 liter vatten i en elektrisk varmvattenberedare från 15° till 60°. Hur stor elektrisk effekt behövs härtill, om 10 % av den tillförda energien går förlorad? 1 Ws = 0,24 cal.

7. En person önskade bestämma elektromotoriska kraften hos ett batteri. Han hade till sitt förfogande ett känsligt strömmätningsinstrument med skala, men ampèrevärdet per skaldel var honom obekant. Han satte då ihop ett galvaniskt element, vars elektromotoriska kraft kunde beräknas bliva 1,10 V, och kopplade det i serie med batteriet, mätinstrumentet och ett tämligen stort motstånd. Med denna koppling fick han ett utslag på 56,7 skaldelar. Sedan kopplade han in elementet med dess poler i motsatt ordning mot förut. Strömriktningen ändrades inte därigenom, men utslaget blev nu endast 40,5 skaldelar. Vilket värde på batteriets elektromotoriska kraft erhöll han genom detta försök?
8. Man vill ladda ett ackumulatorbatteri från likströmsnätet och tänker begagna ett elektriskt strykjärn som förkopplingsmotstånd. Den ena av kontakterna till nätet står i förbindelse med jorden och är alltså nolla. Den andra har potentialen + 120 V. Till denna anslutes ackumulatorbatteriets positiva pol. Dess negativa pol förbindes över det elektriska strykjärnet med nollkontakten. Spänningen mellan batteriets poler är hela tiden omkring 20 V, och man vet, att det är fullt laddat, när en elektricitetsmängd av 15 ampèretimmar har drivits genom detsamma. Strykjärnet är stämplat 120 V, 400 W. Hur lång tid får man beräkna för laddningen? Motståndet i strykjärnet kan anses vara detsamma som när strykjärnet är kopplat direkt till nätet.

Resultat: **1.** 18 gf. **2.** 11,2 m. **3.** På den vertikala ytan 8,66 kgf och på den snedställda 10 kgf. **4.** 3,84 kg/tim. **5.** 4,5 mm. **6.** 893 W. **7.** 6,60 V. **8.** 5 tim. 24 min.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Beräkna utväxlingen för en enkel kuggväxel, där modulen är 5 och kugghjulens ytterdiametrar 110 mm respektive 310 mm.
2. En slipmaskin med varvtalet 2000 har en slipskiva med 200 mm diameter. Rita ett diagram, som visar, hur sliphastigheten (skivans periferihastighet) ändras, allteftersom skivan förbrukas. Utläs ur diagrammet sliphastigheten, då skivdiametern är a) 150 mm, b) 90 mm.
3. En mindre mekanisk verkstad skall utrustas med följande direkt elektriskt drivna maskiner:

	Motoreffekt i hk för varje arbetsmaskin	Motorverkningsgrad i %
3 st svarvar	2	78
1 » kipphyvel	2	78
1 » fräsmaskin	3	80
1 » slipmaskin	0,5	70
1 » större borrmaskin	0,75	74
1 » mindre borrmaskin	0,5	70
1 » kallsåg	0,5	70

Hur stor blir energikostnaden per timme, då alla motorerna gå fullbelastade? 1 kWh kostar 10 öre.

4. Övre vevstakslagret till en bensindriven förbränningsmotor har en 50 mm lång bussning, vars invändiga diameter är 25 mm. Hur stort blir maximala lagertrycket på denna bussning i kgf/cm², om kolvens diameter är 100 mm och högsta förbränningstrycket i cylindern antages vara 25 kgf/cm²?
5. Lämna en jämförande redogörelse för arbetsförloppen i cylindrarna hos en 4-takts förgasarmotor och en 4-takts dieselmotor.
6. En axelledning är medelst en flänskoppling hopfogad av två stycken axlar. Kopplingen har 3 bultar vardera med 15 mm diameter placerade i en cirkel med 220 mm diameter. Hur många hästkrafter kan denna axelkoppling överföra, om skjuvpåkänningen i kopplingens bultar får vara högst 300 kgf/cm² och varvtalet är 100 varv/min?
7. Ett kugghjul med 60 kuggar, modul 10, överför en effekt av 8 hk vid 70 varv per minut. Kuggbredden är 60 mm. Beräkna största böjpåkänningen vid kuggfoten. Kuggtrycket tänkes anbragt vid kuggtoppen. Kuggens tjocklek vid foten antages vara lika med halva delningen.
8. Hur stor belastning kan en 3,5 m lång I-balk NP 24 med 4-faldig säkerhet uppbära, om den användes som pelare? $E = 2150000$ kgf/cm². Hur stor blir tryckpåkänningen i balken vid den tillåtna belastningen?
9. Redogör för metoder att skydda virket i ett trähus mot fukt. Förtydliga, där så erfordras, redogörelsen med skisser.

Resultat: **1.** 1 : 3. **2.** a) 15,7 m/s, b) 9,4 m/s. **3.** 1,26 kronor. **4.** 157 kgf/cm². **6.** 24,4 hk. **7.** 220 à 240 kgf/cm². **8.** a) 9 570 kgf b) 208 kgf/cm².

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1945: 1—2.

Ur innehållet: Frida Palmér, Astronomisk studieresa under första krigsåret; C. Schalén, Planeten Jupiter och dess månar; Å. Wallenquist, Solens extremt ultravioletta och korpuskulära strålning; D. Lindhed, Ett bekvämt spegelteleskop; K. Rosén, Solförmörkelseobservationers betydelse för geodesien; I. Bornsdorff, B. Lindblad, K. G. Malmquist, K. Lundmark, Planerade expeditioner för den totala solförmörkelsen den 9 juli 1945; N. V. E. Nordenmark, En svensk stjärnbild och dess öden; B. Berggren, Gammalt och nytt från Damarobservatoriet på Ven.

Svensk kemisk tidskrift, 1945: 2—4.

Ur innehållet: K. H. Gustavsson, The Fixation of High-Molecular Sulfo-Acids by Hide Protein as Evidence for its Amphionic Nature; L. Wiklander, Om fördelningen av en- och tvåvärda katjoner vid adsorption till organolit; E. Söderbäck, Studien über Persulfocyansäure; W. Kirsten, Eine verbesserte Titrationsmethode für die Chlor- und Brombestimmung nach Grote und Krekeler; B. Höglund, Iakttagelser från den kemiska industrien i U. S. A. under kriget; L. G. Sillén, On Analyses of Tetraethyl Lead and Ethyl Fluid; E. Brunius and V. Hellström, On the Stabilisation of Carotene in Dehydrated Alfalfa Meal; G. Runeberg och O. Samuelson, Om användningen av jonbrytande ämnen i den analytiska kemien VII; T. Lövgren, Om inverkan av fosfatas på kasein.

Populär radio, 1945: 1—6.

Ur innehållet: Trioden som blandarrör; »Chanalyst», ett modernt amerikanskt servisinstrument; Radiostudions akustik; Den idealiska banankontakten uppfunnen; Rak trafikmottagare; Framställning av kristaller för piezoelektriska apparater; Mikrofonförstärkare; Induktansfri generator för tonfrekvens; Induktionsmätbrygga; Radioteknisk revy.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1945: 1.

Ur innehållet: O. P. Arvesen, Litt om S_n-kurver og -flater og noen anvendelser av dem; Aadne Ore, Ad determinanters reduktibilitet; K. E. Aubert, Et par bemerkninger til Viggo Bruns kritikk av tallteoriens kongruenssymbol; Oppgaver for gymnasieelever; Oppgaver til løsning; Løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1945: 1.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, De nye Nobelpristagere i fysikk og kjemi, I. I. Rabi og G. v. Hevesy; V. Bjerknes, Hvirvler og solflekker; K. Trægde, En sammenligning mellem den geostrofiske vind i havoverflatens nivå og vinden i høiden over Oslofjorden; W. Werenskiold, En undersøgelse av visse ekvivalente kartprojeksjoner; A. K. Brynildsen, Demonstrasjon av damptrykkforminskelse over en saltopløsning.

Naturen, Bergen 1945: 2—4.

Ur innehållet: Chr. Oftedahl, Vårt århundredes største eksplosjon; B. Samdahl, Metanol; O. Bjørgum, Statistiske nedbørsspådommer; S. Evjen, Varsling av østkulinger langs Skagerakkysten; A. Dannevig, Fisken og været; O. Netteland, Det frie elektron og dets anvendelse; K. Birkhaug, Sulfonamidene og penicillin som kjemoterapoytiske midler; S. Einbu, Jorden som himmellegeme.

En sats rörande kägelsnitten.

Av VERNER CARLSON.

Som bekant gäller följande sats: *Villkoret för att kägelsnittet* $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ *består av räta linjer (eller en punkt) är, att*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Härledningen av satsen kan givetvis ske på olika sätt. Följande version, som jag ej förut sett, hör kanske inte till de enklare men torde ändå vara av intresse.

Villkoret är nödvändigt. Ty, om

$$F(x, y) = (lx + my + n)(px + qy + r), \tag{1}$$

där samtliga koefficienter i F och faktorerna för allmängiltighetens skull $\neq 0$, antager kurvans vinkelkoefficient y' två ändliga värden $y'_1 = -\frac{l}{m}$ och $y'_2 = -\frac{p}{q}$. Den satisfierar alltså ekv.

$$y'^2 + \frac{lq + mp}{mq} y' + \frac{pl}{mq} = 0,$$

som med hänsyn till likheten hos koefficienterna å ömse sidor i (1), och då $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, kan skrivas

$$cF'^2_x - 2bF'_x F'_y + aF'^2_y = 0. \tag{2}$$

Vänstra ledet i (2) med ombytt tecken $=$

$$= \Delta_1 = 4 \begin{vmatrix} a & b & \frac{1}{2}F'_x \\ b & c & \frac{1}{2}F'_y \\ \frac{1}{2}F'_x & \frac{1}{2}F'_y & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Men då $\frac{1}{2}F'_x = ax + by + d$ och $\frac{1}{2}F'_y = bx + cy + e$ och 0 kan ersättas med $F(x, y)$, kan Δ_1 lätt omformas till 4Δ, som alltså är 0.

Villkoret är tillräckligt. Ty, om i (3) $F(x, y)$ insättes i st. f. 0, erhålles: $4\Delta = 4(ac - b^2)F(x, y) - cF'^2_x + 2bF'_x F'_y - aF'^2_y$. Om $\Delta = 0$, är alltså

$$4(ac - b^2)F(x, y) = cF'^2_x - 2bF'_x F'_y + aF'^2_y, \tag{4}$$

som visar, att F efter multiplikation med $ac - b^2 \neq 0$ kan upplösas i två linjära faktorer, vilka representera två reella eller imaginära linjer. I sista fallet reduceras kägelsnittet till en punkt. Det är lätt att visa, att F kan upplösas i linjära faktorer, även då $ac - b^2 = 0$. Ty, om man inför homogena koordinater i kägelsnittets ekvation, som alltså skrives: $F(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$, så erhålles analogt med (4)

$$\left.\begin{aligned} 4(cf - e^2)F &= fF'_y{}^2 - 2eF'_y F'_z + cF'_z{}^2 \\ 4(af - d^2)F &= aF'_z{}^2 - 2dF'_z F'_x + fF'_x{}^2 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Ekv. (4) och (5) visa, att F kan upplösas i linjära faktorer, om ett av uttrycken $ac - b^2$, $cf - e^2$ och $af - d^2 \neq 0$.

Så är även fallet, om $ac - b^2 = cf - e^2 = af - d^2 = 0$. (6)

Ty, antagas samtliga koeff. $\neq 0$, erhålles på grund av likheten $a\triangle = (ac - b^2)(af - d^2) - (ae - bd)^2$ och med hänsyn till de givna villkoren, att $ae = bd$. Man finner då, att motsvarande element i determinantens rader (kolonner) äro proportionella och att kägelsnittets ekv. är

$$F(x, y) = \frac{1}{a}(ax + by + d)^2 = \frac{1}{c}(bx + cy + e)^2 = \frac{1}{f}(dx + ey + f)^2 = 0 \tag{7}$$

Ur (6) och (7) erhålles kägelsnittets ekv., om någon av koeff. försvinner. Om t. ex. $c = 0$, måste också $b = e = 0$. Då är $F = \frac{1}{a}(ax + d)^2 = \frac{1}{f}(dx + f)^2$. Om både a och $c = 0$, försvinna samtliga koeff. i F.

Anm. Om samtliga uttryck $ac - b^2$, $cf - e^2$ och $af - d^2$ eller två av dem $\neq 0$, erhåller man tre resp. två lösningar av F i linjära faktorer enl. (4) och (5), men dessa måste betyda samma linjer. För att F skall betyda räta linjer eller punkt, måste alltså de av ovan nämnda uttryck, som äro $\neq 0$, ha samma tecken. Ty, om $cf - e^2 < 0$ och $af - d^2 > 0$, skulle första ekv. i (5) ge reella linjer men den andra imaginära. Med ledning härav kan man i vissa fall bestämma kurvans karaktär. Ekv. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ betyder sålunda alltid en ellips, reell eller imaginär, om $ac - b^2 > 0$ och $f = 0$ eller har motsatt tecken mot a, ty då är $af - d^2 < 0$. Ekv. $ax^2 + 2bxy + 2ey + f = 0$ betyder alltid en hyperbel, då a och f ha lika tecken, eftersom $ac - b^2 < 0$ och $af - d^2 > 0$.

Om avståndet mellan in- och omskrivna sfärernas medelpunkter i en tetraeder.

Av GÖSTA DANIELSSON.

1. Härledning av Durrandes formel.

Eulers formel[1] för avståndet d mellan in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter i en triangel lyder

$$d^2 = R^2 - 2Rr. \tag{1}$$

Om r ersättes med $-r_a$, erhålles avståndet d_a mellan motsvarande vidskrivna cirkels medelpunkt och omskrivna cirkelns medelpunkt, d. v. s.

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a. \tag{1'}$$

Durrande[2] gav analoga relationer för tetraedern. Om i en tetraeder d är avståndet mellan in- och omskrivna sfärernas medelpunkter, gäller enligt Durrande

$$d^2 = (R + r)(R - 3r) = R^2 - 2Rr - 3r^2. \tag{2}$$

Om r ersättes med $-r_i$, där r_i är radien i en vidskriven sfär, erhålles enligt Durrande avståndet d_i mellan denna sfärs medelpunkt och den omskrivna sfärens medelpunkt, d. v. s.

$$d_i^2 = (R - r_i)(R + 3r_i) = R^2 + 2Rr_i - 3r_i^2. \tag{2'}$$

Jag har emellertid funnit, att (2) och (2') icke gälla *generellt*.

Att — som också framgår av Durrandes bevis — (2) gäller för den speciella typ av tetraedrar, i vilka en sidoyta är en liksidig triangel och de kanter, som ej ingå i denna triangel, äro lika stora, d. v. s. för en regelbunden tresidig pyramid, skall först visas. Följande bevis har angivits av fil. lic. Stig Comét.

Vi betrakta två givna sfärer (I) och (O), av vilka den förra ligger helt inom den senare. Sfärernas medelpunkter äro I resp. O, deras radier r resp. R och avståndet mellan medelpunkterna d. En rät linje genom O och I skär (O) i A och B, (I) i C och D, varvid

[1] Elementa *8*, sid. 56.
[2] Annales de Mathématiques 14, 1824, sid. 29—59.

beteckningarna äro valda så, att punkternas ordningsföljd är $ACDB$. Ett genom A lagt tangentplan (V) till (I) tangerar (I) i G och skär tangentplanet (W) genom D längs en rät linje, vars inom (O) liggande del är en korda (k) med medelpunktsvinkeln $2v$ i den cirkel, som utgör skärningen mellan (W) och (O). Mittpunkten av (k) kallas E, DE skär utdragen (O) i F. Då gäller $DE = DF \cdot \cos v$. I planet ADE erhålles nu $AC \cdot AD = AG^2$ och $BD \cdot AD = DF^2$, d. v. s.

$$AC \cdot BD = \frac{AG^2 \cdot DF^2}{AD^2}. \tag{3}$$

Men $\triangle AGI$ är likformig med $\triangle ADE$; följaktligen gäller

$$\frac{AG}{AD} = \frac{GI}{DE} = \frac{r}{DF \cdot \cos v} \text{ och alltså } \frac{AG \cdot DF}{AD} = \frac{r}{\cos v}.$$

Insättes detta i (3) under beaktande av att sträckorna AC och BD äro $R - r + d$ och $R - r - d$ (ordningsföljden likgiltig), framgår

$$(R - r)^2 - d^2 = \frac{r^2}{\cos^2 v}. \tag{4}$$

För två sfärer, som skära varandra, härledes på samma sätt formeln

$$(R + r)^2 - d^2 = \frac{r^2}{\cos^2 v}. \tag{4'}$$

Formel (4) är tillämplig, om (O) och (I) äro de om- och inskrivna sfärerna till en regelbunden tresidig pyramid (allmännare: n-sidig). Då i detta fall $2v = 120°$, blir högra ledet i (4) $4r^2$, vilket ger Durrandes formel (2). (För en kon är $v = 0$, och (4) övergår till Eulers formel.)

Vidare finner man, att (4') övergår till (2'), då r är radien i den vid basytan vidskrivna sfären i en regelbunden tresidig pyramid, och till (1') för en vid basen vidskriven sfär i en kon.

Omvänt: Om R, r och d äro givna på sådant sätt, att de satisfiera (2), ger (4) $\cos v = 0{,}5$ (v spetsig), alltså $2v = 120°$. Detta betyder, att man genom A kan lägga tre plan så, att deras kordor (k) bilda en liksidig triangel. Till två sfärer, som uppfylla (2), finns det alltså alltid en regelbunden tresidig pyramid, omskriven kring den ena och inskriven i den andra sfären. I själva verket finns det två sådana pyramider (omkasta beteckningarna A och B samtidigt med C och D).

2. Giltighetsområdet för Durrandes formel.

Durrande trodde sig kunna utsträcka giltigheten av (2) till godtyckliga tetraedrar genom följande resonemang. På sid. 53 (loc. cit.)

visar han, fullt korrekt: »Om en tetraeder är omskriven kring en sfär och samtidigt inskriven i en annan, finns det oändligt många andra tetraedrar, som samtidigt äro omskrivna kring den förra och inskrivna i den senare.» Därefter utväljer han bland alla dessa tetraedrar dem, som äro *regelbundna tresidiga pyramider*. Då (2) är giltig för dessa, skulle den alltså även gälla för den givna, godtyckliga tetraedern. Felet i denna bevisföring är allvarligt (och i viss mån förrädiskt) och består i att förf. ej undersökt *existensen* av de utvalda regelbundna pyramiderna. Resultatet blir också felaktigt.

Vi visa detta enklast med ett sifferexempel. Vi välja en tetraeder med ett rätvinkligt hörn och inlägga ett rätvinkligt koordinatsystem med origo i detta hörn och axlarna längs de från detta utgående sidokanterna, så att koordinaterna för de övriga hörnen bli $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ och $(0;\ 0;\ c)$. Omskrivna sfärens medelpunkt är $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2};\ \frac{c}{2}\right)$, vars avstånd från origo ger R. Inskrivna sfärens medelpunkt $(r;\ r;\ r)$ har från planet $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ avståndet r; om planets ekvation skrives under normalform, ger oss detta en relation för bestämning av r. Slutligen erhålles d med avståndsformeln.

I specialfallet $a=2,\ b=4,\ c=6$ bli sålunda $r=\frac{2}{3}$ och $R=\sqrt{14}$ samt koordinaterna för om- och inskrivna sfärernas medelpunkter $(1;\ 2;\ 3)$ och $\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, varav följer $d^2=\frac{22}{3}$. (2) satisfieras alltså icke.

(På liknande sätt kan man i specialfallet $a=b=c=1$, vilket ger en regelbunden pyramid, visa att (2′) gäller endast för den vid basen vidskrivna sfären.)

Man kan fråga sig, vilket villkor en tetraeder måste uppfylla för att (2) skall gälla. Nödvändiga och tillräckliga villkoret härför är, att det finns en regelbunden tresidig pyramid, vars in- och omskrivna sfärer sammanfalla med den givna tetraederns. Att villkoret är tillräckligt inses omedelbart, och att det verkligen finns tetraedrar, som uppfylla detsamma, till och med oändligt många, följer av den nyss citerade (riktiga) satsen hos Durrande. Villkorets nödvändighet framgår av att man, om (2) gäller för den givna tetraedern, alltid kan finna den önskade pyramiden så som ovan visades vid formel (4).

Innan vi gå att uppsöka en ersättning för (2) giltig i det allmänna fallet, göra vi oss frågan, huruvida överhuvudtaget ett algebraiskt

samband mellan enbart R, r och d är tänkbart i detta fall. Att frågan skall besvaras nekande inser man enklast genom att betrakta på lämpligt sätt specialiserade tetraedrar.

Antag, att i tetraedern $ABCD$, där M och N äro mittpunkterna på AB resp. CD, linjerna AB, MN och CD *alla* äro vinkelräta mot varandra (de mot hörnen C och D stående sidoytorna äro alltså kongruenta likbenta trianglar, likaså de båda övriga sidoytorna). Låt O och I vara om- resp. inskrivna sfärernas medelpunkter och $OM = x$, $ON = y$. Då erhålles omedelbart ur likformighet och rätvinklighet

$$r^2(x+y)^2 = \left[(x-d)^2 - r^2\right](R^2 - y^2) = \left[(y-d)^2 - r^2\right](R^2 - x^2).$$

I specialfallet $d = 0$ erhålles $x = y$ och ekvationen övergår till

$$4r^2x^2 = (x^2 - r^2)(R^2 - x^2).$$

Om r tänkes fixt, satisfieras denna ekvation av oändligt många värdepar (x, R), ty då x varierar från r till ∞, går R från ∞ över minimivärdet $3r$ åter till ∞. Om det nu funnes ett algebraiskt samband $f(R, r, d) = 0$ med konstanta koefficienter, skulle för $d = 0$, $r = r_0$ den algebraiska ekvationen $f(R, r_0, 0) = 0$ satisfieras av oändligt många värden på den enda obekanta R, vilket är orimligt. Ett samband av angivet slag mellan R, r och d enbart är således även i det allmänna fallet otänkbart.

3. Bestämning av d som funktion av R och tetraederns kanter och sidoytor.

Vi införa först följande beteckningar. Tetraederns hörn betecknas 1, 2, 3, 4. S_i är ytan av det mot hörnet i stående sidoplanet och k_{ij} längden av den kant, som innehåller hörnen i och j. Det finns i allmänhet åtta sfärer, som tangera alla sidoytorna eller deras förlängningar, nämligen den inskrivna sfären med radien r, de fyra vidskrivna sfärerna med radierna r_i samt de tre icke alltid existerande sfärer med radierna r_{ij}, som tangera två sidoytor innantill och två utantill. (Med tangering utantill avses tangering av en sidoyta så, att den ifrågavarande sfären och inskrivna sfären ligga på var sin sida om ytan.) Radien i den, som tangerar S_1 och S_2 utantill och S_3 och S_4 innantill, betecknas r_{12}, etc. Man kan visa, att om sfären med radien r_{12} existerar, existerar inte sfären med radien r_{34}, etc. Sfären med radien r_{12} existerar, om nämnaren i nedanstående uttryck för denna radie är positiv; d_{ij} betyder avståndet från medelpunkten för sfären med radien r_{ij} till omskrivna sfärens medelpunkt, V är tetraederns volym. Följande formler förutsättas bekanta (bevisas på samma sätt som formlerna för en triangels in- och vidskrivna cirklar).

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}, \qquad r_1 = \frac{3V}{-S_1 + S_2 + S_3 + S_4}, \tag{5}$$

$$r_{12} = \frac{3V}{-S_1 - S_2 + S_3 + S_4}.$$

I ett rätvinkligt koordinatsystem ha hörnen i hos en tetraeder koordinaterna $(x_i; y_i; z_i)$. Vi kunna antaga, att beteckningarna äro valda så, att

$$V = \frac{1}{6}\left|x_i\ y_i\ z_i\ 1\right| > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).^1$$

Koordinaterna för inskrivna sfärens medelpunkt äro

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ y_0 &= \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ z_0 &= \frac{S_1z_1 + S_2z_2 + S_3z_3 + S_4z_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

För att visa detta skola vi först bevisa en hjälpsats, som är den tredimensionella motsvarigheten till bissektrissatsen i planet:

> Bissektrisplanet genom en kant i en tetraeder delar motstående kant i delar, som förhålla sig som de sidoytor, som innehålla den förstnämnda kanten. (Skarpare formulering nedan!)[2]

Bevis: Låt bissektrisplanet gå genom k_{34}. Planet träffar motstående kant i punkten 5. Vi skola visa, att

$$(25) : (15) = S_1 : S_2. \tag{7}$$

Ifrågavarande plan delar tetraedern i två tetraedrar 3425 och 3415. Drag höjderna från 5 i dessa. Dessa höjder äro lika stora, varav följer

$$\text{tetr. } 3425 : \text{tetr. } 3415 = S_1 : S_2.$$

Å andra sidan har man, om man betraktar 3 som gemensam spets,

$$\text{tetr. } 3425 : \text{tetr. } 3415 = \text{triang. } 245 : \text{triang. } 145 = (25) : (15).$$

$$\therefore\ (25) : (15) = S_1 : S_2 \qquad \text{v. s. b.}$$

Om vi nu i tetraederns hörn placera massor proportionella mot motstående sidoytor, är massfördelningens tyngdpunkt den genom

[1] Det förkortade skrivsättet betyder en determinant, i vilken i:te raden ($i = 1, 2, 3, 4$) har det angivna utseendet.

[2] Studentproblem V. T. 1881.

uttrycken (6) givna punkten. Vi skola nu visa, att denna punkt är identisk med inskrivna sfärens medelpunkt. På grund av (7) ligger tyngdpunkten av de i hörnen 1 och 2 placerade massorna i bissektrisplanet, som därmed innehåller hela massfördelningens tyngdpunkt. På samma sätt fås, att tyngdpunkten ligger i alla sex bissektrisplanen och därmed i deras skärningspunkt, v. s. b.

Man kan också verifiera (6) analytiskt. Om man skriver ekvationen för planet S_1 i normalform, finner man, att avståndet från $(x_0; y_0; z_0)$ till S_1 är lika med

$$\frac{|x_i\ y_i\ z_i\ 1|}{2S_1} \quad (i = 0, 2, 3, 4).$$

Inför uttrycken (6), bryt ut nämnaren, subtrahera från första raden j:te raden multiplicerad med S_j $(j = 2, 3, 4)$ samt bryt ut S_1. Då erhålles

$$\frac{|x_i\ y_i\ z_i\ 1|}{2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \text{ vilket ju är lika med } r, \text{ v. s. b.}$$

Den formel, som nu skall härledas och som gäller för en godtycklig tetraeder, lyder

$$d^2 = R^2 - \frac{S_1S_2k_{12}^2 + S_1S_3k_{13}^2 + S_1S_4k_{14}^2 + S_2S_3k_{23}^2 + S_2S_4k_{24}^2 + S_3S_4k_{34}^2}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2}. \quad (8)$$

Jag bevisade ursprungligen denna formel genom att beräkna potensen $d^2 - R^2$ av den inskrivna sfärens medelpunkt med avseende på omskrivna sfären, vars ekvation skrevs i determinantform. Professor Marcel Riesz har emellertid, efter att ha tagit del av min härledning, givit följande enklare bevis, som undviker determinanträkning:

Vi sätta för korthets skull

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 \\ y_0 &= \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \alpha_3y_3 + \alpha_4y_4 \quad \text{med} \sum_{k=1}^{4} \alpha_k = 1 \\ z_0 &= \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 + \alpha_3z_3 + \alpha_4z_4 \end{aligned} \quad (9)$$

och låta tillsvidare denna punkt P_0 vara en allmän punkt. Vi söka nu potensen av denna punkt med avseende på omskrivna sfären, vars ekvation är

$$D(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Således

$$D(x_i, y_i, z_i) \equiv x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + ax_i + by_i + cz_i + d = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

[1] I själva verket äro α_k normerade barycentriska koordinater för P_0, varvid normeringen består i villkoret $\Sigma\alpha_k = 1$.

Potensen av punkten P_0 erhålles genom insättning av dennas koordinater i sfärens ekvation, d. v. s. potensen $= D(x_0, y_0, z_0)$, vilket på grund av de nyss angivna likheterna kan omskrivas till

$$D(x_0, y_0, z_0) - \sum_{i=1}^{4} \alpha_i D(x_i, y_i, z_i).$$

Detta uttryck innehåller varken lineära termer eller konstant term. Vi ha alltså

$$D(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \sum_{i=1}^{4} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Om man här uttrycker x_0, y_0, z_0 genom (9) och i subtrahenderna skriver $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ etc. fås

$$D(x_0, y_0, z_0) = -\sum_{r<s} \alpha_r \alpha_s \left[(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2\right]$$

eller

$$D(x_0, y_0, z_0) = -\sum_{r<s} \alpha_r \alpha_s k_{rs}^2. \quad [1] \tag{10}$$

Låt nu speciellt P_0 vara inskrivna sfärens medelpunkt. Vi ha då enligt (6) och (9) att i (10) sätta $\alpha_1 = S_1/(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ etc. Men å andra sidan är potensen också lika med $d^2 - R^2$, vilket ger (8).

Ovanstående metod ger i planet,[2] om man sätter $k_{23} = s_1$ etc.

$$d^2 = R^2 - \frac{s_1 s_2 s_3^2 + s_2 s_3 s_1^2 + s_3 s_1 s_2^2}{(s_1 + s_2 + s_3)^2}$$

eller

$$d^2 = R^2 - \frac{s_1 s_2 s_3}{s_1 + s_2 + s_2}$$

eller

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Man finner, måhända enklast analytiskt,[3] att, om man ersätter S_i med $-S_i$, (6) gäller även för en vidskriven sfär r_i. Detta får som konsekvens endast ett teckenbyte för S_i i (8). Likaså finner man, att (6) gäller även för de tre återstående tangerande sfärerna r_{ij}, om man ersätter S_i och S_j med resp. $-S_i$ och $-S_j$. Detta medför alltså även teckenbyte för S_i och S_j i (8). Därmed ha vi

[1] Detta är i själva verket ingenting annat än omskrivna sfärens ekvation i barycentriska koordinater, härledd på ett sådant sätt, att man vet hur man får potensen av en punkt.

[2] För inskrivna cirkelns medelpunkt gälla nämligen uttryck analoga med (6).

[3] Jfr föreg. sida.

med vederbörliga teckenbyten i (8) beräknat samtliga åtta avstånd d, d_i och d_{ij}.

Eftersom R^2 kan uttryckas explicit i tetraederns kanter (t. o. m. explicit *rationellt*)[1] och S_i kan beräknas ur kanterna med Herons formel, ha vi med (8) även bestämt *d som funktion av tetraederns kanter.*

Vidare kan nämnas, att, om man i (10) sätter $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}$, får man ett uttryck för avståndet mellan omskrivna sfärens medelpunkt och tetraederns tyngdpunkt.

För en regelbunden tresidig pyramid kan (8) omformas till (2). Kalla basytan B, en sidoyta A, baskanten b, sidokanten a och pyramidens höjd h. Då ger (8)

$$R^2 - d^2 = \frac{3ABa^2 + 3A^2b^2}{(3A + B)^2},$$

vilket kan uppdelas i

$$\frac{Ba^2}{3A + B} + \frac{3A^2b^2 - B^2a^2}{(3A + B)^2}. \tag{11}$$

Av $r = \frac{Bh}{3A + B}$ och $\frac{2R}{a} = \frac{a}{h}$ följer, att den första termen i (11) blir $2Rr$. Då vidare $A^2 : B^2 = \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) : \left(\frac{3b^2}{4}\right)$ och $h^2 = a^2 - \frac{b^2}{3}$, blir andra termen i (11)

$$\frac{(4a^2 - b^2)B^2 - B^2a^2}{(3A + B)^2} = \frac{3h^2B^2}{(3A + B)^2} = 3r^2,$$

varmed vi ha kommit fram till (2).

4. Den likytiga tetraedern.

Med hjälp av (8) kunna vi enkelt verifiera några kända egenskaper hos den s. k. *likytiga* tetraedern.[2] Som namnet anger, är i denna tetraeder sidoytorna lika stora. Man kan även visa, att de äro kongruenta, och att motstående kanter äro lika stora. En likytig tetraeder $ABCD$ erhålles, om i en spetsvinklig triangel $A_1B_1C_1$ med sidorna $2a$, $2b$ och $2c$ sidornas mittpunkter A, B och C sammanbindas och hörntrianglarna »vikas upp» längs sammanbindningslinjerna, tills de råkas i punkten D. Om omskrivna sfärens medelpunkt O sammanbindes med hörnen, uppdelas tetraedern i fyra deltetraedrar, som äro kongruenta och vilkas höjder alltså äro

[1] Se t. ex. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, sid. 348 och 350.

[2] Encykl. d. Math. Wiss. band III, del 1, sid. 1062 och Elementa 7, sid. 76.

lika stora. Härav följer, att in- och omskrivna sfärerna ha samma medelpunkt O, d. v. s. $d = 0$. Av (6) framgår, att medelpunkterna sammanfalla med tetraederns tyngdpunkt. Om man i (8) sätter $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ och $k_{12} = k_{34} = a$, $k_{13} = k_{24} = b$ och $k_{23} = k_{14} = c$, finner man för $d = 0$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

Av (5) framgår, att för den likytiga tetraedern $r_i = 2r$. Om från hörnet D en rät linje drages genom O och den vid basytan vidskrivna sfärens medelpunkt O_1 och normaler fällas från O och O_1 mot en av de övriga sidoytorna, inses, att O är mittpunkten på DO_1. Eftersom även den omskrivna sfären har sin medelpunkt i O, följer härav, att vidskrivna sfärernas medelpunkter ligga på den omskrivna sfären. Detta framgår även omedelbart av (8), som med förut nämnda teckenbyten i detta fall ger $d_i = R$.

En modifikation av Kundts rör.

Av **B. WAHLSTRÖM.**

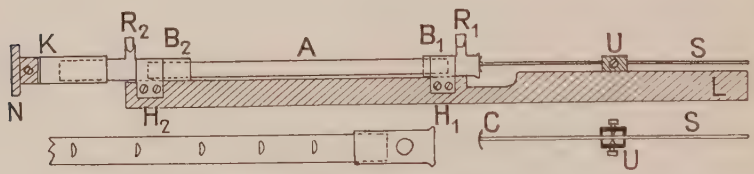
Ett par år innan lektor K. V. LENANDER i Elementa *24* (1941), s. 75 publicerade sin intressanta redogörelse för D'ANDRADES undersökningar över svängningsförhållandena m. m. i Kundts rör hade jag vid försök att finna ett lämpligt stoff för beskickning av rören stannat vid dels väl torkad tobaksrök och dels slutligen lätt magnesiumoxid, magn. oxid. leve. Pulvret bör köpas på apotek och förvaras lämpligen i väl tillsluten burk.

Tekniken vid användning av tobaksrök visade sig rätt besvärlig med de primitiva möjligheter som stodo till buds och därmed olämplig ur skolsynpunkt, varför vid de fortsatta försöken pulvret kom till användning.

I början användes ganska långa och vida rör, men i likhet med C. RENDAHL (Elementa *20* (1937), s. 191) övergick jag snart till kortare och smalare sådana, då försökens skärpa blev större. Som »frekvensgenerator» användes en specialbyggd pipa med variabel längd och högt svängningstal, som gav en ganska ren ton (första övertonen?; grundtonen och övriga övertoner dämpade). Här skall ej redogöras för denna. Pipan anblåstes med en kraftig kompressor. Öronproppar nödvändiga.

Vid försöken med rök måste pipan vara sluten i båda ändar. Det visade sig, att bättre och skarpare resultat erhöllos även med pulvret, om den förut mot svängningskällan öppna ändan tillslöts med en tunn gummihinna och om anordningen för variation av rörlängden gjordes så tät som möjligt och kolvens botten skarpt begränsad och av hårt material. Genom att ett slutet rör användes kunde även hastigheten i olika gaser bestämmas.

Vid försöken framträda de av d'Andrade så utsökt vackert påvisade skivorna tydligt och även under vissa förhållanden »ögonen». Vid full och kraftig resonans reser sig pulvret och bildar i bukarna många gånger skivor, som fylla röret »från golv till tak» i bukarnas mitt och avtaga i fullständighet och skärpa mot noderna. En »vandring» av skivorna framträder även tydligt. »Det skrider som vikingasegel genom röret», som en åskådare en gång uttryckte sig. Intressant är även att studera pulverrörelsen i skivorna och förhållandena, då röret lutas något mot horisontalplanet. Här skola dessa fenomen ej behandlas.



Anordning för Kundts försök.

För elevlaborationer är en pipa olämplig, varför jag sökte en ej alltför skrymmande anordning med svängande stänger enligt den gamla metoden, lätthanterlig och färdig för bruk omedelbart.

Anordningen är monterad på en »sockel» av furulist L (1,5 tum fyrkant; se fig.).

Glasröret A är »skott» i ändarna med två mandrillrör (mässingsrör med godstjocklek 0,45 mm) B_1 och B_2, som fästs vid glasröret med en gröt av glycerin och blyglete. På mandrillrören ha tennlödits två ansatsrör (R_1 och R_2). Över B_1 och B_2 ligga två band av mässingsplåt (H_1 och H_2), som dels fästa röret vid sockeln, dels hindra event. brytningar, då kolven K förskjutes. Röret B_1 är i ändan försett med en fläns (pålödd ring av 1,5 mm mässingstråd, som sedan finpolerats). Flänsen tjänar som fäste för gummihinnan, som sluter denna rörända. Utanpå röret B_2 löper »kolven» K, gjord av mandrillrör av närmast större vidd än B_2. Mandrillrören sluta mycket tätt. Glapprummet är 0,05 mm. Kolven är sluten med en invändigt fastlödd mässingsbricka, stödd av hand-

taget *N*, som svarvats av trä och fästs med en skruv. Under röret *A* är fastlimmad en pappersskala, graderad i mm. Dylika skalor kunna köpas från Lindståhls bokhandel, Odengatan 22, Stockholm; längd 30 cm; klippas de mitt itu på längden och hoplimmas på en trälist, erhålles en utmärkt skala av 60 cm längd.

Metallstaven *S* är monterad i en bit U-mässing (*U*) och fasthålles på mitten av två tillspetsade järnskruvar, för vilka små hål borrats i staven. På ena ändan har tennlödits en tunn (0,3 mm; ca 15 mm diameter) något kupad mässingsskiva. Man kan även kitta fast en tunn korkskiva, t. ex. korkförslutningarna i ölbuteljer, men lossnar skivan det minsta, är det svårt att få staven att svänga kraftigt. Den lilla mässingsskivans efter utstansningen (med en huggpipa) skarpa kanter böra jämnas; säkrast är att klä över den med t. ex. en bit tunn leukoplast, då de ganska skarpa kanterna eljest kunna skära sönder gummihinnan.

I detta sammanhang kan även nämnas, att man bör vara aktsam om mässingsstängerna vid inköp och kapning. En böjning kan orsaka en liten bräcka i godset (invändigt), vilket medför att stången svänger ytterst dåligt. Stänger, som ej svänga lätt, böra kasseras. Jag har funnit, att det går minst lika bra med mässingsrör (1 mm gods), liksom stängerna 6 mm i diameter.

Tack vare det »skarpa» montaget bringas staven lätt i kraftiga svängningar. För egen del använder jag endast fingrarna bestrukna med litet harts. Strykningen bör ske *lätt*, och man lättar successivt på trycket, då handen föres utåt stavändan. Vid hårdare grepp dämpas omedelbart de uppkomna svängningarna. Staven »sjunger av sig själv» utan hjälp av resonansen i röret, vilket på sätt och vis är en nackdel, då det är svårt att *höra*, när röret resonerar starkast. Detta avgöres skarpare på annat sätt.

Försökets utförande:

1. Kolven *K* uttages, och röret beskickas med en ganska rikligt tilltagen mängd pulver, som skakas till en någorlunda jämn sträng. En av laboranterna gnider stången, den andre förskjuter kolven. Vid någorlunda god resonans reser sig pulvret till skivor. Noder och bukar framträda vackert. Man gör ett litet märke på röret B_2, där kolvröret slutar.

2. Röret hålles lodrätt med kolven nedåt och skakas, så att pulvret rinner ned i kolven, varifrån det hälles i pulverbehållaren. Något litet stannar kvar på glasrörets väggar.

3. Kolven inskjutes till sitt förra läge. Röret lutas rätt kraftigt mot vågplanet och stången anstrykes. Pulvret samlar sig efter några anstrykningar i små högar. Man granskar högarna. Är

resonansen ej fullständig, bli högarna oskarpa och något utdragna. Man justerar kolven, skakar röret i vågrätt läge och anstryker som förut med lutat rör. Vid full resonans få högarna den form, som angives i fig. (nedre bilden till vänster) och avläsning av halvvågornas längder kan göras på mindre än 1 mm när.

4. Vid bestämning av ljudhastigheten i gaser fylles glasröret genom ansatsröret R_2, som kopplas till kolsyre- eller syrgasbehållaren. Lysgas eller vätgas från gasutvecklingsapparat bör ledas genom torkanordning.

I stället för mässing har även järn och glas använts. Järn svänger ofta sämre. Glasstången har på mitten försetts med en liten ligaturbit, omsluten av ett stycke mässingsrör för skruvfästena. Glasstången brister ej sällan, varför den övergivits.

Tack vare att apparaturen är färdigmonterad, medhinnes försöket väl. Laboranterna böra först öva sig en stund i strykningstekniken.

Anordningen har även använts för bestämning av hastigheten i vatten, varvid ena ansatsröret var kopplat till en sughävert, vars andra ända doppade ned i en bägare med vatten. Vid kolvförskjutningarna strömmade vattnet till eller från röret. Som pulver användes bl. a. grafitkorn. Försöket är svårt och »slaskigt», varjämte hinnorna lätt brista. Rekommenderas ej.

Några data: Mässingsstavens längd ca 50 cm; ger halvvåglängder i luft på ca 5 cm. — Glasröret: längd 60 cm, yttre diameter 28 mm (högst), godstjocklek 1,5—2 mm. — Mandrillrören B_1 och B_2: ca 11 resp. 3,5 cm långa, diameter 29 mm. — Kolvröret K: längd 11 cm, diameter 30 mm. Dessa dimensioner ha valts, då mandrillrör med successiva diameterdifferenser på 1 mm finnas från 1 mm till 30 mm. — Ansatsrören R_1 och R_2: yttre diameter 9 mm, 1,5 mm gods; invändigt något koniskt svarvade för korkarna.

Elektroniklaboratoriet vid Chalmers tekniska högskola. I.

Av TORSTEN JÖNSSON.

Institutionen för teleteknik och elektronik vid Chalmers tekniska högskola omfattar fyra avdelningar, nämligen laboratorium för radioteknik, laboratorium för telefoni och elektroakustik, elektroniklaboratorium samt jonosfärobservatorium. Institutionen har organiserats av docenten Olof Rydbeck, D. Sc., som också förestått den från dess upprättande år 1940.

Elektroniken är en vetenskapsgren i kraftig utveckling, och dess forskningsresultat utnyttjas i ständigt växande omfattning inom andra vetenskaper och inom tekniken. En redogörelse för arbetet på ett modernt elektroniklaboratorium torde därför vara av intresse.

1. Inledning.

Elektronik i vidsträckt mening omfattar studiet av alla fenomen, där elektroner äro engagerade. På senare tid har man emellertid tilldelat termen elektronik en mycket mera inskränkt betydelse. Sålunda menar man nu med elektronik den vetenskapsgren, som behandlar de fenomen, som sammanhänga med elektrisk ström i gaser och i vakuum, samt de tekniska tillämpningarna härav.[1]

Trots denna begränsning är ämnet mycket omfattande. Sålunda omfattar den *fysikaliska elektroniken* eller *elektronfysiken* studiet av elektroners och joners beteende i materiefritt rum under inverkan av elektriska och magnetiska fält av olika slag, växelverkan mellan elektroner (och joner) och materia, t. ex. andra elektroner och atomer, växelverkan mellan elektroner och strålning, utveckling av metoder för frigöring av elektroner, varvid all materia, såväl i fast som flytande och gasformigt tillstånd, utgör en potentiell elektronkälla, utveckling av metoder för styrning av elektronströmmar.

Den *tillämpade* eller *tekniska elektroniken* omfattar flera betydande områden. Självfallet har elektroniken sina vidsträcktaste

[1] American Standard Definitions of Electrical Terms — A. S. A. No. C 42, 1941.

tillämpningar inom radiotekniken, men den expanderar utanför detta område med exceptionell snabbhet. Såsom exempel från »kraftelektroniken» kan nämnas likriktning av växelström, inversion av likström, frekvensändring, hastighetskontroll av motorer, automatisk spänningskontroll av generatorer, in- och urkoppling av starkström utan ljusbågebildning, belysningskontroll, elektrisk svetsning. Undersökningarna av växelverkan mellan elektroner och strålning ha möjliggjort fotocellen samt de olika slagen av urladdningslampor, t. ex. ljusreklamrören, natriumlampan, kvicksilverånglampan och lysämneslampan. Elektroniken har överhuvud fått en framträdande plats inom belysningstekniken och innefattar inte endast de olika typerna av lampor utan även de apparater, som utvecklats för automatisk kontroll av desamma.

Den fysikaliska och elektriska mättekniken har revolutionerats genom uppfinningen av ett stort antal apparater, där elektronrör av olika slag utnyttjas. Häri inbegripes inte endast apparater för mätning av rent elektriska storheter, såsom ström, spänning, elektricitetsmängd, frekvens, motstånd, utan även mätning av storheter av annat slag, såsom tid, hastighet, längd, belysning, färg. Man kan i detta sammanhang påpeka, att akustiken, som vid sekelskiftet ansågs vara en vetenskap, där ingenting mer fanns att uträtta, tack vare de hjälpmedel, som elektroniken ställt till förfogande, undergått en enorm utveckling under de två sista decennierna.

Härtill kommer ett ofantligt antal speciella ändamål, både vetenskapliga och rent praktiska, för vilka elektronikapparater komma till användning. Det skulle föra för långt att gå in härpå, men man kan ju peka på elektronikinstrumenten i flygets och sjöfartens tjänst samt elektronmikroskopet i medicinens och textilforskningens. Vidare förtjänar elektronikens militära betydelse under andra världskriget att nämnas, en betydelse som ännu inte på långt när kan överblickas. Den överlägsenhet, som de allierade så småningom tillkämpade sig, torde till icke ringa del ha sin grund i den höga ståndpunkt, som elektronikforskningen intar i England och framförallt U. S. A.

De strömstyrkor man rör sig med inom elektroniken täcka ett vidsträckt storleksområde. Man kan nämna å ena sidan elektrometervakuumröret, med vars hjälp man kan mäta strömstyrkor ner till 10^{-15} amp, å andra sidan kvicksilverlikriktare för järnvägsdrift eller moderna elektriska svetsaggregat, av vilka senare det finns för tusentals amp.

Trots att elektroniken sedan åtskilliga år befunnit sig i explosionsartad utveckling, har utbildningen och forskningen på området här i Sverige länge varit försummad med undantag för den

del av ämnet, som har direkt tillämplighet på radiotekniken. Det är emellertid hög tid, att svensk elektronikforskning får ordentligt stöd, så att vi inte komma ohjälpligt på efterkälken.

Vid Chalmers tekniska högskolas institution för teleteknik påbörjades elektronfysikalisk forskning och undervisning i liten skala 1943. Statligt anslag till ändamålet saknades helt. Emellertid kunde under 1944 ett visserligen efter internationella förhållanden litet men fullt modernt laboratorium för elektronik inredas, varvid samtidigt institutionen döptes om till Institution för teleteknik och elektronik. Laboratoriet möjliggjordes genom penningunderstöd från Knut och Alice Wallenbergs stiftelse samt genom betydande bidrag i form av instrument, materiel och verkstadsutrustning från ASEA, Lumalampan AB, AB Standard Radiofabrik, AB Svenska Elektronrör, Elektriska AB Skandia och Svenska AB Philips. Ytterligare bidrag ha utlovats från enskilt håll, varigenom en planerad utvidgning kan genomföras innevarande år. Den kände pionjären inom svensk rundradio, överingenjör Karl G. Eliasson, har kraftigt verkat för laboratoriets tillkomst.

Till ett elektroniklaboratoriums utrustning hör förutom instrument och apparater för elektriska och optiska mätningar, apparatur för högvakuumarbeten samt apparaturer för undersökning av gasurladdningar vid olika tryck (från 10^{-3} mm Hg upp till flera atmosfärer). För att elektronikforskning skall kunna bedrivas effektivt är det oundgängligen nödvändigt att ha tillgång till förstklassigt utrustad verkstad för finmekaniskt arbete och glasarbete samt välkvalificerade mekaniker och glasblåsare.

2. Pumpstationer.

Laboratoriet är utrustat med två fasta pumpstationer och en pumpstation på hjul, varjämte ytterligare tre fasta stationer äro under montering.

Den rörliga pumpstationen utgöres av en kapselpump och en molekylarpump av Siegbahns konstruktion.

De två fasta pumpstationer, som äro i bruk, äro anordnade så som framgår av den schematiska fig. 1, som torde förstås utan vidare, samt fig. 2. Förvakuumpumpen är en kapselpump, och högvakuumpumpen är en tvåstegs kvicksilverdiffusionspump av metall med elektrisk uppvärmning. Med enbart förvakuumpumpen inkopplad kan man komma ner till ett tryck av 0,004 mm Hg i pumpsystemet, och med förvakuumpumpen i serie med diffusionspumpen uppnås ett vakuum, som är något bättre än 10^{-6} mm Hg. McLeodmanometern kan genom användning av tre olika skalor användas för mätning av tryck mellan 10^{-4} och 24 mm Hg. Dess-

utom finns tillkopplad ytterligare en McLeodmanometer av något annorlunda konstruktion, som tillåter mätning ehuru med reducerad noggrannhet ner till 10^{-5} mm Hg (ej utritad i fig. 1).

För vakuummätning användas vidare Pirani-, jonisations- och Langmuirmanometrar. Dessutom finns på en av pumpstationerna, som användes även för övningslaborationer, en s. k. ASEA-mano-

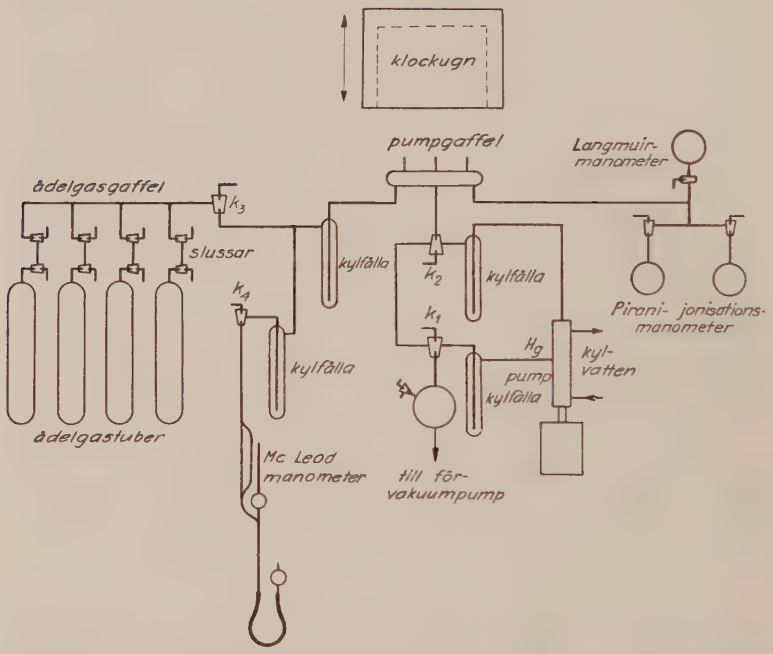


Fig. 1. Pumpstation. Det rör, som skall evakueras resp. fyllas med gas, smältes på pumpgaffeln.

meter, som i princip är en Piranimanometer men har en något avvikande konstruktion för att vara lämplig för industriellt bruk. Kylfällorna, som avse att binda de icke permanenta gaserna (kvicksilverånga, vattenånga, koldioxid etc.) kylas med flytande syre i öppna Dewarkärl. Numera tillverkas i Sverige Dewarkärl av sådan kvalitet, att de uthärda den låga temperaturen utan att springa sönder. Som synes äro kylfällorna placerade så, att de hindra kvicksilverånga att komma från diffusionspumpen och McLeodmanometern in i pumpgaffeln och förvakuumpumpen. Klockugnen, som är en elektrisk ugn av parallellepipedisk form, kan sänkas ner över pumpgaffeln. Med dess hjälp avlägsnas de gaser, som adsor-

berats på glasväggen (vatten, koldioxid, koloxid etc.). Ugnsbehandlingen sker under samtidig evakuering. Ugnen kan ställas in på $^1/_4$, $^1/_2$ och 1 kW effekt, och en temperatur på något över 500° C kan erhållas. I en senare del av uppsatsen kommer att redogöras för ugnsbehandling av elektronrör.

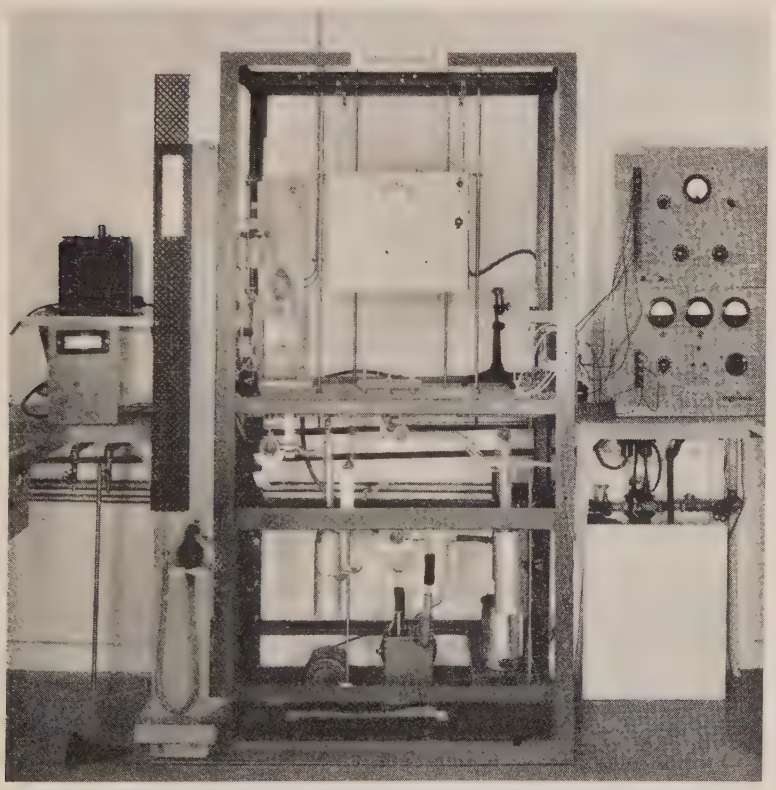


Fig. 2. Pumpstationen är utförd med svetsad stomme och delas genom en eternitplatta i två våningar. Under plattan befinna sig pumparna och huvudparten av glasrörsystemet. Ovanför plattan sitta pumpgaffeln (i mitten), manometerrören för Pirani-, jonisations- och Langmuirmanometrarna (till höger) samt ASEA-manometern och den speciella McLeodmanometern (till vänster). Till vänster under den perforerade skyddsplåten sitter den vanliga McLeodmanometern. I ett skåp vid vänstra gaveln befinna sig gastuberna. Ovanför pumpgaffeln hänger klockugnen, som rör sig på gejder. Till höger om pumpstationen synas panelerna för Pirani- och jonisationsmanometrarna samt en strömbehandlingspanel (nederst) och till vänster den till ASEA-manometern hörande mätaren.

För att man skall uppnå tillfredsställande pumphastighet (jfr nedan), böra rörledningarna vara så vida som möjligt, och kranarna böra dimensioneras i relation härtill. En högvakuumkran bör helst vara så stor, att hålet i krankiken kan ha samma diameter som de anslutna rören. På grund av omöjligheten att under nuvarande förhållanden erhålla stora högvakuumkranar ha tyvärr dessa önskemål inte kunnat tillgodoses i full utsträckning. (De största kranarna ha 15 mm hål.) För övrigt skall här inte ingås på detaljer i fråga om pumparnas och pumpsystemets konstruktion. En redogörelse för alla de försiktighetsmått, som måste iakttagas vid konstruktionen av en pumpstation, om man vill att den skall ge gott vakuum, skulle föra för långt.

3. Något om pumphastighet och evakueringstid.

För undersökning av begreppet pumphastighet kan man lämpligen tänka sig en stor behållare, som medelst en tunn vägg, försedd med en öppning med arean A cm², är delad i två rum. I det ena rummet finns en gas med trycket p dyn/cm², i det andra råder perfekt vakuum. Genom en enkel gaskinetisk beräkning finner man, att den volym V, mätt vid trycket p, av en gas med molekylvikten M, som per sek passerar genom öppningen, bestämmes av formeln

$$\frac{dV}{dt} = A\sqrt{\frac{R}{2\pi}\cdot\frac{T}{M}} = 3{,}64\cdot 10^3\cdot A\sqrt{\frac{T}{M}} \quad (\mathrm{cm^3/sek}) \qquad (1)$$

Värdet på dV/dt för luft ($M = 29$) vid rumstemp. ($T = 300°$ K) är 11 700 cm³/sek.cm² eller 11,7 liter/sek.cm². En sådan tänkt öppning av ytan 1 cm² till ett perfekt vakuum kan betraktas som en pump med pumphastigheten 11,7 liter/sek. Det bör observeras, att dV/dt är oberoende av trycket.

Diffusionspumpar överensstämma med en sådan hypotetisk anordning däri, att deras pumphastighet är av samma storleksordning och att de uppvisa approximativt konstant pumphastighet inom ett ansenligt tryckområde. Då sålunda dV/dt är oberoende av trycket, har en diffusionspump teoretiskt intet gränsvakuum. Att i praktiken inte hur högt vakuum som helst kan erhållas beror på läckning i apparaturen (huvudsakligen kranarna) eller på gasning från gasskikt, som äro adsorberade på väggarna. Det gränsvakuum, som uppstår, då jämvikt uppnåtts mellan å ena sidan pumphastigheten och å andra sidan apparaturens läckning och gasning, bestämmes sålunda inte av pumpens egenskaper utan av apparaturen, som evakueras.

Pumphastigheten för en diffusionspump uttryckes på motsvarande sätt som antalet liter, som passerar pumpens munstycke per sek, mätt vid det tryck, som härskar i munstycket. Hastigheten per cm^2 av munstyckets tvärsnitt, dividerad med 11,7, kallas pumpens hastighetsfaktor. Denna är för kvicksilverdiffusionspumpar 0,1—0,3 och för oljediffusionspumpar 0,5—0,6.

Antag nu, att en pump med hastigheten S_0 är förbunden med en apparatur medelst en rörledning. Om effektiva pumphastigheten vid ledningens andra ände är S, så definieras ledningens *motstånd* W av formeln

$$W = \frac{1}{S} - \frac{1}{S_0}. \tag{2}$$

Motståndet W bestämmes av Knudsens formel

$$W = \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{M}{RT}} \cdot \left(\frac{l}{d^3} + \frac{4}{3d^2}\right) = 2{,}62 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{M}{T}} \cdot \left(\frac{l}{d^3} + \frac{4}{3d^2}\right) \text{ (sek/cm}^3\text{)} \tag{3}$$

där l cm är ledningens längd och d cm dess diameter. Den första termen inom parentesen representerar rörmotståndet. Den andra termen representerar motståndet av ändarna (eller av en ev. skarp krök) och är i allmänhet liten i jämförelse med den första och kan försummas. Formeln gäller under förutsättning att fria medelväglängden är mycket större än d, dvs. att inre friktionen kan lämnas utan avseende. Gasmolekylerna stöta då övervägande mot rörväggen, medan intramolekylära stötar endast förekomma i försumbar utsträckning. Under vilka förhållanden detta villkor är uppfyllt torde tab. 1 ge en uppfattning om. Vid så höga tryck, att Knudsens formel inte gäller, blir formlerna för motståndet mera komplicerade.

Tillämpas formeln på luft vid rumstemperatur och utbytes d^3 mot $8r^3$ samt uttryckas l och r i mm samt W i sek/liter fås, om andra termen inom parentesen försummas, den enklare formeln

$$W = \frac{l}{r^3} \text{ (sek/liter)} \tag{4}$$

Om ledningen inte överallt har samma tvärsnitt, måste varje del beräknas för sig:

$$W = \frac{l_1}{r_1^3} + \frac{l_2}{r_2^3} + \frac{l_3}{r_3^3} + \ldots \tag{5}$$

Tab. 1. Fria medelväglängden λ för kväve vid 0° C och trycket p mm Hg.

p	λ
760	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm
1	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm
10^{-3}	6,5 cm
10^{-4}	65 cm
10^{-5}	6,5 m
10^{-6}	65 m
10^{-9}	65000 m

Effektiva pumphastigheten är enl. (2)

$$S = \frac{1}{W + \frac{1}{S_0}}.$$

Numeriskt exempel: För ett rör av 250 mm längd och 5 mm radie är $W = 2$ sek/liter. Antages ett sådant rör förbundet med en så god pump, att man kan sätta $1/S_0 = 0$, blir $S = {}^1/_2$ liter/sek, som sålunda är den största möjliga pumphastigheten.

Om en apparatur med volymen V och gränsvakuum p_g evakueras med effektiva pumphastigheten S och om trycket antages ändra sig från p till $p + dp$ under tidsintervallet dt, så gäller (eftersom i allmänhet $pdv = -vdp$ vid konstant temperatur)

$$S \,.\, dt \,.\, (p - p_g) = -\,V \,.\, dp,$$

dvs. tryckändringen är

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{S}{V}(p - p_g). \tag{6}$$

Härur fås, om begynnelsetrycket är p_0,

$$t = \frac{V}{S} \cdot ln \frac{p_0 - p_g}{p - p_g}. \tag{7}$$

Med hjälp av denna formel kan man beräkna den tid, som erfordras för att sänka trycket i en apparatur från p_0 till p. Om p_0 är mycket större än p_g, kan p_g försummas i täljaren, och man får

$$p = p_g + p_0 \cdot e^{-\frac{S}{V} \cdot t}. \tag{8}$$

I ett halvlogaritmiskt diagram är alltså »evakueringskurvan» $p = f(t)$ en rät linje, så länge S är konstant och p_g kan försummas i jämförelse med p.

4. Vakuummätning.

McLeodmanometern. Elektroniklaboratoriets McLeodmanometrar tillåta, som förut nämnts, mätning av tryck mellan 10^{-5} och ca 20 mm Hg. Emellertid kan man få en kvalitativ uppfattning om även lägre tryck. Vid tryck omkring 10^{-6} mm Hg och därunder kan man nämligen komprimera gasen i kompressionskapillären till en omärkligt liten volym. Gasskiktet mellan kvicksilvermenisken och kapillärtoppen är då så tunt, att adhesionen mellan kvicksilvret och glasväggen gör sig gällande. Sänker man då kvicksilvret i avläsningskapillären, så klibbar kvicksilverpelaren i kompressionskapillären fast vid rörtoppen och lossnar först vid en höjd-

skillnad på några mm eller cm, beroende på hur gott vakuum man har. Då detta fenomen uppträder, talar man om *klibbvakuum*, och man har häri en möjlighet att uppskatta vakuumgraden. McLeod-manometern är en absolut manometer. Den mäter emellertid endast de permanenta gasernas tryck. Trycket av ev. förefintliga ångor kommer alltså inte med.

Piranimanometern. Värmeledningsförmågan för en gas är vid låga tryck beroende av trycket. Eftersom värmeledningen tillgår så, att gasmolekyler i områden med högre temperatur genom stöt uppta kinetisk energi, som sedan avges i områden med lägre temperatur, måste värmeledningsförmågan vid mycket låga tryck vara nästan = 0. Med stigande tryck växer värmeledningsförmågan proportionellt mot trycket, tills fria medelväglängden blir av samma storleksordning som det ledande gasskiktet. Därefter växer ledningsförmågan långsammare och närmar sig ett gränsvärde, som vid gasskikt av storleksordningen cm uppnås vid 3—5 mm Hg. Om en metalltråd är uppspänd i ett slutet gasfyllt glasrör och uppvärmes med en konstant elektrisk ström, kommer trådens temperatur och därmed dess elektriska ledningsmotstånd att bestämmas av a) värmeledningsförmågan genom gasen, b) värmestrålningen från trådens yta, c) värmeledningen genom tilledningarna. Om det sörjes för att värmeförlusterna enligt b) och c) äro konstanta, så blir trådens motstånd en funktion av gastrycket.

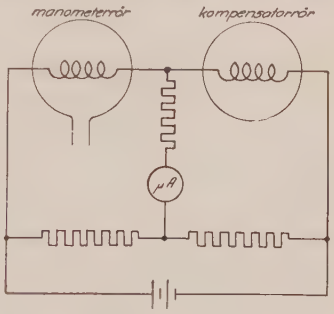


Fig. 3. Principschema vid mätning med Piranimanometer. De båda grenmotstånden böra vardera vara ungefär lika stora som manometertrådens motstånd vid högt vakuum.

På elektroniklaboratoriet användes manometerrör, tillverkade av Standard Radiofabrik. Ett sådant rör utgöres av en glasballong, i vilken en ytterst tunn (diam. 0,008 mm) volframtråd (man bör ha en metall med stor temperaturkoefficient) av ca 280 ohms motstånd är uppspänd. För mätning behövas två manometerrör, nämligen ett, som är helt slutet och högevakuerat (kompensatorrör), och ett som är påsmält pumpsystemet (manometerrör). Rören kopplas in i en om »Wheatstones bryggkoppling» erinrande anordning (fig. 3—4). Det är utan vidare klart, att strömstyrkan, som avläses på mikroamperemetern, vid konstant batterispänning är en funk-

tion av manometertrådens motstånd och därmed av gastrycket. Piranimanometern kalibreras genom jämförelse med en McLeod-manometer. Då värmeledningsförmågan är olika för olika gaser, måste man ha en kalibreringskurva för varje gas, vilket givetvis är en olägenhet. Å andra sidan kan man, om man arbetar med blandningar av kända gaser, kalibrera manometern så, att den kan användas för kontroll av sammansättningen. För sådant ändamål

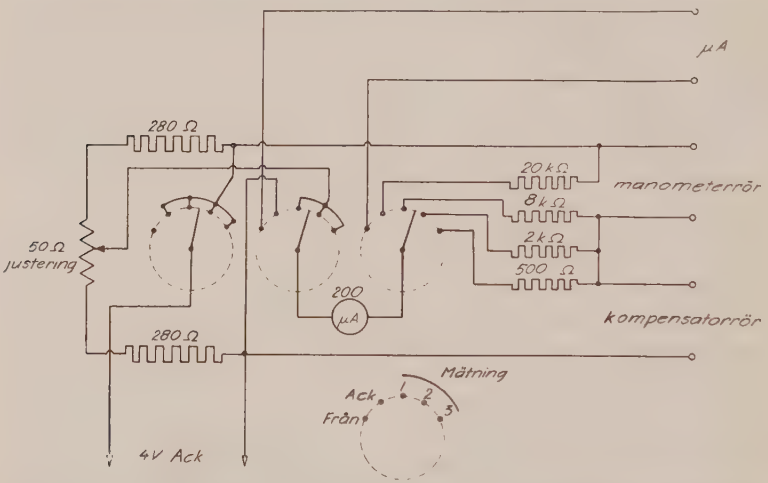


Fig. 4. Mätanordning för Piranimanometer. Justeringen på 50-ohms-motståndet tjänar till fastläggande av utgångsläget på μA-meterns visare. Genom användning av tre förkopplingsmotstånd till μA-metern fås tre »mätområden». Omkopplarna äro anordnade så, att μA-metern även kan användas för kontroll av ackumulatorn samt helt isolerad från Piranikopplingen.

användas Piranimanometrar flerstädes inom industrien. Piranimanometern mäter även trycket av ångor i motsats till McLeod-manometern. Piranimanometern är bekvämare att handha än McLeodmanometern. Mätområdet är 10^{-4}—1 mm Hg. Fig. 5 visar exempel på en kalibreringskurva för luft.

Jonisationsmanometern. Denna är en triod, som användes enligt principschemat i fig. 6. Elektronerna, som emitteras av glödtråden, accelereras till gallret, som har en jämförelsevis hög positiv spänning. På grund av sin rörelseenergi skulle de nå fram till anoden, vilket emellertid förhindras genom att man på anoden lägger en så hög negativ spänning, att elektronerna tvingas tillbaka till gallret. Medan elektronerna befinna sig mellan gallret och anoden, jonisera de genom stöt de där befintliga gasmolekylerna. An-

Fig. 5. Piranimanometerkurva för luft. Tryckområde 10^{-4}—100 mm Hg. Kurvan blir lodrät redan obetydligt över 1 mm Hg.

talet bildade joner är ett mått på antalet stötar och därmed även på antalet gasmolekyler och följaktligen även på trycket. Jonerna vandra till anoden. Instrumentet i anodkretsen mäter sålunda jonströmmen genom röret (I_a), och instrumentet i gallerkretsen mäter elektronströmmen (I_g). Man kan visa, att trycket är

$$p = k \cdot \frac{I_a}{I_g}, \qquad (9)$$

där k beror av rörets geometriska dimensioner samt anod- och gallerspänningarna.

Speciellt för vakuummätning avsedda trioder av Standard Radiofabriks tillverkning användas (fig. 7). Glödtråden är av oxidkatodtyp. Anodspänningen hålles på — 15 volt. Gallerströmmen hålles konstant (20 mA), varigenom trycket blir proportionellt mot jonströmmen, dvs.

$$p = k \, . \, I_a. \qquad (10)$$

I_a är av storleksordningen μA. Konstanten k bestämmes genom kalibrering mot andra manometrar. Den är olika för olika gaser och alltså beträffande blandningar beroende av sammansättningen.

Jonisationsmanometerns mätområde begränsas nedåt av möjligheten att mäta anodströmmen (med rör av speciell konstruktion kan man komma ner till 10^{-9} mm Hg) och uppåt av inträdande glimurladdning (ca 10^{-3} mm Hg). Storheten k i (9) är konstant, så länge elektronernas fria medelväglängd är stor. Då denna blir av samma storleksordning som rördimensionerna, blir k variabel, beroende på att en elektron då kan jonisera

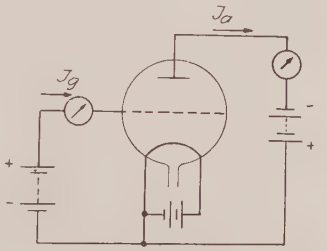


Fig. 6. Jonisationsmanometer. Principschema.

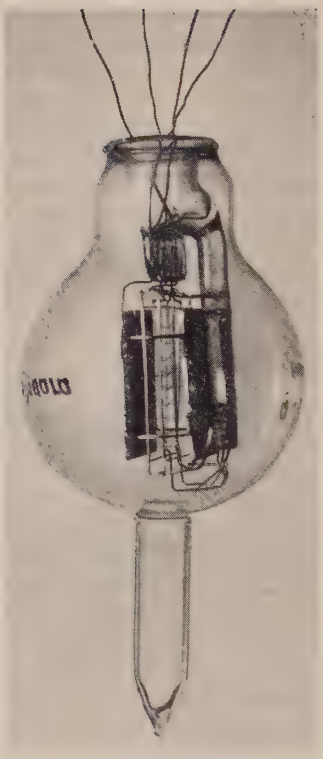


Fig. 7. Jonisations-manometerrör.

mer än en gång, varjämte även jonerna bidra till joniseringen. Man får alltså genom denna bildning av sekundärelektroner större gallerström än som svarar mot den från katoden utgående elektronströmmen, varför inom ifrågavarande tryckområde (10^{-4}—10^{-3} mm Hg) en särskild kalibreringskurva erfordras. Jonisationsmanometer användes av oss inom området 10^{-6}—10^{-4} mm Hg. Konstanten k är här av storleksordningen 10^{-6}, om I_a uttryckes i μA.

Självfallet bör man inte med denna manometer mäta på gaser, som kemiskt angripa katoden. Särskilt gynnsamma för mätning äro lätt joniserbara gaser (t. ex. argon), eftersom de ge stor jonström. Då manometerröret inte användes, bör det vara högevakuerat. Det bör alltså kunna avstängas medelst högvakuumkran.

Innan röret kan användas för mätning, måste det liksom elektronrör i allmänhet aktiveras. (Aktivering av rör behandlas i en följande del av uppsatsen.) Det är då praktiskt att ha en anordning, som tillåter såväl aktivering som mätning med användning av samma panel. Fig. 8 visar det av oss använda arrangemanget.

Langmuirmanometern. Vid låga tryck (under 10^{-1} mm Hg) är gasernas viskositet tryckberoende. På detta förhållande grundar sig Langmuirs manometer, vars konstruktion framgår av fig. 9. I ett glasrör är en flat kvartsfiber vertikalt fastsmält vid sin övre ände. Fibern kan försättas i svängningar medelst en kopparbygel med tvärstycke av järn, som stjälpes över med en magnet. Svängningarna dämpas huvudsakligen av gasens viskositet, medan dämpningen till följd av den inre friktionen i kvartsen är obetydlig. Mellan gastrycket p och svängningsamplitudens halvvärdestid t gäller följande enkla samband

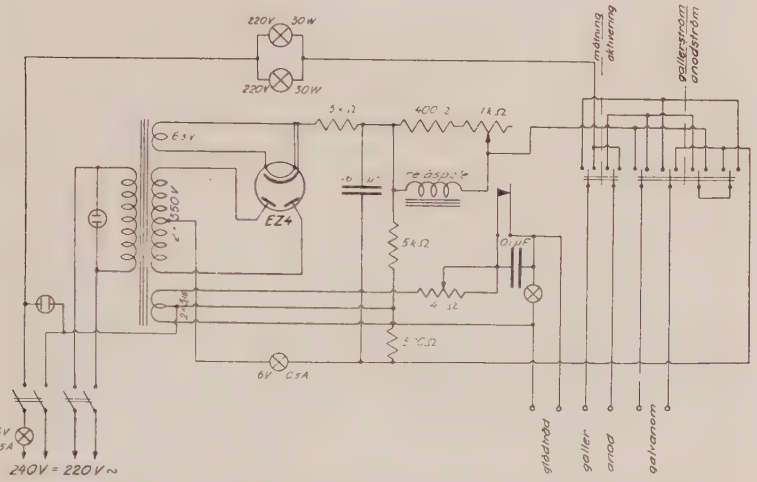


Fig. 8. Apparat för aktivering av och mätning med jonisationsmanometerrör. Reläets uppgift är att bryta alla rörets strömkretsar, ifall man skulle råka ställa in gallerströmmen på för högt värde.

$$p\sqrt{M} = \frac{a}{t} - b, \qquad (11)$$

där a och b äro manometerns konstanter, vilka måste bestämmas empiriskt. Genom mätning av halvvärdestiden t_0 vid högt vakuum (10^{-6} mm Hg eller mindre), då p kan sättas $= 0$, fås $a/b = t_0$. Fiberns dimensioner böra väljas så, att t_0 inte blir alltför liten, lämpligen 1—2 minuter. Bestämmes vidare halvvärdestiden vid ett känt tryck, mätt t. ex. med McLeod-manometer, så har man ytterligare ett samband mellan konstanterna, varefter dessa kunna beräknas. Man kan också utföra bestämningen genom att mäta på mättad kvicksilverånga vid känd temperatur. Sedan a och b bestämts, är det lämpligt att rita upp kurvor över sambandet $p = f(t)$, en kurva för varje gas, som man arbetar med. Bestämningen av t tillgår så, att man belyser fiberns nedre fria ände samt avbildar den medelst en lins på en transparent skala. Den svängande änden ter sig då som ett lysande band på skalan, och man mäter med stoppur den tid som behövs för att bandets bredd skall minskas till hälften. Instrumentet är bekvämt att handha och tar med tillbehör ringa plats. Mätområdet är 10^{-5}—10^{-2} mm Hg, och sålunda kan instru-

Fig. 9. Langmuir-manometer.

mentet med fördel användas för kalibrering av jonisationsmanometern. Om bygeln ersättes med en bygel av glas med ett järnstycke i, kan Langmuirmanometern användas för mätning på kemiskt aggressiva gaser, eftersom den då inte innehåller några blottade metalldelar. Langmuirmanometern kan tillsammans med en McLeodmanometer också användas för molekylviktsbestämning vid låga tryck. Langmuirmanometrarna ha tillverkats av laboratoriets glasblåsare.

Det finns flera andra vakuummetertyper, men det har inte varit författarens avsikt att behandla andra konstruktioner än de som prövats på elektroniklaboratoriet. Då det är av stort värde att ha tillgång till en absolut manometer för låga tryck, kommer framdeles en manometer av Knudsens typ att tillverkas. Denna manometerkonstruktion grundar sig på radiometereffekten och tillåter absolut mätning inom området 10^{-7}—10 mm Hg. Den är ömtålig och mindre lämplig för rutinmätningar men värdefull som normal.

(Forts.)

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1944—1945.[1]

Göteborg: adjunkt J. Lundberg, 1. Gammalt och nytt i gymnasiets kemikurs. 2. Skolans kemiska undervisningsapparater.

Lund: lektor A. Leide, 1. Mål och vägar för fysikundervisningen vid läroverken. 2. Experimentell behandling av strålgången i linser och optiska instrument; adjunkt R. Nordenstedt, Tillämpning av läran om kemisk jämvikt på olika gymnasiestadier; rektor P. G. Persson, Geometriens grunder.

Stockholm: lektor E. Ingelstam, Några synpunkter på hjälpmedel vid fysikundervisningen; lektor E. Jönsson, Katodstråleoscillografens användning i gymnasiet; fil. mag. A. Skeppstedt, Demonstration av ljusbildsapparater; lektor G. Starck, De komplexa föreningarnas kemi på skolstadiet; lektor A. Wahlgren, Empiriskt införande av logaritmer.

Umeå: adjunkt R. Franzén, Det kemiska experimentet i realskolan; lektor A. Guntsch, Undervisningen om motorer och genaratorer; lektor T. Lundblad, Växelverken mellan biologi- och kemiundervisningen; lektor K. Persson, Matematikskrivningarna på gymnasiet.

Uppsala: adjunkt P. Granath, 1. Fysikundervisningen i realskolan. 2. Läroverkets fysiska institution för realskolan; lektor B. Hedenstedt, Läroverkets fysiska institution för gymnasiet; adjunkt C.-O. Sandström, Läroverkets kemiska institution; adjunkt S. V. Thörnqvist, 1. Enskilt arbete i matematik. 2. Matematiken i läroverken.

[1] Enligt meddelande från Skolöverstyrelsens statistiska byrå förekomma inga uppsatser med matematiskt-naturvetenskapligt innehåll i läroverkens årsredogörelser 1944—1945.

Vitaminernas kemi. I.

En översikt med speciell hänsyn till vitaminforskningens senaste resultat

AV KLAS-BERTIL AUGUSTINSSON.

För människors och djurs normala tillväxt är det icke tillräckligt, att födan blott innehåller de organiska näringsämnena äggvita, fett och kolhydrat, i förening med salter och vatten. Vissa s. k. *accessoriska näringsämnen* måste också vara närvarande. Det förhållandet att det först upptäckta av dessa livsviktiga ämnen innehöll aminogrupper föranledde 1911 den polske biokemisten Casimir Funk att kalla denna nya grupp av näringsämnen *vitaminer* (lat. vita = liv). Denna beteckning har man sedan dess bibehållit, trots att endast ytterst få vitaminer kemiskt sett äro aminer.

Antalet vitaminer har därefter ständigt växt. Till en början fick varje vitamin namn efter den sjukdom (avitaminos), som uppstod vid brist på vitaminet ifråga. Man talade sålunda om anti-beriberi-vitamin, antiskorbutiskt vitamin osv. I avsikt att ernå en enhetlig nomenklatur föreslogs att skilja de olika vitaminerna åt genom att tillfoga stora romerska bokstäver. Man kom alltså att tala om vitamin A, B, C, D osv. och nu är praktiskt taget hela alfabetet taget i anspråk. Den vidare utvecklingen av vitaminforskningen gjorde det dock nödvändigt, att inom vissa grupper, exempelvis vitamin B, särskilja ytterligare vitamin, som betecknades B_1, B_2 osv.

Till en början visste man mycket litet om dessa ämnens kemiska natur. Först sedan man lyckats erhålla vitaminerna i ren form, var det möjligt att kemiskt identifiera dem och utforska deras kemiska konstitution. Det först renframställda vitaminet var B_1 (1926). Sedan ett vitamin erhållits i ren form, dröjde det icke länge förrän dess kemiska byggnad var utforskad. Det skedde första gången 1933 med vitaminerna A och C, och i dag äro de flesta av de mer kända vitaminernas kemiska struktur uppklarad. Den första totalsyntesen av ett vitamin skedde med vitamin C (1933).

Alla vitaminer äro organisk-kemiska ämnen, men de tillhöra icke någon bestämd grupp av organiska ämnen. Namnet vitaminer antyder endast liknande fysiologiska egenskaper för en grupp av ämnen, som i små mängder — antingen som sådana eller som s. k. provitaminer — måste tillföras organismen för att möjliggöra till-

växt och tillförsäkra de olika organen en normal funktion. Försök att indela vitaminerna ur kemisk synpunkt äro därför föga lönande; på sista tiden har emellertid ett försök gjorts i den riktningen (av tysken Hans Vogel). Vanligen uppdelar man vitaminerna i två grupper alltefter deras löslighet. Man talar sålunda om fettlösliga och vattenlösliga vitaminer. Till de förra höra vitaminerna A, D, E, F och K, till de senare vitaminerna B, C och H, antipellagravitaminet, pantotensyra o. a. I det följande skall emellertid bortses från all klassificering, och de olika vitaminerna komma att behandlas i den ordning, som för ett alfabetiskt signerat material ligger närmast tillhands. — Först skall jag dock nämna några nya termer inom vitamin-nomenklaturen.

Under vitaminforskningens utveckling har det flera gånger blivit tydligt bevisat, att två eller flera vitaminer ha förmågan att förhindra uppkomsten av en bestämd bristsjukdom eller avitaminos. Uttrycket *vitamer* har man då föreslagit som ett kollektivnamn för två eller flera ämnen, vars frånvaro förorsakar samma avitaminos. Man talar sålunda om A-vitamerer, D-vitamerer, biotin-vitamerer, K-vitamerer osv. På motsvarande sätt har man föreslagit namnet *hormomer* för en grupp endokrina faktorer med närbesläktade fysiologiska och kemiska egenskaper. I analogi härmed kan man för växthormonerna införa uttrycket *auximer*. — I st. f. vitamerer (hormomerer, auximerer) har man också föreslagit uttrycket *isoteler* med liknande betydelse.

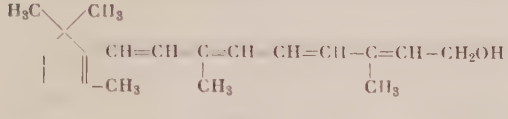
Särskilt inom det forskningsområde, som rör vitaminernas förhållande till cancer (kräfta), har man gjort den betydelsefulla iakttagelsen, att inaktiva föreningar besläktade med vissa bestämda vitaminer förmå framkalla bristsjukdomar genom att kompetitivt ersätta det aktiva vitaminet. Vitamin-analoga substanser, som på detta sätt kunna framkalla avitaminoser eller stegra behovet av ett särskilt vitamin, har man kallat *kompetitiva vitamerer* eller *anti-vitamerer*. En given substans kan hos en individ ersätta ett vitamin, när det gäller tillväxten, och är då en aktiv vitamer, för en annan individ kan samma ämne vara inaktivt, motverka vitaminet och vara en anti-vitamer. Exempel på dylika vitamer — anti-vitamer-system äro följande:

vitamer	*antivitamer*
tiamin (vitamin B_1)	pyritiamin
pantotensyra	vissa sulfonamider (ev. även pantoyltaurin)
p-aminobenzoesyra	sulfonamider
vitamin K	dikumarol
vitamin M	succinylsulfatiazol

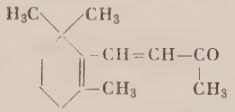
Till dessa återkommer jag längre fram.

Vitamin A

(vitamin A_1) eller axeroftol, $C_{20}H_{29}OH$, är en primär alkohol tillhörande polyenserien. Det innehåller en β-jononring, vars närvaro

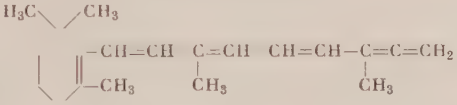


vitamin A



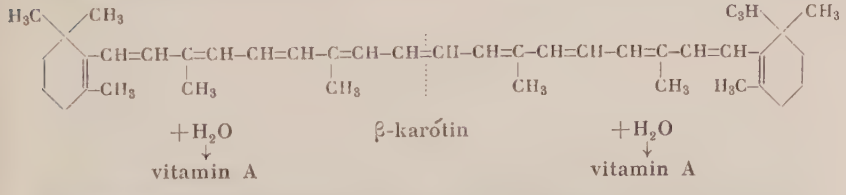
β-jonon

är nödvändig för vitamin A-verkan. Genom förekomsten av 4 dubbelbindningar äro 16 cis-trans-isomerer teoretiskt möjliga. Vilken konfiguration, som tillkommer vitaminet, är icke känt (jfr galol). Varje kemiskt ingrepp i molekylen gör vitaminet overksamt. Ett undantag härifran finns emellertid, nämligen det s. k. »anhydro-vitamin A». Detta får man vid behandling av vitamin A med vattenfri, alkoholisk saltsyra. Den bildade substansen, som till en början kallades »cykliserat vitamin A» på grund av att reaktionen ansågs bestå i en ringbildning, har svag biologisk aktivitet. Bildningen av »anhydro-vitamin A» (»cykliserat vitamin A»), som är ett kolväte $C_{20}H_{28}$, är i själva verket en anhydrering. Den mest sannolika strukturen motsvarar en s. k. »allen»-formel (innehållande två bredvid varandra liggande dubbelbindningar):



»anhydro-vitamin A»

Nära besläktade med vitamin A äro karotinoiderna, röda eller gula färgämnen med 40 C-atomer. De anses vara förstadier till vitamin A och kallas därför också provitamin A. En särställning intar β-karotin ($C_{40}H_{56}$), ur vilken teoretiskt 2 molekyler vitamin A kunna uppstå genom att kolvätet uppspjälkas på mitten under upptagande av 2 molekyler vatten:



En konstgjord omvandling av karotin i vitamin A har ännu icke lyckats. Inom organismen sker emellertid en dylik omvandling i

levern med hjälp av enzymet karotinas. Av de övriga karotinoiderna ha blott de vitamin A-verkan, som innehålla en β-jononring. Förutom β-karotin äro följande att anse som naturliga provitamin A: α-, γ- och (sannolikt) δ-karotin, kryptoxantin (en karotinalkohol) och retinen (i ögats näthinna).

Vitamin A är vid rumstemperatur en svagt gulfärgad olja, som lätt förstöres av luftens syre och av ultravioletta strålar. β-karotin bildar mörkröda kristaller, som i luften lätt sönderdelas under jononavspjälkning (viollukt).

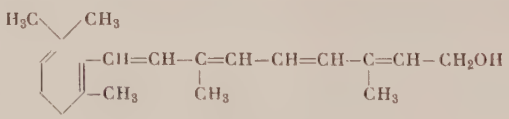
Som nämnts kan man på laboratoriet icke omvandla karotin i vitamin A. En dylik förändring av ett provitamin A har emellertid lyckats med ett nyligen upptäckt provitamin, *kitol*, som isolerats från val-leverolja. Kitol, som är biologiskt inaktivt, innehåller 2 hydroxylgrupper och ger liksom α-karotin endast en molekyl vitamin A. Detta sker vid upphettning. Intressant är, att man funnit kitol även i lever från oxe och får. Vissa fakta tyda också på att kitol är ett post- hellre än ett pro-vitamin.

Vitamin A_1

kallar man ibland det vanliga vitamin A (axeroftol). — von Eulers vitamin A_1 har visat sig vara identiskt med vitamin D.

Vitamin A_2

har man kallat en substans, $C_{20}H_{29}OH$, som till skillnad från vitamin A (hos saltvattenfiskar) förekommer i levern hos sötvattenfiskar. Vitaminverkan för denna A-vitamer har emellertid förnekats, vilket



vitamin A_2

förhållande stödes av att β-jononringen saknas (är uppsprängd). Trots detta anse vissa amerikanska forskare, att vitamin A_2 verkligen har biologisk aktivitet.

Vitamin A_3

säges ingå i en del fiskleveroljor, men närmare kännedom ha vi ej.

Subvitamin A

har ansetts vara en ny vitamin A-aktiv substans i fiskleverolja, med ett annat absorptionsspektrum än de övriga A-vitamerernas. Dess vitamin-verkan är emellertid omstridd.

Galol

är ett helt nytt (1945) vitamin A, som man funnit i leverolja från gråhaj (Galeus), därav namnet. Det har andra egenskaper än vitamin A, och synes vara en geometrisk isomer till detta vitamin. Det skiljer sig från A-vitaminet i cis-trans-konfigurationen vid dubbelbindningen närmast hydroxylgruppen. Man har föreslagit att uppkalla A-vitamererna efter det fisksläkte, där man först upptäckt dem och i vilka de uppträda i koncentrerad form. På så sätt har detta nya vitamin fått namnet galol. Vitamin A från torsk (Gadus) kallas på motsvarande sätt *gadol*, och benämningen på det förut omtalade provitaminet, kitol, har en liknande etymologisk härledning.

Vitamin B

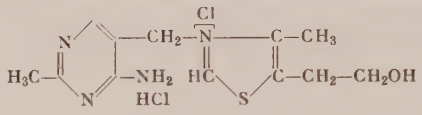
består av flera vattenlösliga vitaminer, och man talar nu allmänt om ett *vitamin B-komplex* (eller bättre ett B_2-komplex) — en »B-familj». Alla hithörande substanser synas med få undantag alltid förekomma tillsammans; särskilt gäller detta fyra B-vitaminer, som intimt följa varandra, nämligen aneurin, laktoflavin, nikotinsyra och pantotensyra. Till komplexet räknas, förutom det värmelabila vitamin B_1, följande huvudsakligen värmestabila substanser (vitamin B_2-komplexet):

tillväxtfaktorer:	hudfaktorer:	anemiskyddsämnen:
vitamin B_2	PP-faktor (niacin)	hämogen
vitamin B_3	vitamin B_6	xantopterin (uropterin)
vitamin B_4 ?	vitamin B_7	vitamin M
vitamin B_5	vitamin B_{10}	tropisk anemi-förhindrande
vitamin B_{11}	vitamin B_v	»Sichelzellen»anemiförh.
vitamin B_w	pantotensyra	vitamin B_c
vitamin B_x	meso-inosit	
p-aminobenzoesyra		
cholin		
glykuronsyra		
chondroitin		
co-zymas		
»folic acid»		
GPF		
vitratropin		

Karakteristiskt för B-vitaminerna synes vara, att de inom organismen förekomma i olöslig, bunden form. Detta har hittills bevisats för exempelvis pantotensyra, biotin, »folic acid» och vitamin B_c.

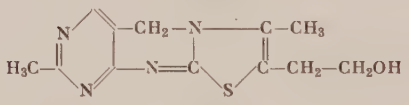
Vitamin B_1

(i Amerika vanligen blott vitamin B), aneurin, tiamin, $C_{12}H_{17}ON_4SCl$, är ett tiazolderivat av 2-metyl-6-amino-pyrimidin, som användes i form av hydroklorid, ett i färglösa nålar kristalliserande salt.



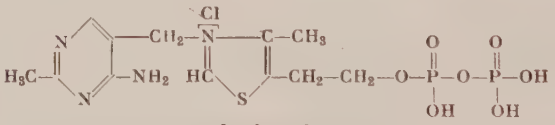
vitamin B_1

Genom försiktig oxidation med exempelvis kalium-järn(III)cyanid oxideras det färglösa, icke fluorescerande vitamin B_1 irreversibelt till ett gult, intensivt blått fluorescerande färgämne, *tiokrom*, $C_{12}H_{14}ON_4S$. Tiokrom är utan vitamin B_1-verkan.



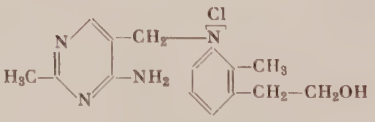
tiokrom

Pyrofosforsyreestern av vitamin B_1 är *co-karboxylas*, den s. k. prostetiska gruppen till enzymet karboxylas, som ur pyrodruvsyra avspjälkar CO_2 under bildning av acetaldehyd. Co-karboxylas har full vitaminverkan.



co-karboxylas

Pyridinanalogen till vitamin B_1, *pyritiamin*, har motsatt verkan jämfört med tiamin. Denna anti-B_1-vitamer innehåller i st. f. tiazol en pyridinring.



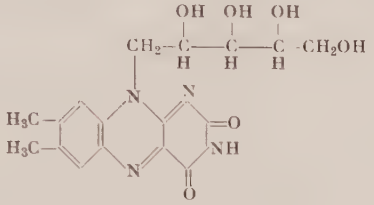
pyritiamin

Ett annat antivitamin B_1 finns både i sötvatten- och saltvattenfiskar. Svensken Ågren har funnit denna antivitamer i färsk fisk av karpsläktet samt i näbbgädda. Norrmännen Ender och Helgebostad ha påvisat den i rå fisk hos bl. a. sill. Antivitaminet förstörs vid kokning av fisken och liknar mycket ett B_1-spjälkande

enzym, som vissa amerikaner funnit hos karpar. Enzymet ifråga klyver aneurinmolekylen i ett pyrimidin- och ett tiazolderivat, vilka båda sakna antiberiberiverkan.

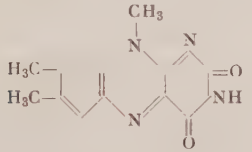
Vitamin B_2

laktoflavin, riboflavin, vitamin G (i Amerika), $C_{17}H_{20}O_6N_6$, är ett i gula nålbuntar kristalliserande färgämne, tillhörande flavinerna

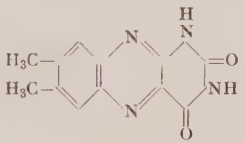


vitamin B_2

(eller lyokromerna). Det utgör ett derivat av det heterocykliska ringsystemet isoalloxazin, i förening med en pentos, d-ribos. Vid bestrålning med synligt och ultraviolett ljus avspjälkas kolhydratkedjan, och vitamin B_2-verkan försvinner. I alkalisk lösning bildas *lumiflavin*, i sur lösning *lumikrom*.

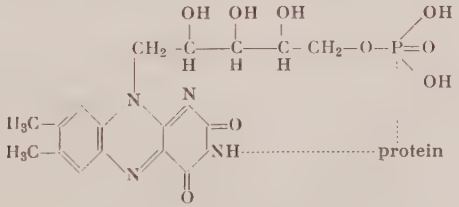


lumiflavin (6, 7, 9-trimetyl-isoalloxazin)



lumikrom (6, 7-dimetyl-alloxazin)

Det fosforylerade vitamin B_2 utgör co-enzymet till det s. k. andningsfermentet eller Warburgs »gamla» gula ferment (flavinenzym). Detta enzym är en förening mellan laktoflavinfosforsyra och äggvita, kopplade tillsammans på följande sätt enl. Hugo Theorell:



andningsferment

Vitamin B_3

är en termolabil tillväxtfaktor för fåglar. Det är mycket litet utforskat; är ev. identiskt med pantotensyra.

Vitamin B_4

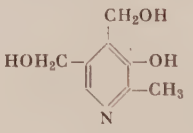
har ansetts vara en antiparalytisk faktor, men vissa iakttagelser på senare tid göra veterligt, att uttrycket »vitamin B_4» har mist sin betydelse.

Vitamin B_5

är en termostabil tillväxtfaktor för fåglar och råttor.

Vitamin B_6

adermin, pyridoxin, $C_8H_{11}O_3N$, är ett kristalliniskt pyridinderivat, som användes i form av sitt klorvätesyrade salt. Vitamin B_6 har även kallats faktor Y och utgör antiråttpellagravitaminet. Dess biologiska »precursor» är sannolikt aminosyran alanin.



pyridoxin

Vitamin B_7

faktor I eller det enterala vitaminet är icke undersökt kemiskt. Dess avitaminossymptom visar skador på matsmältningsapparaten.

Vitamin B_{10}

är nödvändigt för fjäderbildningen, och

Vitamin B_{11}

för tillväxten för kyckling. Båda vitaminerna ha »folic acid»-verkan (se detta nedan), och de äro nära besläktade med det s. k. »vitamin B_c conjugate».

Vitamin B_c

var ursprungligen en beteckning för en antianemisk faktor för kyckling och förekommer i levern. Det har nyligen isolerats i gula kristaller och synes även vara av betydelse för andra djurslag (råtta, hund, apa). Det har sur karaktär och ger salter med tunga metaller. Även i jäst förekommer vitamin B_c, men här i bunden form som s. k. »vitamin B_c conjugate». Denna »förening» har till

skillnad från vitamin B_c självt liten tillväxtbefordrande verkan för mjölksyrebakterien Lactobacillus casei. Genom enzymatisk spjälkning av »vitamin B_c conjugate» blir vitamin B_c fritt och därmed uppkommer L. casei-faktor-verkan. Enzymet ifråga är sannolikt en fosfatas; man har talat om ett »vitamin B_c conjugase».

Från lever och jäst har man isolerat två substanser, som äro mycket aktiva mot L. casei. Leverfaktorn är sannolikt identisk med vitamin B_c, jästfaktorn med »vitamin B_c conjugate». Med det »bundna» vitamin B_c kan också någon eller samtliga av följande jästfaktorer anses vara identiska: faktor U, faktor S, vitamin B_{10} och B_{11} samt »potential folic acid».

Vitamin B_v

är enl. von Euler en för råttor nödvändig faktor.

Vitamin B_w

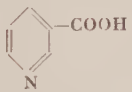
eller faktor W är nödvändig för råttors normala tillväxt. Det synes röra sig om en icke enhetlig substans, som står pantotensyra nära.

Vitamin B_x

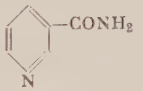
har man kallat en tillväxtfaktor för skalbaggen Tribolium confusum. — Norrmannen Lundes vitamin B_x (en antigråhårsfaktor) är identisk med patotensyra.

PP-faktor

(vitamin PP), niacin eller det pellagraförhindrande vitaminet för människa kan formuleras både som nikotinsyra, $C_6H_5O_2N$, och som nikotinsyreamid, $C_6H_6ON_2$. Båda substanserna bilda färglösa kristaller.



nikotinsyra

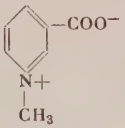


nikotinsyreamid

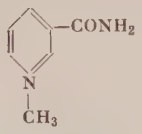
Pyridin-β-sulfonsyreamid (äv. sulfonsyran), som kemiskt sett förhåller sig till niacin som sulfanilamid till p-aminobenzoesyra, har antivitamin-egenskaper.

Nikotinsyra nedbrytes i organismen till *trigonellin*, som är en normalt förekommande ämnesomsättningsprodukt i urinen. Trigonellin har ingen vitamin-verkan. En annan också i urin normalt förekommande nedbrytningsprodukt av nikotinsyra är N′-metylnikotinsyreamid (»trigonellamid»). Det är en fluorescerande sub-

stans, som tidigare kallats F_2 och som i vattenlösning förekommer som katjon.



trigonellin

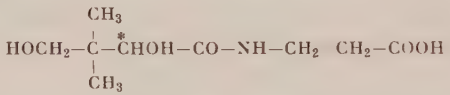


»trigonellamid»

Nikotinsyreamid ingår som beståndsdel i co-dehydras I (cozymas; se nedan) och co-dehydras II, prostetiska grupper till två viktiga biokatalysatorer i den biologiska oxidationens tjänst.

Pantotensyra

eller filtratfaktorn (en förkortad form, »pantoten», har föreslagits), $C_9H_{17}O_5N$, är ett β-alaninderivat. Detta antihönspellagravitamin eller antigråhårsvitamin är identiskt med den för tillväxten av jästsvampen Saccharomyces cerevisiae nödvändiga faktorn *bios II a*.



pantotensyra

Pantotensyra föreligger i organismen i två former, dels fri, dels bunden till äggvita. Den sistnämnda formen, som är beständig mot alkali, kan enzymatiskt överföras i den förra, alkalilabila formen.

Pantotensyra är som synes av formeln optiskt aktiv. Av de båda antipoderna är det endast (+)-pantotensyra, som är biologiskt verksam.

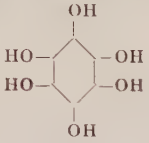
En antivitamer till pantotensyra ha vi i sulfopantotensyra, som är pantotensyrans motsvarande sulfonsyra; den kallas också pantoyltaurin eller tiopanat. Detta »pantoten»-derivat hämmar utvecklingen av bakterier, för vilkas tillväxt pantotensyra är nödvändig. Även för sulfopantotensyra är det den högervridande formen, som är aktiv, alltså:

vitamin		antivitamin	
(+)-pantotensyra	... tillväxtbefordrande	(+)-sulfopantotensyra	... hämmande
(—)- »	... overksam	(—)- »	... overksam

Meso-inosit

$C_6H_{12}O_6$, är optiskt inaktiv hexaoxi-cyklohexan. Det utgör en av jästens »bios»-faktorer (bios I), och dess avitaminossymptom hos råtta är håravfall (alopeci). — Inosit ingår bl. a. i en nyligen iso-

lerad fosfatid, *liposit*, som förekommer i hjärna och sojabönor. Denna synes till skillnad från kefalin innehålla inosit i st. f. glycerin.



inosit

Cholin

$C_5H_{15}O_2N$, förhindrar leverförfettning och är ett derivat av aminoetanol (colamin):

$$[(CH_3)_3N-CH_2-CH_2OH]OH$$

p-Aminobenzoesyra

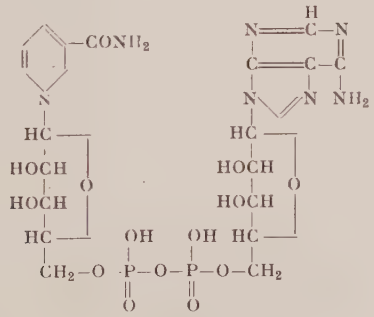
(förkortat PAB), $C_7H_7O_2N$, har på grund av sin vitaminkaraktär kallats vitamin H'. Det är en mycket enkelt byggd substans, som är nödvändig för vissa bakteriers tillväxt. Syran är det mest

p-aminobenzoesyra

aktiva av alla vitaminer; en utspädning av $1:10^{11}$ är tillräcklig för optimal bakterietillväxt. Antivitamerer till detta vitamin utgör hela den viktiga grupp av kemoterapeutika, som allmänt kallas för sulfonamider.

Co-zymas

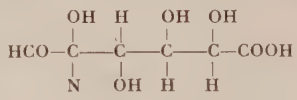
eller co-dehydras I är enl. von Euler en specifik tillväxtfaktor för råtta. Det är en difosfo-pyridin-nukleotid med vidstående konstitution. Co-dehydras II är en trifosfo-pyridin-nukleotid.



co-zymas

Glykuronsyra

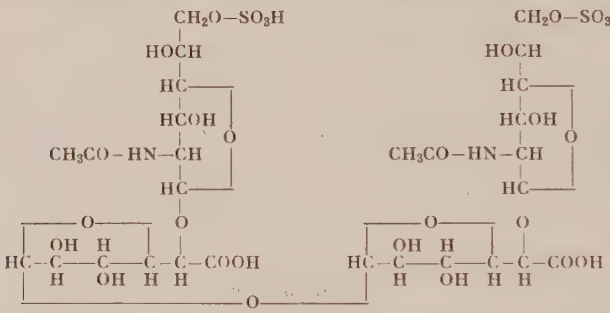
är en oxidationsprodukt av glykos och är liksom



glykuronsyra

Chondroitin

en oumbärlig faktor för fåglars normala utveckling (»anti-gizzard-erosions-factor»). Chondroitin är en glykoproteid, som ingår i



chondroitin-svavelsyra

brosk. Dess prostetiska grupp är chondroitinsvavelsyra, som i ekvivalenta mängder innehåller glykuronsyra, chondrosamin, ättiksyra och svavelsyra.

»Folic acid»

har givit upphov till mycket bryderi i den vetenskapliga litteraturen. »Folic acid», vilket uttryck härstammar från amerikanerna Mitchell, Snell, Williams och Peterson (1941), definierades till en början som en tillväxten stimulerande faktor för vissa mjölksyrebakterier, särskilt Streptococcus lactis R (SLR) och Lactobacillus casei. Den framställdes först från gröna blad (spenat) (folium = blad) och förekommer även i leverextrakt. Folic acid är, som namnet anger, en syra, vilken är fri från svavel och fosfor, innehåller en NH_2-grupp och har en molekylvikt omkring 500. Senare har man isolerat två substanser, en ur lever, som är identisk med vitamin B_c och befordrar tillväxten av endast SLR, samt en ur jäst, kallad »eluat-faktorn» och sannolikt identisk med »vitamin B_c conjugate»; denna faktor stimulerade tillväxten även för Lactobacillus casei. Dessutom har man isolerat en förening,

som har tillväxtbefordrande egenskaper för SLR och som kallats SLR-faktorn. Denna är inaktiv för L. casei, men den kan av SLR överföras i en form, som också är aktiv för L. casei. SLR-faktorn kallas därför också »potential folic acid».

Det tycks alltså finnas flera »folic acids», och det troliga är, att dessa »syror» äro fragment av en stor molekyl eller molekyler, som dessutom äro livsviktiga för kyckling. Till dessa »chick»-faktorer räknar man, som nämnts, också vitaminerna B_{10} och B_{11} samt vitamin B_c. Allt tyder för närvarande på att de från olika håll iakttagna SLR-stimulerande ämnena (folic acid, vitamin B_c) tillsammans med de ämnen, som enzymatiskt kunna överföras i dylika substanser (potential folic acid, vitamin B_c conjugate), samt vitamin M och rått-anti-succinylsulfatiazol-faktorn (se under vitamin M) äro identiska eller mycket nära besläktade med varandra. De båda sistnämnda faktorerna synas nämligen bestå av ämnen, som antingen stimulera SLR eller som enzymatiskt kunna överföras i SLR-stimulerande föreningar. Även vitaminerna B_{10} och B_{11} ha som nämnts folic acid-aktivitet. Intressant är, att det för mer än 50 år sedan upptäckta xantopterin visat sig ha liknande verkan på SLR.

Vitratropin

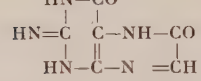
ingår som co-enzym till en enzymatisk, baktericid substans, som normalt förekommer i blod och kallas *canavalin*. Canavalin förhindrar hämolys av röda blodkroppar samt hämmar in vitro tillväxten av vissa bakterier.

Hämogen

»extrinsic factor», är nödvändig för den normala blodbildningen; den förekommer bl. a. i lever, hjärna, muskulatur, jäst etc. Genom inverkan av enzymet *hämogenas* (hämopoietin), den s. k. »intrinsic factor» som förekommer i magsaften och visar stora likheter med aminopolypeptidas, bildas det egentliga blodbildande ämnet, *hämon* (hämamin). Hämogenets kemiska natur är okänd. Vi veta blott, att det icke är något äggviteämne. Brist på detta vitamin eller på hämogenas leder till perniciös anemi, den elakartade blodbristen.

Xantopterin

det gula färgämnet i vingarna av citronfjärilen, Gonepteryx rhamni, är nödvändigt för hämonets funktion. Härtill fordras också tyrosin, dock ej som sådant utan först efter oxidation till ett rött färgämne, hallokrom. Xantopterin förekommer också i urinen (uropterin) och har bruttosammansättningen $C_6H_5O_2N_5$.



xantopterin (uropterin)

Intressant är, att xantopterin har »folic acid»-verkan, alltså stimulerar utvecklingen av Streptococcus lactis R.

(Forts.)

Bokanmälningar.

E. H. Neville, Jacobian Elliptic Functions. University Press, Oxford 1944, Pp 331.

I boken utvecklas teorien för elliptiska funktioner delvis efter nya linjer. Utmärkande för den äro också de nya beteckningarna, som underlätta en systematisk framställning. Som bekant definierades Jacobis elliptiska funktion *sn u* ursprungligen som den inversa funktionen till Legendres integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

I den moderna teorien införas emellertid de elliptiska funktionerna först, varefter de visas vara inversa funktioner till integraler. Därvid definieras de som dubbelperiodiska meromorfa funktioner. De bestämmas av de poler och nollställen, som de ha i periodparallellogrammen. Inversionsproblemet, som kommer i efterhand, blir icke alltid så överskådligt. Det är denna brist, som förf. söker avhjälpa. Den enklaste elliptiska funktionen med två poler i periodparallellogrammen är Weierstrass' $\wp$-funktion, som har en dubbelpol. Den spelar som bekant en viktig roll i teorien för elliptiska funktioner. Förf. ger en liknande betydelse åt vissa elliptiska funktioner av andra ordningen med två enkla poler i periodparallellogrammen. Dessa äro

$$pjz = \sqrt{\wp z - e_p},\ (p = f,\ g,\ h),$$

där ω_f, ω_g, ω_h äro tre halvperioder till Weierstrass' funktion pz och $e_p = \wp\omega_p$ samt pjz ytterligare är fastlagd genom villkoret, att residuum för den i origo är lika med ett. Dessa funktioner och andra elliptiska funktioner, som enkelt erhållas ur dem, uppträda som inversa funktioner till elliptiska integraler av samma typ som

Legendres integral. Förf. lyckas så ställa inversionsproblemet i klarare belysning. Grunderna av teorien för elliptiska funktioner givas i en längre introduktion till boken. För en nybörjare på området torde denna icke vara lättillgänglig.

Harald Bergström.

T. H. Turney, *Heaviside's Operational Calculus Made Easy*, London 1944, Chapman & Hall. Pp 96, 10 s. 6 d.

Bokens fem första kapitel ägnas åt en populariserad presentation av Heaviside's förfaringssätt att beräkna transienta förlopp i lineära elektriska kretsar. Författaren förutsätter högst minimala kunskaper i matematik hos läsaren och uppehåller sig följaktligen synnerligen utförligt vid många rent elementära frågor utan att därvid komma med särskilt värdefulla eller didaktiskt motiverade synpunkter. Inflätade i denna enkla framställning förekomma vissa för tillämpningarna behövliga serieutvecklingar, sedermera ledande till exponentialfunktioner eller aggregat av dylika. Förekommande deduktioner äro genomgående av formell och heuristisk karaktär. Metoden tillämpas först på en krets med motstånd och induktans i serie, sedan på en krets, som därjämte innehåller en kapacitet. I stället för att någorlunda uttömmande behandla dessa kretsar — det viktiga oscillatoriska fallet beröres alltför flyktigt — övergår förf. till det vida svårare problemet rörande elektriska strömförlopp längs homogena ledningar. Den oändligt långa ledningen med endast motstånd och läckning låter sig angripas och diskuteras med av förf. förut givna medel. När det åter gäller en ledning med endast induktans och kapacitet, vållar givetvis införandet av translationsoperatorn en del besvärligheter. Förf. lägger resonemanget så, att det för homogena ledningar gällande systemet av differentialekvationer icke behöver uppskrivas explicite. Härigenom går emellertid symmetrien förlorad, behandlingen blir tämligen artificiell, och den oerfarne läsaren torde ha svårt att förstå, hur metoden skall tillämpas på andra fall. Den distortionsfria kabeln av oändlig längd behandlas, sedan translationsoperatorn införts, i ett särskilt kapitel. Åtskillig uppmärksamhet ägnas det viktiga impulsbegreppet, vilket förf. använder för att med hjälp av en funktion, som han kallar »impulse admittance», och vilken skulle ha betydelsen av derivatan till den av Carson m. fl. använda »indicial admittance»-funktionen, komma fram till formeln för strömförloppet vid godtycklig form på den elektromotoriska kraften. Matematiskt sett hänger naturligtvis denna härledning i luften. Den åsyftade ekvationen kan faktiskt bevisas både elementärt och nöjaktigt med enklare medel.

Bokens två sista kapitel förete mycket lockande titlar, nämligen »The relation between Heaviside's and Fourier's work», resp. »The justification of Heaviside's methods by the use of the exponential». Man möter också många pretentiösa underrubriker, t. ex. »The Laplace transform method of circuit analysis» och »The theory of residues». Med skäl kan man fråga sig, om det överhuvud är lönt att för en matematiskt nästan oskolad läsare dra fram dylika frågor och begrepp av djupt liggande innebörd. De sistnämnda kapitlen förefalla icke heller ha något av värde att skänka en i området mer initierad läsare, då framställningssättet genomgående saknar den logiska fasthet och klarhet, som är en ofrånkomlig förutsättning för varje utredning av föreliggande slag. Förf:s synpunkter äro f. ö., i den mån de äro begripliga, ganska personligt präglade och torde icke kunna allmänt accepteras.

Ett antal tryckfel försvåra för nybörjaren bokens läsning. Huruvida dennas angivna syftemål, att göra Heaviside's operatorkalkyl »lätt», är vunnet, vill anmälaren lämna därhän. Måhända kan den kåserande stilen, som gör texten en smula underhållande och småtrevlig, förleda läsaren till denna föreställning. Utan kommentarer förtjäna förf:s slutord att återgivas: »Heaviside has put really advanced work on electricity within reach of us. If you work at it, you may find, as the author has, that it brings you into the company of gentle and patient men who also like delving into such secrets. That is a great reward.»

K. Dahr.

Lord Rayleigh, *The Life of Sir J. J. Thomson.* Cambridge University Press 1943. Pp. 299.

Förf., Lord Rayleigh j:or, själv en av J. J. Thomsons lärjungar, skildrar här på ett synnerligen medryckande sätt sekelskiftets ledande fysiker i England, hans liv och vetenskapliga verksamhet.

Av mycket stort allmänt intresse äro interiörerna från det sjudande forskningsarbetet vid Cavendishlaboratoriet i Cambridge under Thomsons ledning, särskilt de från tiden 1895—1905, då bl. a. de fundamentala lagarna för elektricitetsledning i gaser utreddes av honom och en rad berömda lärjungar. Läsaren kan här följa, huru idéerna brötos mot varandra och hur man med blygsamma experimentella medel arbetade sig fram från kaos till klarhet. — Intressant är också skildringen av hur Röntgens och Curies upptäckter mottogos i Cambridge och vilka impulser de gåvo arbetet där.

Detta är endast några glimtar ur det rika innehållet. Biografien omspänner Thomsons hela levnad (1856—1940) och är ett historiskt dokument av stort värde.

C. E. Blom.

T. W. Bennington, *Radio Waves and the Ionosphere.* Iliffe & Sons Ltd, London 1943, 81 sid., 6 s.

För radiokommunikationer på mycket långa distanser användas numera nästan uteslutande korta vågor (10—100 m). Mellanvågsområdet är inte användbart. Långa vågor (över 3000 m) kunna visserligen användas men fordra dyrbara sändareanläggningar. Att korta vågor äro särskilt gynnsamma för långdistanskommunikation sammanhänger med de fysikaliska egenskaperna hos de elektriskt ledande skikt i jordens atmosfär, som tillsammans bilda den s. k. jonosfären, vilken sträcker sig från ca 50 upp till ca 500 km höjd över jordytan.

Jonosfärens fysik har under senare år varit föremål för intensivt forskningsarbete, varvid även från svensk sida betydande insatser gjorts. Facklitteraturen på området är i allmänhet svårläst för icke-specialister, varför en populär framställning av jonosfärforskningens viktigaste resultat bör ha en uppgift att fylla.

Den ovannämnda lilla boken innehåller ingen matematik och förutsätter inga kunskaper i fysik utöver gymnasiets kurs men ger likväl läsaren en klar uppfattning om de processer, som utspelas i atmosfärens ledande skikt och dessas betydelse för kommunikationsmöjligheterna. Av särskilt intresse är författarens redogörelse för hur man på grundval av jonosfärmätningar under ett tillräckligt antal år, omfattande såväl de normala förhållandena i jonosfären som de periodiska förändringar som uppträda, kan uppställa radioprognoser, dvs. förutsäga vilka frekvenser som äro möjliga, om man vill uppnå förbindelse med en viss punkt på ett visst klockslag och ett visst datum. Dylika prognoser äro av stor betydelse, bl. a. för krigföringen. Det är ju av vikt att när som helst kunna komma i förbindelse med t. ex. örlogsfartyg, som operera på stort avstånd från basen.

Torsten Jönsson.

Carl-Erik Quensel, *Lärobok i den teoretiska statistikens grunder.* Lund 1944, 149 sid.; kr 10: —.

Det är inte många årtionden sedan de matematiska verktyg, som begagnades av statistikerna, ännu huvudsakligen utgjordes av de fyra enkla räknesätten och bland dem först och främst addition. Numera ligga i stor utsträckning begreppsbildningar ur den högre matematiska analysen bakom de statistiska bearbetningsmetoderna.

Det har på senaste tid uppstått behov av en modern, elementär lärobok på svenska språket i teoretisk statistik. Tidigare utkomna läroböcker (av Charlier och Wicksell) äro nämligen föråldrade

och f. ö. sedan lång tid utgångna ur bokhandeln. Professor Quensels lärobok, som söker fylla nämnda behov, lämpar sig väl för nybörjaren i statistik. På ett konkret och lättfattligt sätt införes läsaren i statistikens begreppsvärld och får lära sig hur tabeller och kurvor göras upp, medelvärden uträknas och frekvensfunktioner uppställas.

Särskilda avsnitt äro ägnade sådana statistikens huvudstycken som korrelation, stickprovsteori, minsta-kvadrat-metoden och variansanalys. Många stötestenar som lätt kunna komma i nybörjarens väg undanröjas genom påpekanden en passant i framställningen. Lättillgängligheten har emellertid i viss mån vunnits på bekostnad av den matematiska exaktheten. Därför lämpar sig boken ej så väl som uppslagsbok i någon bestämd fråga, utan är i stället en första introduktion i ämnet. Som exempel på formuleringar och uttryck, vilka, fattade efter ordalagen, icke äro fullt riktiga, må nämnas sid. 23, rad 3—6 nedifrån; sid. 39, rad 21—22; sid. 40, rad 10—11; sid. 64, rad 6—8 nedifrån; sid. 85, rad 4—5 samt 7—8; sid. 96, rad 20—21; sid. 128, rad 6 nedifrån.

Avsnittet om korrelation mellan tre eller flera variabler är ett exempel på ämnen, där den i läroböcker gängse matematiska behandlingen är ganska invecklad, men där förf. visar sig ha ett gott grepp på frågan.

S. G. Lindblom.

Hj. Berg och N. Smith, *Lärokurs i teknisk ritning*, Svenska Bokförlaget, Stockholm 1945, 60 s., kr 1: 80.

Det har sagts att linearritningen hittills varit verklighetsfrämmande och föråldrad. De som nu sträva att råda bot för detta ha valt att först och främst döpa om ämnet och kalla det teknisk ritning, därmed tydligt deklarerande sin anslutning till det rent ingenjörs- och konstruktörsmässiga i motsättning till tidigare undervisning, som det påstås, bestående enbart i geometriska konstruktioner utan praktisk tillämpning. I den nyligen för folkskolan utgivna »Lärokurs i teknisk ritning» av f. d. undervisningsrådet Hjalmar Berg och ingenjör Nils Smith, är denna nya princip tydligt tillämpad. Ingenjör Smith, som är speciallärare i ritteknik vid Tekniska högskolan, och säkerligen vår förnämsta auktoritet på allt som rör ritningars så att säga yttre utseende, har givetvis sett till, att alla tekniska anvisningar äro fullt korrekta, vilket inte kan sägas om tidigare arbeten på området. De i boken ingående textningsföreskrifterna följa glädjande nog den stil, som Bror Zachrisson nyligen publicerat såsom »ingenjörsstil» och som av den speciellt tillsatta sakkunnigekommittén föreslås som svensk standard.

Författarna framhålla värdet av självverksamhet, och i en del uppgifter tvingas också eleverna därtill, men tillfälle till tanklös avbildning finnes alltjämt.

Av de s. k. plana geometriska konstruktionerna är det endast några få uppgifter kvar från tidigare lärokurser. Men de nära nog onyttiga figurerna korgbågen och spiralen finnas med. Det är liksidiga triangeln, 8-hörningen, 6-hörningen och 8-hörningen nummer två, som utgör hela det geometriska underlaget för den därefter följande projektionsläran. Det måste anses som en brist att icke normaler, parallella linjer, tangenter, kordor m. m. behandlats, helst som dessa ofta ingå som grundelement i projektionsuppgifterna. Tendensen slår över.

Projektionsläran är redigt och bra förklarad, särskilt den senare av de båda angivna betraktelsesätten. Ritningarna till träarbetena äro väl avpassade i svårighetsgrad. De kunde gott ha varit flera och sålunda ersatt de svårare ritningarna till metallarbeten, där alltför speciella konstruktörskunskaper förutsättas. Allt enligt förordets tyngande på ämnets betydelse som bildningsmedel.

En stor del av bilderna äro s. k. parallellperspektiv. Fig. 41 och 43 äro emellertid utförda som riktiga perspektiv och illustrera utmärkt sitt företräde genom större åskådlighet. Varför äro inte alla perspektivbilder lika bra som 41 och 43? Och varför inte följa gammal praxis (standard) att beteckna punkter med stora bokstäver och sträckor med små?

G. Nordlander.

Anders Østergaard, *Kemi. Øvelser og Opgaver for Gymnasiet.* Det Schønbergske Forlag, København 1945, 87 s.

Här framläggas 390 kemiska uppgifter att i korthet utredas och besvaras. Omkring en tredjedel äro räkneexempel eller formelskrivningar i anslutning till experimenten. De övriga äro vanligen provrörsförsök, som snabbt kunna utföras, men även kvantitativa experiment av enkel art samt fysikalisk-kemiska undersökningar förekomma. Resultaten meddelas ej, utan eleven får i anslutning till experimenten en bestämd fråga att besvara eller en slutsats att draga, varigenom han tvingas till noggrann iakttagelse och logisk tankeverksamhet. Många av försöken lämpa sig även för realskolans laborationer. Deras i regel enkla natur medför den fördelen, att eleven kan utföra dem även utan lärarens övervakande, varigenom laborationsavdelningens deltagare kunna arbeta självständigt och oberoende av varandra.

Även en erfaren kemilärare torde bland den välskrivna bokens rikhaltiga innehåll finna en del nytt, som kan locka till närmare

studium. Den rekommenderas till inköp för kemiska institutionens bibliotek vid både realskolor och gymnasier.

E. Nordefeldt.

Filmband för fysikundervisningen, Gumperts Bokhandel, Göteborg.

Filmbanden belysa centrala delar av fysiken, tämligen jämnt fördelade över olika områden. Bland bilderna finnas dels schematiska ritningar, som tydligt visa det väsentliga i konstruktioner och verkningssätt, dels fotografier av moderna instrument och maskiner.

Bildserierna, som utarbetats av läroverksadjunkt Yngve Källén, äro i första hand avsedda för läroverken, där de kunna användas såväl i realskola som gymnasium, men särskilt de två eltekniska serierna torde också lämpa sig för tekniska gymnasier.

Filmbanden med *värmemotorer* och *hydrostatiska tillämpningar* måste bli mycket populära bland eleverna. Utvecklingen från pionjärernas skapelser till den moderna teknikens underverk visas åskådligt. Utmärkt är serien med *elektriska mätinstrument*, bland dem slingoscillografen. Framställningen är mera fullständig än de gängse läroböckernas. Bilder, som ligga utom kursen, följas av en klar och lättfattlig text. Den längsta serien, *generatorer och motorer*, åskådliggör först uppkomsten av e. m. k. i en slinga, som roterar i ett magnetfält. Variationen illustreras dels grafiskt, dels (för realskolan) med bilder av utslaget på ett mätinstrument, som tänkes vara tillräckligt snabbt. Bland övriga bilder märkes ett trumankare med ett par härvor inlagda. Serien slutar med några användningar av elmotorer. Imponerande är den lilla motorn, som driver den väldiga tryckpressen.

I den sista serien, *de optiska instrumenten*, lägger man kanske särskilt märke till kameran med teleobjektiv och den trevliga bild, som visar baksidan av spegeln till ett större teleskop. Vad spektralapparaterna beträffar, noteras med tillfredsställelse, dels att benämningarna äro korrekta, dels att strålknippena slippa ut ur okularen. Denna serie är fylligare än namnet anger, då icke blott de optiska instrumenten utan även människoögat tagits med.

Man behöver icke granska bildserierna länge för att se, att de sammanställts för att komplettera experimenten, icke för att ersätta dem. Då serierna helt ha präglats av sin upphovsmans noggrannhet och pedagogiska skicklighet, utgöra de ett värdefullt nytt hjälpmedel för fysikundervisningen och därtill ett hjälpmedel, som icke kräver ökat arbete av fysikläraren.

Sten Friberg.

Filmband för kemiundervisningen, Gumperts Bokhandel, Göteborg.

Insikten om betydelsen av ett gott bildmaterial har lett till att dylikt material i riklig mängd ställts till pedagogernas förfogande inom snart sagt alla ämnesområden. Kemien har dock länge varit missgynnad i detta avseende och fått i stort sett nöja sig med reaktionsformlerna som åskadningsmaterial. På sina håll har man dock på senare tid börjat utrusta den kemiska lärosalen med episkopprojektor, varigenom man fått möjlighet att åskådliggöra den tekniska utformningen av apparaturen vid kemiskt viktiga industriella processer. Det är emellertid ofta svårt att skaffa lämplig litteratur med modernt bildmaterial, och ofta får man ett ganska klent utbyte av fotografiska reproduktioner.

Gumperts bokhandel i Göteborg har emellertid börjat utgiva förträffliga småbildserier i många olika ämnen och glädjande nog vågat slå ett slag även för kemiens vidkommande. Sålunda har läroverksadjunkt John Lundberg utarbetat 5 serier filmband i format 24 × 36. Den första serien behandlar koksalt, klor, saltsyra, svavel och svavelsyra, en annan kväve och kväveföreningar; vidare träkol, lysgas och koks, alkalimetaller, kalcium och deras föreningar samt aluminium, lera och cement. Flera äro under utarbetande och beröra även den organiska kemien. Varje serie omfattar ungefär 30—40 bilder och priset varierar mellan 8: 40—12: — kr pr serie, vilket får sägas vara synnerligen billigt.

Den lämpligaste projektorn för dessa filmband är en Aviso II. Den är mycket ljusstark och kostar 376 kr. Beklagligt nog kunna filmbanden ej användas i vanliga skioptikonapparater eller episkop, varför de institutioner, som redan skaffat dylik utrustning, antagligen ej kunna reflektera på en nyanskaffning.

Principen vid utarbetandet av bilderna har varit den att först med tillhjälp av en schematisk teckning med figurförklaring i bilden ge en idé om händelseförloppet vid de tekniska processer, som skola demonstreras. Först därefter visas fotografi av apparaten i fråga, varigenom man får klarlagt, hur den i verkligheten ser ut. Med enbart fotografi skulle demonstrationen bli mycket besvärlig. I vissa fall, t. ex. vid rening av chilesalpeter, är det icke möjligt att belysa processen annat än med fotografi, och i dylika fall skulle lämpligen detaljuppgifter lämnats i ett texthäfte såsom brukligt är.

Bilderna äro fullt moderna och i vissa fall ännu ej publicerade. De ha hopbragts ofta genom direkt hänvändelse till industrien, vars representanter ställt sig mycket välvilliga och lämnat god hjälp. Bildserierna kunna livligt rekommenderas.

Georg Böös.

Gradualavhandlingar.[1]

GÖRAN BORG, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte.* (Acta mathematica, Bd 78.) Uppsala 1945, 96 s. Disp. i Uppsala 19 maj 1945. Opponenter: prof. ARNE BEURLING och fil. lic. BO KJELLBERG.

I den moderna atomfysiken spelar Schrödingers differentialekvation och dess spektra vid olika typer av randvillkor en betydande roll. Dessa spektra svara mot fysikaliska storheter, som ofta äro tillgängliga för mätning, under det att de inre egenskaperna hos det svängande systemet, vilka svara mot ekvationens koefficienter, äro obekanta. Detta leder till följande matematiska problem: I vilken mån bestämma kända spektra vid kända randvillkor tillhörande differentialekvation?

I föreliggande avhandling undersöks ett speciellt problem av denna typ. Differentialekvationen förutsättes vara endimensionell: $y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0$, och randvillkoren förutsättas vara av Sturms och Liouvilles typ: $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$; $\gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0$ med $|\alpha| + |\beta| > 0$, $|\gamma| + |\delta| > 0$ (valet av det speciella grundintervallet $(0, \pi)$ innebär självfallet ingen inskränkning). Det allmänna problemet preciseras i följande tre huvudproblem: att undersöka om och när kända spektra *entydigt* bestämma funktionen $\varphi(x)$, att i fall av entydighet *konstruera* den mot spektra svarande funktionen $\varphi(x)$ samt att söka villkoren för att en given talföljd skall vara spektrum till någon differentialekvation av ovannämnt slag vid givna sturm-liouvilleska randvillkor. Denna problemställning är tydligen en omvändning av Sturms och Liouvilles klassiska.

Funktionen $\varphi(x)$ kan i intervallet $(0, \pi)$ antagas definierad genom fourierkoefficientföljden $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\cos nx\,dx\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Genom asymptotiska uppskattningar av egenvärdena till ovan angivna sturm-liouvilleska egenvärdeproblem visas i avhandlingens första kapitel, att det råder en påfallande analogi mellan egenvärdeproblemets spektrum och »hälften» av φ:s fourierkoefficientföljd, dvs. antingen följden $\{a_{2\nu}\}$ eller följden $\{a_{2\nu+1}\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Det förra inträffar, när i randvillkoren antingen $\beta \neq 0$ och $\delta \neq 0$ eller $\beta = \delta = 0$ (randvillkor av typ I), det senare när $\beta \neq 0$ och $\delta = 0$ eller $\beta = 0$ och $\delta \neq 0$ (randvillkor av typ II).

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Denna analogi avspeglar den väsentliga karaktären hos huvudproblemens lösningar, vilka framställas i tredje kapitlet. Om i det fall, då i randvillkoren både $\beta \neq 0$ och $\delta \neq 0$, det minsta egenvärdet ej inräknas i egenvärdeproblemets spektrum, gäller med avseende på entydighetsproblemet:

Spektrum till *ett* egenvärdeproblem kan ej entydigt bestämma $\varphi(x)$. Om däremot spektra till *två* egenvärdeproblem vid samma differentialekvation äro kända, och därvid i ena fallet randvillkoren äro av typ I, i andra fallet lämpligt valda av typ II, blir $\varphi(x)$ entydigt bestämd. Slutligen, dessa spektra äro i sin helhet nödvändiga för entydig bestämning, emedan funktionen $\varphi(x)$ förblir obestämd, om ett enda av egenvärdena i spektra är obekant.

De båda systemen av randvillkor stå i en enkel relation till varandra. T. ex. är paret $y(0) = y(\pi) = 0$ och $y(0) = y'(\pi) = 0$ av det för entydighet önskade slaget, likaså $y'(0) = y'(\pi) = 0$ och $y(0) = y'(\pi) = 0$. I dessa båda fall kan även det till de senare randvillkoren, $y(0) = y'(\pi) = 0$, hörande spektrum utbytas mot villkoret $a_{2\nu+1} = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) dvs. $\varphi(x) \equiv \varphi(\pi - x)$.

Ett väsentligt resultat med avseende på de båda sista huvudproblemen är, att varje talföljd, som befinner sig i en viss närhet av spektra till två egenvärdeproblem av det slag, som nämnts i samband med entydighetsproblemet, själv bildar spektra till två egenvärdeproblem med samma randvillkor som de förra. Beviset härför innehåller en metod till konstruktion av funktionen $\varphi(x)$ i den till dessa egenvärdeproblem hörande gemensamma differentialekvationen. I övrigt vila bevisen på fullständighetsegenskaperna hos vissa funktionssystem, vilka undersökas i avhandlingens andra kapitel.

Av direkta fysikaliska tillämpningar omnämnas i avhandlingen problemen att bestämma en svängande sträng genom dess grundton och övertoner och att bestämma ett kristallgitter genom elektronstrålereflexioner. Avhandlingens fjärde och sista kapitel är speciellt ägnat åt tillämpningar.

Sigurd Säverborn, *A Contribution to the Knowledge of the Acid Polyuronides*. Uppsala 1945, 112 s. Disp. vid Uppsala universitet den 9 maj 1945. Opponenter: docent S. Arrhenius och fil. kand. Per-Olof Kinell.

Polyuronider äro komplexa polysackarider, som innehålla uronsyreenheter, länkade sammanglykosidiskt sinsemellan och med enkla sockerarter såsom arabinos och galaktos. Avhandlingen behandlar tre typer av dylika polyuronider, nämligen pektinsubstan-

ser, alginsyra och gummi arabicum. Stommen i pektinmolekylen utgöres av en med metylgrupper delvis förestrad polygalakturonsyra, alginsyran är uppbyggd av nästan enbart mannuronsyreenheter, och gummi arabicum innehåller jämte arabinos, galaktos och rhamnos glykuronsyreenheter som byggelement.

De undersökta pektinsubstanserna ha utvunnits ur äpplen, citroner, vinbär, betor, morötter och lin, alginsyran ur brunalgen Laminaria digitata, och gummi arabicum av god kvalitet har erhållits i handeln.

Inledningsvis redogöres för preparationsförfarandet, för preparatens halt av uronsyra och metoxylgrupper, för syrornas ekvivalentvikter, för den optiska vridningsförmågan m. fl. data av värde för karakteriseringen av dessa svårdefinierbara substanser.

Härefter följer ett kapitel om polyuronidlösningarnas viskositet. Särskilt studeras förloppet av kurvan $\eta_{sp}/c = f(c)$ (c = konc., $\eta_{sp} = \eta_r - 1$, där η_r är relativa viskositeten). Det visar sig, att η_{sp}/c för lösningar i rent vatten passerar ett minimum och starkt växer vid mycket låga koncentrationer. Detta är en följd av substansernas elektrolytegenskaper. Genom tillsats av ett salt, t. ex. NaCl, elimineras laddningseffekterna och η_{sp}/c för $c = 0$ kan lätt bestämmas. Detta värde är av intresse vid diskussionen av möjligheten att bestämma substansens molekylvikt enligt Staudingers bekanta formel $M = K_m \cdot \eta_{sp}/c$.

Pektinsubstansernas gelbildande förmåga belyses och diskuteras i följande kapitel. Här beskrives bl. a. också en av förf. konstruerad apparat för mätning av pektingelernas fasthet.

Polyuroniderna äro kolloidala elektrolyter. Avhandlingens följande kapitel är ägnat åt deras elektrokemiska egenskaper. Syrornas och Na-salternas ledningsförmåga och anionernas elektroforetiska rörlighet illustreras i ett flertal tabeller och kurvor, och anomalier vid jämförelse med lågmolekylära elektrolyter diskuteras. Vid potentiometrisk titrering förhålla sig polyuroniderna som enbasiska syror, trots närvaron av upp till 250 karboxyler per molekyl. Den skenbara dissociationskonstant som kan beräknas ur ekvivalentkoncentration och väteionkoncentration är emellertid ingen verklig konstant. För äppelpektin, citruspektin och gummi arabicum i 1 %-iga lösningar är den av storleksordningen $5 \cdot 10^{-4}$; med avtagande koncentration avtar den emellertid starkt. Samma förhållande har av andra forskare iakttagits beträffande t. ex. kolloidal kiselsyra.

Återstoden av avhandlingen är ägnad åt studiet av polyuronidernas beteende vid ultracentrifugering och diffusion. Sedimentationen i rent vatten hämmas mycket starkt av substansernas laddningar,

diffusionen åter sker med abnormt stor hastighet. Dessa laddningseffekter äro förknippade med uppkomsten av en potentialdifferens i lösningen till följd av kationens och anionens olika rörlighet. De erhållna försöksdata diskuteras i anslutning till av Tiselius resp. Hartley och Robinson härledda ekvationer för kolloidelektrolyters sedimentation och diffusion.

I saltlösningar, t. ex. 0,2 m NaCl, elimineras laddningseffekterna praktiskt taget fullständigt, och härigenom möjliggöras bestämningar av sedimentations- och diffusionskonstanter för beräkning av molekylvikten enligt den svedbergska molekylviktsformeln.

De med gängse metoder — kokning av växtmaterialet i svagt sur lösning en halvtimme — framställda pektinerna ha genomsnittsmolekylvikter av storleksordningen 50 000—100 000. S. k. fria pektiner, vilka erhållits t. ex. genom urlakning av citronalbedo i ljumt vatten eller utvunnits ur saften av mogna äpplen kunna däremot ha omkring 4 ggr så höga molekylvikter. Alginsyrans molekylvikt är av samma storleksordning som de extraherade pektinernas, gummi arabicums är av storleken 250 000—300 000.

Genom kombination av sedimentations- och diffusionsdata med teoretiskt beräknade data för ellipsoidformade molekylers rörelse i en vätska kan ett värde på kvoten l/d, där l är molekylens längd och d dess tjocklek, beräknas. Kännedomen om molekylvikten och substansens täthet gör det vidare möjligt att beräkna även absolutvärdena på l och d. Dylika beräkningar visa, att pektinsubstansernas och alginsyrans molekyler äro s. k. trådmolekyler med en längd av omkring 1 000—1 500 Å och en bredd av omkring 10 Å. Gummi arabicum åter har molekyler av längden 700 Å och bredden 30 Å. Riktigheten av dessa dimensioners storleksordning bekräftas av de värden på l som docenten Snellman kommit till genom sina mätningar av samma substansers strömningsdubbelbrytning.

Molekylviktsbestämningar ha gjorts också medelst s. k. sedimentationsjämvikt. De värden som härvid erhållits för pektiner och alginsyra stämma väl med dem som bestämts ur sedimentationshastighet och diffusion. För gummi arabicum däremot uppträda vissa svårförklarliga diskrepanser.

Polyuroniderna äro polydispersa substanser, d. v. s. bestå av molekyler av olika storlek. Graden av polydispersitet har beräknats ur molekylviktsfördelningen vid sedimentationsjämvikt.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1405) *Kurvan* $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ *förutsättes ha två reella inflexionspunkter. Då kan man på* ∞^1 *sätt utvälja tre punkter A, B, C på kurvan, i vilka tangenterna äro parallella. Visa, att triangeln ABC:s tyngdpunkt är fix. Bestäm maximivärdet av dess yta.* *X.*

1406) *Visa, att* $2(x + y + z)^3 - 54xyz = \Sigma\,(x + y + az)\,(x - y)^2$ *för lämpligt siffervärde på a och cyklisk permutation av summans typterm.* *Gösta Danielsson.*

1407) *Till parabeln* $y = x^2$ *ritas krökningscirkeln i punkten A. Denna cirkel skär parabeln på nytt i punkten B. Sök enveloppen för AB.* *C. E. Fröberg.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1408) Bestäm den ekvation, vars rötter äro summan av de inverterade värdena av rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$, tagna två och två.

Svar: $q^2x^3 + 2pqx^2 + p^2x - q = 0$.

1409) Beräkna triangeln ABC:s vinklar, om $h_a : h_b : h_c = \sin 2B : \operatorname{tg} C : \sin(B + C)$.

Svar: $A = 90°$, $B = 30°$ och $C = 60°$.

1410) I en viss likbent triangel halverar bissektrisernas skärningspunkt avståndet mellan medianernas skärningspunkt och basen. Sök triangelns vinklar.

Svar: $78{,}47°$, $78{,}47°$ och $23{,}06°$.

1411) I triangeln ABC är $A = 90°$. P är en punkt på AB; $R_{PBC} : R_{PAC} = 13 : 5$ och $r_{PBC} : r_{PAC} = 6 : 5$. Bestäm punkten P:s läge.

Svar: $AP : PB = 5 : 11$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1408—1415 äro insända av *L. Sandgren*, 1416—1419 av *B. Svenonius*.

1412) I triangeln ABC drages medianen AM. Medianen BN i triangeln MBA skär utdragen AC i P. Bestäm förhållandet $AP : PC$.

Svar: 1 : 2.

1413) Genom ett hörn i en reguljär tetraeder lägges ett plan, som tangerar den inskrivna sfären och som är parallellt med en kant i tetraedern. Beräkna förhållandet mellan de delar vari tetraedern delas av planet.

Svar: 1 : 8.

1414) Ett tangentplan till den inskrivna sfären i en reguljär tetraeder lägges parallellt med två men ej med tre kanter. I vilket förhållande delas tetraedern av planet?

Svar: $\frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} = 0{,}13.$

1415) I en reguljär tetraeder kan en kub inskrivas, så att två av kubens hörn faller på varje sidoyta i tetraedern. Om tetraederns kant $= a$, hur lång är kubens?

Svar: $\frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = 0{,}29a.$

1416) I en regelbunden pyramid är bottenytan en reguljär n-hörning med sidan a, och sidokanten har längden $n \cdot a$. Mot vilket gränsvärde tenderar förhållandet mellan summan av alla sidoytorna och bottenytan för växande n?

Svar: 2π.

1417) En rotationskon skäres av ett plan parallellt med ett tangentplan. I snittet inskrives en likbent triangel, som till bas har kordan i konens bottenyta. Hur skall kordan dragas, för att den likbenta triangeln skall få så stor yta som möjligt?

Svar: Avståndet till medelpunkten = halva radien.

1418) Given är en rät kon, i vilken vinkeln mellan generatris och basyta är 30°. I konen inskrives en oändlig följd av stympade koner, den understa stående med sin största basyta på konens basyta och de övriga i följd ovanpå varandra. I de stympade konerna är vinkeln mellan generatris och basyta 60°, och höjden = radien i den minsta av dess basytor. Sök summan av alla de stympade konernas mantelytor med den stora konens mantelyta som enhet.

Svar: $\frac{3\sqrt{3}-4}{3}$.

1419) Vid segling från A till B vid rak motvind kryssade en segelbåt, d. v. s. den styrde först mot en punkt C och därefter från

C mot B. Därvid var $AC = CB$. Sök vinkeln mellan AC och AB, om för de vinklar det här är fråga om båtens hastighet kan antagas vara proportionell mot sinus för denna vinkel och tiden för färden från A till B skall vara ett minimum.

Svar: 45°.

Lösn. till uppg. 1376—1378.

1376) *Visa, att i varje triangel är* $27Rr \leqq 2p^2$.

Gösta Danielsson.

Med vanliga triangelformler kan olikheten skrivas $27abc \leqq 8p^3$ och är alltså en tillämpning av satsen om de aritmetiska och geometriska medelvärdena: $\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ (citerad och nybevisad av B. Aurell i Elementa, årg. 28 (1945), s. 15). Se även Elementa, årg. 3, s. 122.

Löst av *Hg., B. Svenonius, E. Smn., R. Ingre, O. Dahlgren, N. G. Sjöstrand.*

1377) *Om fyra av sidorna i en femhörning äro parallella med var sin av diagonalerna, äro den återstående sidan och den återstående diagonalen parallella. Visa detta och konstruera en sådan femhörning, då tre hörn äro givna.* *X.*

Om två sidor falla utefter axlarna i ett snedvinkligt koordinatsystem och hörnens koordinater i ordning äro $(0; b)$, $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(a + d; b)$, så blir det femte hörnets koordinater $\left(a; \frac{ab}{d}\right)$. För att den fjärde diagonalen skall vara parallell med sin sida måste $\left(\frac{ab}{d} - b\right) : a = b : (a + d)$ d. v. s. $a^2 - d^2 = ad$. I så fall är också den femte diagonalens vinkelkoefficient $-\frac{b}{a}$ - den femte sidans vinkelkoefficient, som är $\left(b - \frac{ab}{d}\right) : d$. Vare sig a eller $a + d$ äro givna (de två möjligheterna, då tre hörn äro givna), sker konstruktionen av den önskade femhörningen med hjälp av relationen $a^2 - d^2 = ad$ och gyllene snittet. *Hg.*

Även löst av *B. Svenonius, J. A. Sandelin.*

Anm. De fem hörnen kunna uppfattas som parallellprojektioner av fem ekvidistanta punkter på samma cirkel; dessa kunna förenas på två sätt så, att regelbundna femhörningar uppstå (»en konvex och en stjärnfemhörning»). Tre på måfå valda hörn äro alltid konsekutiva i den ena av dessa. *X.*

1378) *I triangeln ABC är avståndet mellan höjdernas skärningspunkt och den omskrivna cirkelns medelpunkt = d. Visa, att* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 9R^2$. *R. Ingre.*

Medianen från C skär AB i M och den omskrivna cirkeln i P. Enligt kordsatsen och satsen om Eulers linje erhålles $\left(R + \frac{d}{3}\right)\left(R - \frac{d}{3}\right) = \frac{2m_c}{3}\left(\frac{m_c}{3} + x\right)$, där $MP = x$. Förenkling ger $9R^2 = d^2 + 2m_c^2 + 6m_c x$. Då $xm_c = \frac{c^2}{4}$ och $2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$, fås alltså $9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

R. Ingre.

Även löst av *Hg., E. Smn., B. Svenonius, Gösta Danielsson, N. G. Sjöstrand, J. A. Sandelin.*

Anm. Lösningen erhålles direkt ur ekv. (1) i Elementa, årg. *6*, s. 203.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1945: 5—6.

Ur innehållet: K.-J. Karrman, Retene Investigations III; G. Runeberg, Bestämning av kali i närvaro av svavelsyra; K. Myrbäck, Über eine oxydierte Form der Co-Carboxylase; H. Lieck et H. Willstaedt, Sur le dosage fluorométrique de la vitamine E; I. Jullander, A simple Consistometer for Measurements at Low Shearing Stresses; O. Samuelson, Om användningen av jonbrytande ämnen i den analytiska kemien IX. — Utvecklingslinjer för Finlands kemiska industri.

IVA, 1945: 1—3.

Ur innehållet: Ingeniörsvetenskapsakademien 1919—1944; Behandling av stålkonstruktioner före målning med rostskyddsfärg; Användning av katodstråleoscillograf vid fotografering av avkylningskurvor för härdningsoljor; Glycerin ur tall, gran och töre; Experimental studies of shock waves from detonating explosives; Åsk- och överspänningsforskning; Åskvädrens geografiska fördelning i Sverige; Synoptisk-aerologisk studie över åskvädren under sommaren 1944; Om sambandet mellan solaktivitet och åskfrekvens.

ERA, 1945: 1—7.

Ur innehållet: Elektriskt i England; Elektrisk bostadsuppvärmning; Nyare svenska storkraftverk; Eldrift i lokaler med särskilt stor explosionsrisk; Belysningsglas; Kraftförsörjning och driftsäkerhet; Elnyheter.

Ljuskultur, 1945: 1—2.

Ur innehållet: Ultravioletta strålar i den naturliga och den artificiella belysningen; En utrustning för mätning av ultraviolett strålning; Kvantitativ behandling av Purkinje-fenomenet; Belysningsteknikens ställning, uppgift och plats i undervisning och forskning; Något om fluorescensanalys.

(Forts. å sid. 192.)

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti — september 1945.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en geometrisk serie med reella termer är produkten av de tre första termerna 27 och det inverterade värdet av fjärde termen $\frac{3}{10}$ av summan av de inverterade värdena av tredje och femte termerna. Bestäm seriens första term och kvot.
2. I en rätvinklig triangel är den inskrivna cirkelns radie $\frac{1}{6}$ av den ena kateten. Beräkna triangelns spetsiga vinklar.
3. Lös ekvationen

$$\frac{4}{x \cdot 1} + \frac{1}{x - a^2} = \frac{5}{x - a},$$

där a är en konstant. Svaret skall lämnas i bråkform och förkortas, så långt ske kan.

4. I Sandöbron över Ångermanälven ingår ett spann mellan Lunde och Killingholmen. Det har tillnärmelsevis formen av en vertikal cirkelbåge. Dess högsta punkt ligger 40 m högre än dess ändpunkter, mellan vilka avståndet är 236 m. Hur lång är den av spannet bildade bågen?
5. I en triangel är en vinkel 60°. Bissektrisen till denna vinkel delar den motstående sidan i förhållandet 3 : 4. Sök triangelns övriga vinklar.
6. I en romb, vars spetsiga vinklar äro 45°, är en cirkel inskriven, och tangeringspunkterna utgöra i sin tur hörn i en fyrsiding. Beräkna förhållandet mellan dennas och rombens yta.
7. Bestäm konstanten a så, att kurvan $y = x^2 - ax - x + a$ skär den positiva x-axeln i två punkter, vilkas inbördes avstånd är 3 längdenheter. Konstruera kurvan för detta värde på a och beräkna vinklarna i den triangel, vars hörn utgöras av kurvans skärningspunkter med axlarna.
8. I en triangel delar den inskrivna cirkelns periferi en av triangelns medianer i delar, som i ordning äro 4 cm, 12 cm och 4 cm. Beräkna triangelns yta.

Resultat: **1.** Första termen är 1 eller 9 och kvoten resp. 3 och $\frac{1}{3}$. **2.** 22,62° och 67,38°. **3.** $x = \frac{a - 4a^2}{a - 4}$. **4.** 254 m. **5.** 46,10° och 73,90°. **6.** Förhållandet är $\frac{1}{1}$. Rombens yta $= \frac{a^2}{\sqrt{2}}$, där a är rombens sida.

fyrhörningens yta $= \frac{d^2 \sin 45°}{2}$, där d är dennas diagonal = rombens höjd $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. 7. $a = 4$. Vinklarna äro 30,96°; 45° och 104,04°. 8. $60\sqrt{21} = 275{,}0$ cm². Om medianen i fråga är AM och cirkeln tangerar sidorna AC och BC i E och D resp., varvid D ligger på stycket CM, ger kordsatsen $AE = DM = 8$ cm. Då $a = 2b$ och $c = b + 16$, blir enl. mediansatsen $b = 17$ osv.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. En regelbunden femuddig stjärnas spetsar sammanfalla med hörnen i en regelbunden femhörning, som är inskriven i en cirkel med 5 cm radie. Stjärnans begränsningslinjer utgöra delar av diagonalerna i nämnda femhörning. Beräkna stjärnans yta och angiv värdet i såväl exakt som approximativ form.
2. En rät linje med riktningsvinkeln 45° tangerar kurvan $3y = x^3 - 4x^2$ i en punkt A och skär den dessutom i en punkt B. Bestäm koordinaterna för punkterna A och B.
3. Bestäm värdet på $\cos 2x$ ur ekvationen $4\cos^4 x + 4\sin^2 x - 3 = a$, där a är en positiv konstant. Beräkna därefter värdena på x för $a = \frac{1}{4}$.
4. I en tresidig pyramid äro fem kantlinjer lika stora och av given längd. Den sjätte kantlinjen är variabel och skall väljas så, att sammanlagda arean av pyramidens begränsningsytor blir så stor som möjligt. Hur stor är då vinkeln mellan de båda sidoytor, vilkas skärningslinje står emot den variabla kantlinjen?
5. I ett koordinatsystem XOY väljas punkterna A $(a; 0)$ och O' $(2a; b)$, där a och b äro positiva tal. Punkten O' tages till origo i ett nytt koordinatsystem $X'O'Y'$, i vilket punkten A kommer att ligga på den negativa abskissaxeln. Båda koordinatsystemen äro så beskaffade, att den positiva abskissaxeln i vartdera systemet sammanfaller med den positiva ordinataxeln efter en vridning kring origo 90° i positiv led. Bestäm koordinaterna för punkten O i $X'O'Y'$-systemet.
6. Två tetraedrar ha gemensam basyta och äro vända åt motsatta håll. Den ena är regelbunden, den andras sidoytor äro likbenta rätvinkliga trianglar. I den av de båda tetraedrarna bildade dubbelpyramiden inskrives en sfär. Beräkna dennas radie och förhållandet mellan dess volym och dubbelpyramidens.

7. I en cirkel med radien r drages en diameter AB. Punkten A tages till medelpunkt för en cirkel, som skär den förstnämnda cirkeln i punkterna C och D samt diametern AB i punkten E. Om cirkelsegmentet $CDEC$ roterar kring AB, alstrar det ett sfäriskt segment. Bestäm radien i cirkeln A, då det sfäriska segmentets volym är så stor som möjligt.
8. Ett fartyg gick med konstant hastighet rätlinigt mot en punkt P. Det observerades vid olika tidpunkter en viss dag från en punkt Q. Vinkeln mellan syftlinjen från Q till fartyget och syftlinjen från Q till P var kl. 10.30 79° 24′, kl. 11.00 62° 12′ och kl. 11.30 47° 18′. När kom fartyget fram till P?

Resultat: **1.** $125 \operatorname{tg} 36° \cdot \sin 18° = 28{,}07$ cm². Är O centrum, Q en av stjärnans spetsar och QR en av dess sidor, blir $QR = 5 \operatorname{tg} 36°$ (event. medelst sinusteor.); ytan av $\triangle OQR = \frac{25}{2} \cdot \operatorname{tg} 36° \cdot \sin 18°$ osv. **2.** Koordinaterna äro antingen: $A(3; -3)$, $B(-2; -8)$ eller: $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{13}{81}\right)$, $B\left(\frac{14}{3}; \frac{392}{81}\right)$. **3.** $\cos 2x = \pm\sqrt{a}$; $x = \pm 30° + n \cdot 90°$. **4.** 109,47°. **5.** $x' = -\frac{2a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $y' = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **6.** Om tetraederns kant är a, är radien $= \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ och förh. mellan volymerna $= \frac{\pi}{3}(6\sqrt{3}-10) = 0{,}4105$. **7.** $r(\sqrt{5}-1)$. **8.** Kl. 17.40. Om punkterna A, B och C_1 ligga på samma räta linje, och Q är en punkt utanför linjen, gäller $\frac{\triangle AQC_1}{\triangle BQC_1} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AQ}{BQ} \cdot \frac{\sin AQC_1}{\sin BQC_1}$. Är C_2 en fjärde punkt på samma linje, får man två s. k. dubbelförhållanden: $\frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{\sin AQC_1}{\sin BQC_1} : \frac{\sin AQC_2}{\sin BQC_2}$. Låt C_1 vara punkten P och A, C_2 och B fartygets lägen vid tiderna 10.30, 11.00 och 11.30. Kommer fartyget fram till P x tim. efter kl. 11.30, får man $\frac{x+1}{x} : \frac{0{,}5}{0{,}5} = \frac{\sin 79°24'}{\sin 47°18'} : \frac{\sin 17°12'}{\sin 14°54'}$; $1 + \frac{1}{x} = 1{,}163$ och $x = 6{,}135$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. En ellips är inskriven i en kvadrat, så att axlarna falla utefter diagonalerna och tangeringspunkterna dela kvadratens sidor i förhållandet 1 : 3. Hur stor del av kvadratens yta upptar ellipsen?

2. Ekvationen för en parabel är $y^2 = 6x$. Kordan AB är normal till parabeln i punkten A och delas av parabelns axel i förhållandet 1 : 2. Bestäm koordinaterna för punkterna A och B.
3. I cirkeln $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ drages en korda, som går genom origo och utgör en sida av en i cirkeln inskriven kvadrat. Bestäm ekvationerna för kvadratens sidor.
4. En rät linje, som är parallell med den räta linjen $y = x \sin v$, där v är en given vinkel, tangerar kurvan $y = \sin^2 x$ i punkten A och skär x-axeln i punkten B. Vilka värden kan projektionen av AB på x-axeln (den s. k. subtangenten) antaga?
5. Genom punkten (5; 7) på kurvan $xy - 4x - 3y + 6 = 0$ drages en godtycklig rät linje, som skär kurvans asymptoter i två punkter. Genom dessa dragas därefter räta linjer, som äro parallella med asymptoterna och skära varandra i punkten P. Sök och konstruera orten för punkten P.
6. Medelst ekvationerna $x = 2z - \sin z$, $y = 2 - \cos z$, där z är en variabel vinkel, som är uttryckt i radianer, bestämmes y som en funktion av x. Bestäm de värden på y, för vilka derivatan av y med avseende på x antar värdet $\frac{1}{2}$.
7. P är en punkt på den övre grenen av hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 = 0$, Q dess projektion på x-axeln. Sträckan PQ skär en av asymptoterna i en punkt R mellan P och Q. Storleken av den sträcka, som är medelproportional till sträckorna PR och RQ, är en funktion av abskissan x för punkten P. Undersök denna funktion med avseende på asymptoter, maxima och minima och representera den grafiskt för alla värden på x.

Resultat: **1.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0{,}6802$. Betrakta kvadraten och ellipsen som projektion av en romb med inskriven cirkel och beräkna förh. mellan cirkelns yta och rombens. Om rombens sidor ha delarna d och $3d$, är cirkelns radie $d\sqrt{3}$ och rombens diagonaler $4d$ och $4d\sqrt{3}$ osv. Uppgiftens »kvadrat» kan utbytas mot »romb». **2.** $A(3;\ 3\sqrt{2})$ och $B(12;\ -6\sqrt{2})$ eller $A(3;\ -3\sqrt{2})$ och $B(12;\ 6\sqrt{2})$. **3.** $x + y = 0$; $x + y = 4$; $x - y = -6$; $x - y = -2$ eller $7x - y = 0$; $7x - y = -20$; $x + 7y = 10$; $x + 7y = 30$. **4.** $\left|\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}\right|$ och $\left|\frac{1}{2} \operatorname{cot} \frac{v}{2}\right|$. **5.** Orten är hyperbeln $(x - 5)(y - 7) = 6$ med asymptoterna $x = 5$, $y = 7$. **6.** 2 och 1,2. **7.** Om medelprop. är y och x är P:s abscissa, finner man $y = \frac{b}{a}\sqrt{|x| \cdot (\sqrt{x^2 + a^2} - |x|)}$. Förlängning med $\sqrt{x^2 + a^2} + |x|$ ger $y = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2|x|}{\sqrt{x^2 + a^2} + |x|}} = \frac{b}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}} + 1}}$;

y växer ständigt från 0 till $\frac{b}{\sqrt{2}}$, då $|x|$ växer från 0 till ∞; $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ är asymptot, och y-axeln är symmetriaxel. För små $|x|$ är $y \approx b\sqrt{\frac{|x|}{a}}$, varav inses, att kurvan har en spets i origo, där den tangerar y-axeln.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1—3 och 5—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Under en taklampa är anbragt en enkel ljusspridare, som består av en halvsfärisk kupa, infattad i en smal mässingsring. Den uppbäres av tre lätta kedjor, vilkas fästpunkter i ringen bilda en liksidig triangel. Deras fästpunkt i taket ligger rakt ovanför ringens medelpunkt. Varje kedjas längd mellan fästpunkterna är 10 dm, mässingsringens diameter 5 dm, ljusspridarens hela vikt 3,3 kg. Sök spänningen i en av kedjorna.
2. Under det en bil startades, avläste man hastighetsmätaren var tionde sekund och fann i ordning hastigheterna 0, 19, 31, 40, 47, 52 och 55 km/tim. Rita en kurva över hastigheten såsom funktion av tiden och använd den till att finna vagnens acceleration 30 sek efter starten. Accelerationen skall uttryckas i m/sek².
3. En person cyklar med en medelhastighet av 15 km/tim på en horisontell väg och utvecklar därvid en effekt av 0,10 hk. Tillsammans med cykeln väger han 90 kg. I en uppförsbacke med lutningen 5 : 100 vill han behålla hastigheten oförändrad och måste således utveckla större effekt. Hur stor måste hans effekt i detta fall vara, om friktions- och luftmotstånden äro oförändrade?
4. Vid en bestämning av specifika värmet för luft vid konstant tryck har man en behållare med komprimerad luft, som rymmer 10,0 lit. Genom en lämplig reduktionsventil, som anbragts vid behållaren, kan luften bringas att utströmma under ett konstant tryck, som ligger obetydligt över det yttre barometerståndet. Luften ledes från behållaren genom en rörledning, får först passera en uppvärmningsanordning, där den antager temperaturen + 100,0° C, och fortsätter därefter genom ett spiralrör av koppar, som är nedsänkt i en kalorimeter och med sin fria ända utmynnar ovanför vattnet i kalorimetern. Luften avgiver värme till kalorimetern och har, då den lämnar kalorimetern,

just den temperatur, som kalorimetern för ögonblicket besitter. Under en viss tid har temperaturen i kalorimetern stigit från 19,0° C till 21,0° C. Härvid har trycket i behållaren sjunkit från 10,0 till 7,9 atmosfärer, medan dess temperatur är oförändrat + 20,0° C. För uppvärmning av kalorimetern med innehåll en grad åtgår 244 cal; den är väl skyddad mot värmeutbyte med omgivningen. Vad ger försöket för värde på luftens specifika värme? 1 atm = 760 mm Hg.

5. En astronomisk kikare är inriktad mot en fixstjärna. Kikaren fungerar som ljussamlare: i det genom okularet utträdande parallella strålknippet är ljusflödet per ytenhet av knippets tvärsnitt betydligt större än i det infallande knippet. Objektivets brännvidd är 1,5 m och okularets 7,5 cm; båda kunna behandlas som tunna linser. Till följd av reflexion och absorption förloras i objektivet 10 % och i okularet 9 % av det ljusflöde, linsen i fråga mottager. Sök förhållandet mellan ljusflödet per ytenhet i de båda knippena.

6. En prismasats består av ett liksidigt flintglasprisma och två sinsemellan lika kronglasprismer, alla med brytande kanterna parallella. Kronglasprismerna äro symmetriskt anbragta intill var sin sida av flintglasprismat, med brytande vinklarna vända åt motsatt håll mot flintglasprismats brytande vinkel. Ett parallellt knippe natriumljus infaller mot prismasatsen, vinkelrätt mot dess symmetriplan, och skall lämna prismasatsen i oförändrad riktning. Hur stor brytande vinkel böra kronglasprismerna ha? Brytningsindex för natriumljus är för kronglas 1,516 och för flintglas 1,752.

7. Fyra metalltrådar äro sammanlödda, så att det påminner om en stege med två pinnar. De trådar, AB och CD, som bilda stegens sidostycken, äro 6,0 cm långa och ha ett motstånd av 0,06 Ω per cm. De trådar, som bilda pinnarna, äro 4,0 cm långa och ha ett motstånd av 0,05 Ω per cm. Avståndet från en pinne till den närmaste ändan av stegen är 2,0 cm. Det på detta sätt konstruerade motståndet inkopplas i en strömkrets, varvid strömmen inträder vid A och får passera ut vid B, C eller D. Undersök vid vilken av dessa tre kopplingar motståndet är störst.

8. Ett elektricitetsverk matar belysningsnätet i en stad med likström av 220 V spänning. I verket finnas två ackumulatorbatterier A och B. Om batteri A ensamt användes som strömkälla, blir vid mycket liten belastning nätspänningen den önskade, men för att bibehålla spänningen på detta värde, då en effekt av 44 kW uttages i nätet, måste batteriet ökas med

ytterligare tre ackumulatorer, som inbördes äro kopplade i serie. Hade enbart batteri B varit strömlevererande, skulle också nu vid helt liten belastning spänningen fått önskat värde, men i detta fall skulle fem extra, i serie kopplade ackumulatorer ha erfordrats för att upprätthålla detta värde vid nyssnämnda större effektuttag. Om de båda batterierna, vart och ett utökat med sina extra ackumulatorer, parallellkopplas, kan större effekt uttagas. Hur stor är vid denna koppling den sammanlagda, av batterierna avgivna effekten, om nätspänningen tillåtes sjunka till 218 V? Det förutsättes, att strömstyrkorna ligga inom tillåtna gränser samt att ackumulatorernas elektromotoriska kraft och inre motstånd äro oförändrade. Varje ackumulator har en elektromotorisk kraft av 2,00 V.

Resultat. **1.** 1,14 kgf. **2.** 0,22 m/sek². **3.** 0,35 hk. **4.** 0,241 cal/g · grad. **5.** Ljusflödet per ytenhet är i det utträdande knippet 328 ggr så stort som i det infallande. **6.** 45,4°. **7.** Motståndet är störst (0,40 Ω) mellan de diagonalt belägna punkterna *A* och *D*. **8.** 110,5 kW. (*A* och *B* ha båda emk = 220 V. Inre motståndet är hos gruppen $A + 3$ ackum. $= \frac{6}{200}$ Ω och hos gruppen $B + 5$ ackum. $= \frac{10}{200}$ Ω osv.)

(Forts. från sid. 185.)

Fysisk Tidsskrift, København 1945: 1—2.

Ur innehållet: H. M. Hansen, Helge Holst 1871—1944; H. Holst †, Om Forholdene i et stationært Neutralfelt; H. Holst †, Fire Bøger om Ole Rømer; H. Jensen og E. Krüger, Om Grundlaget for Varmeteorien; Danske Eksamensopgaver.

Naturens Verden, København 1944: 9—10; 1945: 1—3.

Ur innehållet: Th. Mortensen, Hvoraf kommer Navnet det »Røde Hav»?; S. Orla-Jensen, Kan Livet forlænges ved Regulering av Tarmfloraen?; K. Dreyer-Jørgensen, Fredrikshavn-Strandby Gasomraadets Geologi; S. L. Tuxen, Islands og Færøernes Kortlægning gjennem Tiderne; S. Orla-Jensen, Nobelpristageren Dr. phil. H. Dam og K-Vitaminet.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1945: 2.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Nobelpristagere i fysikk: J. D. van der Waals, W. Wien, N. G. Dalén, H. Kamerlingh Onnes; S. Høffer-Jensen, Et Røntgen-Højspændingsanlæg med Resonanstransformator; K. A. Wingårdh, Människokroppens elektriska motstånd; Bj. Bjerke, Giorgisystemet.

Norsk Populær-astronomisk Tidsskrift, Oslo 1945: 1.

Ur innehållet: O. Struve, Epsilon Aurigeas usynlige ledsager; R. G. Aitken, Historien om Castor. — Solformörkelsen 9 Juli 1945, Observasjoner som kan utföres.

Om konsekutiva sammansatta udda tal.

Av KARL BLIX.

Sommaren 1935 lämnade mig lektor MARTIN ÅLANDER meddelande om en talteoretisk undersökning, varmed han sysslade. Den ådrog sig mitt livliga intresse, och i samförstånd med honom lämnar jag här ett bevis för en av honom uttalad sats (av mig angiven i något förändrad form) jämte några numeriska uträkningar.

Om p_n betecknar det n:te primtalet (alltså $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ o. s. v.), kan satsen formuleras sålunda:

Det finnes alltid $p_{n-1} - 1$ *konsekutiva udda tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av de* $n-1$ *första udda primtalen 3, 5, 7, 11 ...,* p_n. [1]

Satsen kan bevisas på följande sätt.

Talföljden

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots, p_{n-1} - 2 \qquad (1)$$

utgöres av alla udda tal mellan 1 och p_{n-1}. Införes beteckningen $q = p_{n-1} - 2$, är talens antal $\frac{q-1}{2}$. Vart och ett av talen är delbart med något av primtalen

$$3, 5, 7, 11, \ldots, p_{n-2}. \qquad (2)$$

Med P_n betecknas produkten av de n första primtalen. $P_{n-2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p_{n-2}$ är alltså ett jämnt tal.

Vi bilda nu talen

$$P_{n-2} \cdot k \pm u_i, \qquad (3)$$

($k = \pm 1; \pm 2; \pm 3$; o. s. v.), och låta u_i genomlöpa samtliga tal i (1). Varje tal i (3) är då udda samt delbart med något av prim-

[1] Om man tillfogar de p_{n-1} jämna talen, som befinna sig före, mellan och efter de $p_{n-1} - 1$ udda talen, erhålles en följd av konsekutiva hela tal innehållande $2p_{n-1} - 1$ termer, och satsen kan därför även formuleras sålunda:

Det finnes alltid $2p_{n-1} - 1$ *konsekutiva hela tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av de n första primtalen 2, 3, 5, 7 ...,* p_n.

(Detta är den form, varuti Ålander meddelade mig sin sats.)

talen (2), eftersom detta gäller både för P_{n-2} och u_i. Tillfogas talen $P_{n-2} \cdot k \pm 1$ och ordnas talen i stigande följd, får man för varje heltalsvärde på k en serie av konsekutiva udda tal, nämligen

$$P_{n-2} \cdot k - q;\ \ldots;\ P_{n-2} \cdot k - 3;\ P_{n-2} \cdot k - 1;\ P_{n-2} \cdot k + 1;$$
$$P_{n-2} \cdot k + 3;\ \ldots;\ P_{n-2} \cdot k + q. \qquad (4)$$

Termernas antal är $2 \cdot \frac{q-1}{2} + 2 = q + 1 = p_{n-1} - 1$.

Alla termerna utom de två mellersta äro, såsom nyss visats, delbara med något av primtalen (2). Emedan man fritt förfogar över värdet på k, bestämmes k så, att $P_{n-2} \cdot k - 1$ blir delbart med p_{n-1} och $P_{n-2} \cdot k + 1$ blir delbart med p_n.[1]

Man har alltså att sätta

$$\left.\begin{aligned} P_{n-2} \cdot k - 1 &= p_{n-1} \cdot a \\ P_{n-2} \cdot k + 1 &= p_n \cdot b \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

där a och b äro hela tal.

Emedan P_{n-2}, p_{n-1} och p_n äro relativa primtal, kan k *alltid* härur beräknas. Om $k = k_1$ är ett sålunda erhållet värde, får man genom dess insättning i (4) $p_{n-1} - 1$ konsekutiva udda tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av primtalen 3, 5, 7, 11, ..., p_n.

Därmed är satsen bevisad och metoden för bestämningen av de $p_{n\ 1} - 1$ konsekutiva udda talen angiven

Anm. 1. Av denna sats följer omedelbart den kända satsen, att det finns följder av hur många som helst kons. sammansatta tal.

Anm. 2. Emedan ekv.-systemet (5) kan lösas även om p_{n-1} och p_n utbytas mot *större* primtal, kan satsen formuleras generellare, varvid man lämpligen utbyter n mot $n+2$, då den kommer att lyda:

Det finnes alltid $p_{n+1} - 1$ konsekutiva udda tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av primtalen 3, 5, 7, ..., p_n, p_r, p_s, där r och s äro två olika hela tal $> n$.

Exempel 1. Med något av primtalen 3, 5, 7, 23, 41 (där alltså $p_n = 7$ och $p_{n+1} - 1 = 11 - 1 = 10$) äro de tio udda talen 1671, ..., 1689 delbara. Deras minsta divisorer äro i ordning 3, 7, 5, 3, 23, 41, 3, 5, 7, 3.

[1] Man kan naturligtvis även bestämma k så, att $P_{n-2} \cdot k - 1$ blir delbart med p_n och $P_{n-2} \cdot k + 1$ blir delbart med p_{n-1}. Den nya serie, som då erhålles, kan man dock få på annat sätt, såsom exemplet här nedan visar.

Exempel 2. Angiv enligt Ålanders sats en följd av konsekutiva udda tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av primtalen 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Här är $n = 7$ (det första primtalet p_1 är nämligen $= 2$); $p_n = 17$; $p_{n-1} = 13$; antalet termer $= p_{n-1} - 1 = 12$; $q = p_{n-1} - 2 = 11$; $P_{n-2} = P_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.

Insättas dessa tal i (5), fås ekv.-systemet

$$\begin{cases} 2310\,k - 1 = 13\,a & \text{(a)} \\ 2310\,k + 1 = 17\,b & \text{(b)} \end{cases}$$

Ur (a) erhålles $a = 178\,k - \dfrac{4k+1}{13}$, varav

$$k = 3 + 13\,m \quad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2 \text{ o. s. v.}) \qquad \text{(c)}$$

Nu skall m bestämmas så, att b blir ett helt tal. Insättes därför (c) i (b), får man $17\,b = 6931 + 30030\,m$; $\because\ b = 1767\,m + 408 - \dfrac{9m+5}{17}$, varav

$$m = 7 + 17\,h \quad (h = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \text{o. s. v.}) \qquad \text{(d)}$$

Insättes (d) i (c), får man $k = 3 + 13\,(7 + 17\,h) = 94 + 221\,h$.

Första och sista termerna i den sökta följden äro då enligt (4):

$$2310\,(94 + 221\,h) - 11 = 217\,129 + 510\,510\,h \qquad \text{(e)}$$

$$2310\,(94 + 221\,h) + 11 = 217\,151 + 510\,510\,h \qquad \text{(f)}$$

och de sökta talen äro (med utelämnande av termen $510\,510\,h = P_7 \cdot h$) 217 129, ..., 217 151 med resp. minsta divisorer 11, 3, 7, 5, 3, 13, 17, 3, 5, 7, 3, 11.

Sättes i (e) och (f) $h = -1$, blir första termen $-293\,381$ och sista termen $-293\,359$. Efter ombyte av tecken och ordnande i stigande följd komma termerna och deras minsta divisorer i motsatt ordning (alltså p_n före p_{n-1}). Talen äro då (med utelämnande av $+ P_7 \cdot h$) 293 359, ..., 293 381.[1]

Det finnes således alltid *två* talföljder av positiva udda tal $< P_n$ så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av primtalen 3, 5, 7, ... p_n. Lägges $P_n \cdot h$ till dessa tal, får man för varje heltalsvärde på h en ny följd av delbara tal.

I omstående tabell angivas de 8 första paren talföljder av detta slag, varvid endast första och sista talen utskrivas. Dessutom angives antalet termer i varje följd samt »perioden» P_n, varmed serierna kunna ökas.

[1] Denna talföljd får man även genom att lösa ekv.-systemet

$$2310\,k - 1 = 17\,a; \quad 2310\,k + 1 = 13\,b.$$

p_n	Delbara konsekutiva udda tal	Term-antal	P_n
5	3, 5 25, 27	2	30
7	3, ..., 9 201, ..., 207	4	210
11	115, ..., 125 2185, ..., 2195	6	2310
13	9441, ..., 9459 20 571, ..., 20 589	10	30 030
17	217 129, ..., 217 151 293 359, ..., 293 381	12	510 510
19	1 601 475, ..., 1 601 505 8 098 185, ..., 8 098 215	16	9 699 690
23	29 609 563, ..., 29 609 597 193 483 273, ..., 193 483 307	18	223 092 870
29	417 086 649, ..., 417 089 691 6 052 606 539, ..., 6 052 606 581	22	6 469 693 230

De minsta divisorerna fördela sig enligt schemat:

$$q, \ldots, 3, 13, 11, 3, 7, 5, 3, \begin{Bmatrix} p_{n-1}, & p_n \\ p_n, & p_{n-1} \end{Bmatrix}, 3, 5, 7, 3, 11, 13, 3, \ldots, q,$$

om $q = p_{n-1} - 2$ är ett primtal, i annat fall dess minsta divisor.

Nu komma vi till den betydelsefulla frågan: Är $p_{n-1} - 1$ *det största möjliga antalet* konsekutiva udda tal så beskaffade, att vart och ett av dem är delbart med något av primtalen $3, 5, 7, \ldots, p_n$?

Att denna fråga måste besvaras med »ja» för primtal < 23, men med »nej» för $p_n = 23$ har Ålander bevisat.[1] Av hans analys framgår, att för $p_n = 23$ måste det finnas en följd av konsekutiva udda tal, vilkas minsta divisorer uppträda i följande ordning:

$$3, 5, 11, 3, 13, m, 3, 7, n, 3, r, 5, 3, 11, 7, 3, 5, 13, 3, \qquad (6)$$

där m, n, r utgöras av talen 17, 19, 23 i godtycklig ordning.

För $p_n = 23$ finnes det alltså inte blott de ovan angivna $p_{n-1} - 1 = 18$ talen utan även $p_{n-1} = 19$ sådana tal. Då det 8:de talet är delbart med 7, måste även det första vara det, och alltså kan

[1] Beviset har jag tagit del av, men det är ännu ej publicerat.

detta tecknas $21a$, liksom det andra $5b$, det tredje $11c$ o. s. v. Jag har därför uppställt och löst följande ekv.-system:

$$\left.\begin{array}{r} 21a+2=5b \\ 5b+2=11c \\ 11c+4=13d \\ 13d+2=me \\ me+6=nf \\ nf+4=rg \end{array}\right\}, \tag{7}$$

där bokstäverna beteckna udda tal. Utbytas här (m, n, r) mot de olika permutationerna av (17, 19, 23), får man sex olika serier av 19 konsekutiva udda tal, vilkas mellersta termer bli

65 767 881, 82 374 471, 140 722 761,
168 140 151, 176 128 131, 204 626 601,

svarande mot permutationerna

(19, 23, 17), (19, 17, 23), (17, 19, 23),
(23, 17, 19), (17, 23, 19), (23, 19, 17).

Även dessa tal kunna naturligtvis ökas med $P_9 \cdot h = 223\,092\,870\,h$. Om man sätter $h = -1$, ändrar tecknen och ordnar talen i stigande följd, får man 6 nya serier av 19 konsekutiva udda tal, vilkas minsta divisorer utgöras av talraden (6), läst i motsatt ordning. Den mellersta termen i serierna blir

18 466 269, 46 964 739, 54 952 719,
82 370 109, 140 718 399, 157 324 989,

svarande mot permutationerna

$(r, n, m) =$ (17, 19, 23), (19, 23, 17), (19, 17, 23),
(23, 19, 17), (23, 17, 19), (17, 23, 19).

För $p_n = 37$ har jag (förutom de av satsen härledda 30 talen) funnit följande serie av 32 konsekutiva udda tal:

187 219 155 595, ..., 187 219 155 657

med de minsta divisorerna i ordning:

5, 3, 7, 23, 3, 5, 11, 3, 19, 7, 3, 13, 17, 3, 37, 5, 3, 11, 31, 3, 5,
29, 3, 7, 13, 3, 23, 19, 3, 17, 5, 3.

Alltså är i denna serie termernas antal ej $p_{n-1} - 1 = 30$ utan $p_{n-1} + 1 = 32$. Här kunna divisorerna 29, 31, 37 permuteras på 6 sätt, varför man också i detta fall kan erhålla 12 olika serier av sådana tal $< 7\,420\,738\,134\,810$ $(= P_{12})$.

Enligt vad Ålander meddelat mig är för $p_n = 29$ det maximala antalet delbara konsekutiva udda tal återigen endast det av satsen angivna, nämligen 22. Frågan, om de talföljder, som med tillhjälp av satsen bestämmas för $p_n = 31$ och för $p_n > 37$, äro maximala eller ej, lämnas öppen.[1]

[1] Sedan detta skrivits, har lektor Agne Wahlgren verkställt en analys av fallen $p_n = 31$ och $p_n = 41$ och funnit, att antalet delbara konsekutiva udda tal i båda fallen ej kan bli större än det av satsen angivna.

Uppg. 7 allmän kurs nov. 1945.

Satsen (se detta häfte s. 248) kan bevisas rent geometriskt och medger då följande allmännare formulering:

På sidorna i en (godtycklig) triangel ABC uppritas utåt de likbenta trianglarna AP_1B, BP_2C och CP_3A, vilkas toppvinklar v_1, v_2, v_3 (vid P_1, P_2, P_3 resp.) tillsammans äro 360°. Visa, att vinklarna i triangeln $P_1P_2P_3$ äro $\frac{1}{2}v_1$, $\frac{1}{2}v_2$ och $\frac{1}{2}v_3$.

Vi utföra först beviset under förutsättning, att vinklarna P_1BP_2, P_2CP_3 och P_3AP_1 äro konvexa (vilket ju är fallet i studentuppgiften). Med P_1 som medelpunkt lägges en cirkel genom A och B och med P_2 som medelpunkt en cirkel genom B och C. Dessa skära varandra i en punkt Q, så att periferivinklarna BQA och BQC bli supplementvinklar till $\frac{1}{2}v_1$ resp. $\frac{1}{2}v_2$. Alltså är $\sphericalangle AQC = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, som enligt förutsättningen är supplementvinkel till $\frac{1}{2}v_3$. Följaktligen kommer en cirkel med P_3 till medelpunkt och gående genom A och C även att gå genom Q. Speglas punkterna A, B och C mot P_3P_1, P_1P_2 resp. P_2P_3, komma således deras spegelbilder alla att falla i Q, varav satsens riktighet framgår.

Är en vinkel, t. ex. P_1BP_2, konkav (*flera* kan ej vara konkava, då sexhörningens vinkelsumma är 720°), bli periferivinklarna $BQA = \frac{1}{2}v_1$, $BQC = \frac{1}{2}v_2$, men $\sphericalangle AQC$ blir även nu $= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, varför bevisets återstod blir oförändrad.

Anm. Trianglarna ABC och $P_1P_2P_3$ utgöra ett ex. på s. k. ortologa trianglar (normalerna från hörnen i den ena mot vardera en sida i den andra gå genom samma punkt).[1] *Stig Comét.*

[1] Se J. Hjelmslev, Beiträge zur nicht-Eudoxischen Geometrie. Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab, *21*, nr 5, s. 7. København (1944).

Vitaminernas kemi. II.

En översikt med speciell hänsyn till vitaminforskningens senaste resultat.[1]

Av **KLAS-BERTIL AUGUSTINSSON.**

Tropisk anemi-förhindrande faktor

förhindrar, som namnet antyder, uppkomsten av en särskild slags anemi, karakteriserad genom förekomsten av abnormt stora och hämoglobinrika röda blodkroppar (megalocytos). — En särskild

Anemi-faktor för duvor

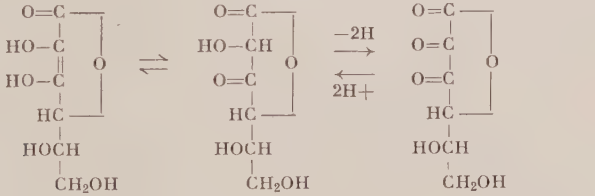
skall enligt vissa forskare förhindra uppkomsten av en anemiform, som på tyska går under namnet »Sichelzellenanämie» (Sichel = skära). — En antianemisk faktor är också det tidigare omnämnda vitamin B_c samt vitamin M (se nedan).

GPF

har man kallat tre faktorer, nödvändiga för marsvin (*guinea pig*). Av dessa förekomma GPF-1 och GPF-2 i linfrö, GPF-3 i lever och gräs, även till en del i jäst. De äro icke identiska med »folic acid». Identiteten mellan GPF-3 och vitaminerna B_{10} och B_{11} har diskuterats.

Vitamin C

kallas också askorbinsyra på grund av sin förmåga att bota skorbut eller skörbjugg. Vitamin C är identiskt med en av Szent-Guörgyi redan 1928 ur binjurebark isolerad »hexuronsyra», $C_6H_8O_6$. Det existerar i två aktiva former: l-askorbinsyra, som är den vanliga formen av vitaminet, och dehydroaskorbinsyra, reversibelt oxiderad l-askorbinsyra:



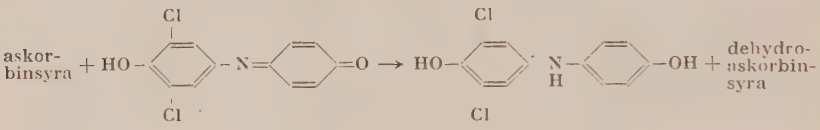
enol-form keto-form

l-askorbinsyra dehydro-l-askorbinsyra

[1] Forts. från septemberh. s. 170.

I växterna förekommer dessutom vitamin C till 70 % i bunden form som s. k. *askorbigen*, som är mycket beständigt mot oxidationsmedel.

Vitamin C kristalliserar i färglösa, mikroskopiska nålar. Det har starkt reducerande egenskaper, vilket förhållande man utnyttjar vid vitaminbestämningen (enl. Tillman). Denna är en oxidimetrisk titrering med 2,6-diklorfenol-indofenol som indikator och grundar sig på följande reaktion:



blå i alkali, röd i syra färglös

Vitamin C_2

har von Euler kallat ett vitamin, som senare bättre har benämnts vitamin J.

Vitamin D

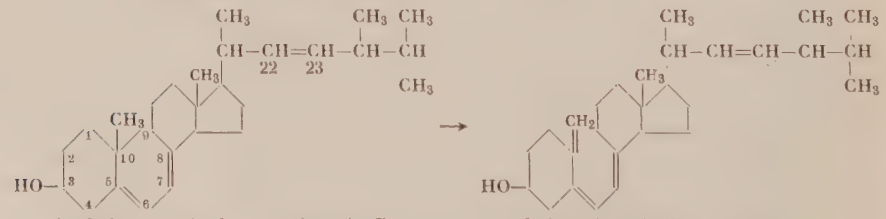
är det naturliga antirakitiska vitaminet och identiskt med vitamin D_3.

Vitamin D_1

har visat sig vara en blandning av två bestrålningsprodukter av ergosterin, nämligen lumisterin och vitamin D_2. Lumisterin uppstår genom en sterisk omlagring av metylgruppen vid C-atom 10 i ergosterin-molekylen (se vitamin D_2). Lumisterin kan ej förhindra rakitis, är alltså ej någon D-vitamer.

Vitamin D_2

eller calciferol, $C_{28}H_{44}O$, bildas av ergosterin genom bestrålning med ultraviolett ljus eller solljus, på samma sätt som de övriga antirakitiska vitaminerna uppstå som bestrålningsprodukter av steriner av ergosterintypen. Dessa kallas på grund härav för provitamin D. Vid bestrålningen uppspjälkas den mellersta av de tre 6-ringarna i sterinskelettet; denna mekanism är gemensam för alla aktiveringar av provitamin D.



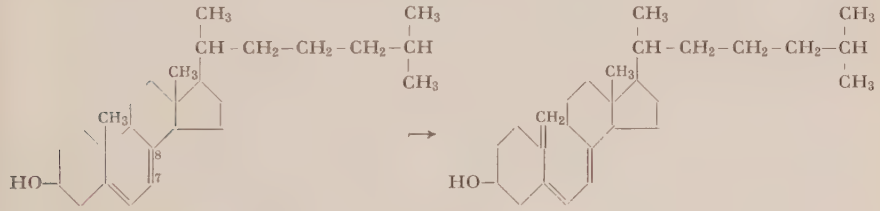
inaktiv ergosterin, provitamin D_2 aktivt vitamin D_2, calciferol

Vid bestrålning av ergosterin bildas även andra substanser. Den fotokemiska omvandlingen är nämligen av ganska komplicerad natur. Det bildas en serie isomera ämnen med olika fysikaliska egenskaper och med olika fysiologisk verkan. Vid lång och intensiv bestrålning erhållas slutprodukter, de s. k. suprasterinerna, som helt sakna den antirakitiska verkan:

ergosterin	overksam
↓	
lumisterin (sterin X)	overksam
↓	
tachysterin (jfr AT 10)	overksam mot rakitis men ökar serumkalkspegeln
↓	
vitamin D_2 (calciferol)	verksam
↓ ↓ ↓	
toxisterin (ämne 248)	suprasterin I suprasterin II	overksamma

Vitamin D_3

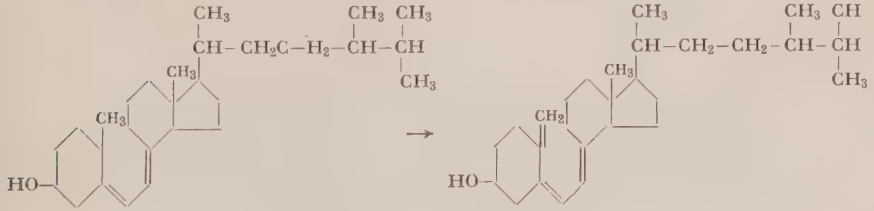
eller det naturliga vitamin D, $C_{27}H_{44}O$, i levertran är en bestrålningsprodukt av 7-dehydrocholesterin:



inaktiv 7-dehydrocholesterin, provitamin D_3 aktivt vitamin D_3

Vitamin D_4

bildas vid bestrålning av 22-dihydroergosterin:



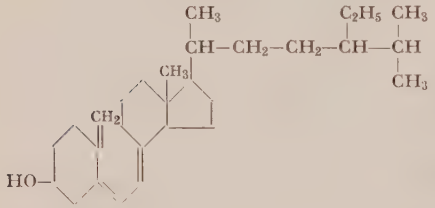
Det skiljer sig alltså från vitamin D_2 blott genom den hydrerade dubbelbindningen i sidokedjan och är $^2/_3$ så verksam som calciferol.

Vitamin D_5

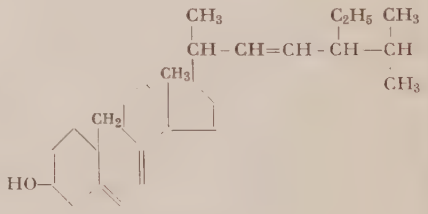
är 30—40 ggr mindre verksam än D_2 och är en bestrålningsprodukt av 7-dehydrositosterin.

Vitamin D_6

har man kallat den vid bestrålning av 7-dehydrostigmasterin bildade substansen.



vitamin D_5

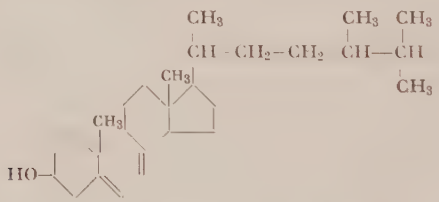


vitamin D_6

Dess antirakitiska verkan är omstridd.

AT 10

eller dihydrotachysterin har fått sitt namn därav, att det använts som *anti*tetaninskt läkemedel och att det har 10 gånger så

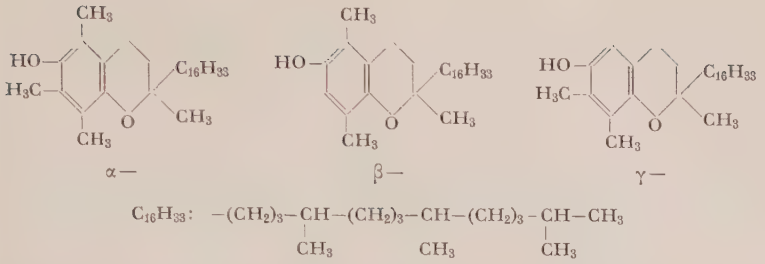


dihydrotachysterin (AT 10)

stor aktivitet vid höjning av serumkalkspegeln som tachysterin. Det har antirakitisk verkan; denna verkan för vitamin D_3 och AT 10 förhåller sig som 6 : 1.

Vitamin E

eller det »födelseframkallande» vitaminet har man kallat *tokoferol* på grund av dess sterilitetsförhindrande egenskaper. Minst tre i naturen förekommande föreningar med vitamin E-verkan känner man till, nämligen α-, β- och γ-tokoferol. Av dessa kan α-tokoferol anses vara prototypen för vitamin E. β- och γ-tokoferol ha båda bruttoformeln $C_{28}H_{48}O_2$ och skilja sig åt blott genom ställningen för en CH_3-radikal. De äro lägre homologer till α-tokoferol, $C_{29}H_{50}O_2$:



Sidokedjan $C_{16}H_{33}$ är en del av en fytolrest, som dock sannolikt icke är obetingat nödvändig för vitamin E-verkan.

Funks vitamin E är identiskt med vitamin D.

Vitamin F

har under vitaminforskningens utveckling fått betyda många olika slags vitaminer. Funks vitamin F har sålunda visat sig vara identiskt med vitamin E, MacCollums med vitamin B_2 och Shermans med vitamin B_1. Slutligen ha en del amerikaner med Evans i spetsen tillskrivit en blandning av livsviktiga, i kroppen icke syntetiserbara omättade fettsyror vitaminverkan och härför valt beteckningen vitamin F. Från särskilt medicinskt håll har man emellertid ifrågasatt riktigheten av att kalla en dylik blandning för ett vitamin.

Exempel på syror, det här rör sig om, är linolsyra, linolensyra, 9,11-linolsyra, eleostearinsyra, likansyra och parinarsyra; av dessa ha de två sistnämnda följande sammansättning:

$CH_3–(CH_2)_3–(CH=CH)_3–(CH_2)_4–CO–(CH_2)_2–COOH$

likansyra

$CH_3–CH_2–(CH=CH)_4–(CH_2)_7–COOH$

parinarsyra

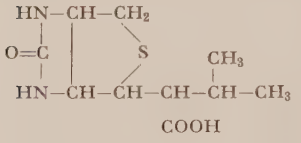
Vitamin G

är i Amerika en vanlig benämning för vitamin B_2.

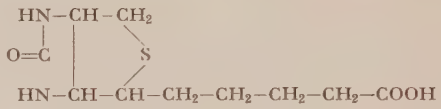
Vitamin H

eller hudfaktorn, $C_{10}H_{16}O_3N_2S$, tillhör de s. k. hudfaktorerna. Dessa för jästens tillväxt nödvändiga ämnena utgöras av *bios I*, som är meso-inosit, *bios II a*, identiskt med pantotensyra, *bios II b*, som av Kögl kallats *biotin* och som är identisk med vitamin H, samt slutligen *bios V*, som sannolikt är vitamin B_1. Icke heller biotin är enhetligt. Äggulas och levers biotin skilja sig åt bl. a. genom olika

smältpunkter. De ha kallats α-biotin och β-biotin respektive. De båda substansernas konstitution ha helt nyligen uppklarats av Kögl och hans medarbetare:



α-biotin



β-biotin

Det syntetiskt framställda biotin är identiskt med naturligt biotin; l-biotin och dl-allobiotin äro biologiskt inaktiva. I dl-allobiotin är urinämneringen uppspjälkad, och denna synes alltså vara nödvändig för den fysiologiska verkan.

Med biotin är även en i litteraturen beskriven, för jästen tillväxt- och andningsbefordrande faktor identisk, nämligen co-enzym R.

Liksom andra vitaminer (t. ex. pantotensyra, vitamin C och vitamin B_c) förekommer också biotin i organismen i bunden form. Detta »bundna» biotin är en förening mellan en molekyl biotin och en molekyl av en i äggvita förekommande basisk protein, *avidin*, vars molekylvikt är omkring 70 000. Avidin har isolerats i kristallinisk form. Avidin-biotin eller AB har ingen biologisk verkan. Biotin frigöres från AB i organismen genom någon oxidations-reduktions-process. Intressant är, att bildningen av avidin är direkt eller indirekt beroende av äggstockarnas funktion (hos höns).

Nyligen har man upptäckt tre andra, med biotin närbesläktade substanser med biotinverkan. Två av dessa, det värmelabila *miotin* och det värmestabila *tiotin*, kunna icke kombineras med avidin. Det tredje, *riotin*, ger däremot en biologiskt inaktiv avidin-förening.

Vitamin H'

är p-aminobenzoesyra.

Faktor I

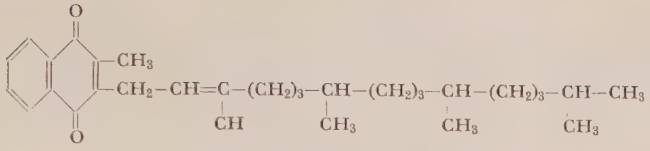
är vitamin B_7.

Vitamin J

eller vitamin C_2 har ansetts vara en antipneumonifaktor, som förhindrar lunginflammation hos vissa djur. Dess kemi har icke närmare utforskats.

Vitamin K_1

$C_{31}H_{46}O_2$, är ett av de naturligt förekommande K-vitaminerna. Det kallas också α-fyllokinon och är liksom de övriga antihämorragiska vitaminerna ett naftokinonderivat:

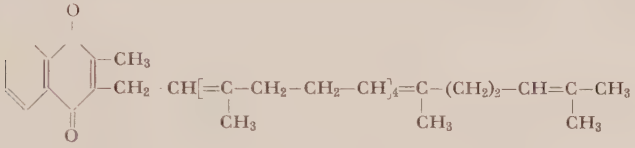


vitamin K_1

Vitaminet innehåller liksom vitamin E (och klorofyll) en fytolrest, här kopplad till en kinoid ring.

Vitamin K_2

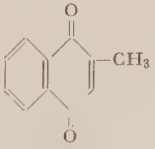
$C_{41}H_{56}O_2$, innehåller till skillnad från vitamin K_1 en squalenrest i st. f. fytyl:



vitamin K_2

Vitamin K_3

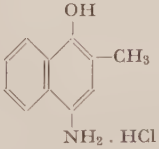
är ibland benämningen på 2-metyl-1,4-naftokinon, med 2—3 gånger större vitamin K-verkan än de naturligt förekommande vitaminerna (K_1 och K_2). Även 2-metyl-3-oxi-derivatet, som är det gula färgämnet *ftiokol* och som finns i tuberkelbacillens membran, har antihämorragisk verkan.



K_3

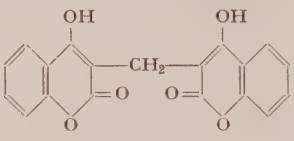
Vitamin K_5

har man kallat ett annat vitamin K-aktivt ämne, 2-metyl-1-oxi-4-aminonaftalinhydroklorid. Dess verkan är flera gånger större än vitamin K_1:s.



K_5

Även för vitamin K känner man en antivitamer, alltså en substans som kan framkalla K-avitaminos, i detta fall en genom hypoprotrombinemi framkallad blödning. Det gäller ett kumarinderivat,



3, 3′-metylen-bis(4-hydroxikumarin)

som förekommer i skämt sötklöverhö av Melilotus albus (sötklöversjuka hos nötboskap). Substansen har kallats AP (anti-protrombin) eller *dikumarol* och har med gott resultat använts mot tromboser (blodpropp).

Vitamin L_1 och L_2

äro två nödvändiga faktorer för den normala avsöndringen av mjölk eller laktationen. Härför synas även p-aminobenzoesyra och inosit vara viktiga. Vitamin L_1 förekommer i lever, vitamin L_2 i jäst. Deras kemi är helt okänd.

Vitamin M

eller mognadsfaktorn tillhör vitamin B_2-komplexet och förmår hindra uppkomsten av en svårartad anemiform, som går under namnet aleuki (cytopeni). Vitamin M-brist, vars mest utmärkande symptom är diarré, har främst studerats hos apor. Vitaminets kemi är ännu okänd, men det är mycket troligt, att det är identiskt med »folic acid» eller med »potential folic acid». Även xantopterin synes ha vitamin M-verkan.

Med succinylsulfatiazol har man kunnat framkalla leukopeni hos råttor, som mycket liknar närings-cytopenien (vid vitamin M-brist) hos apor. En rätt-antisuccinylsulfatiazolfaktor har man funnit i jäst och lever, och den är med stor sannolikhet identisk med vitamin M.

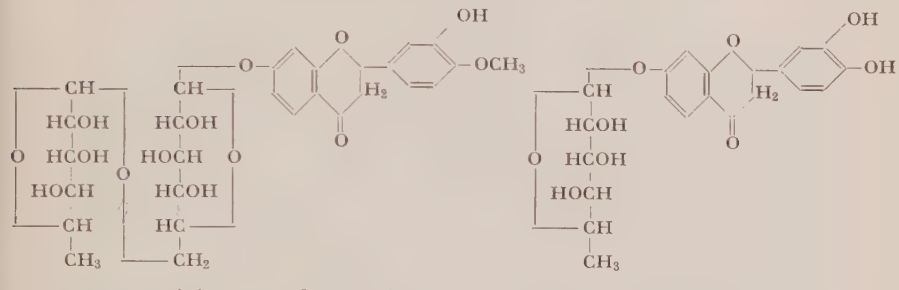
Vitamin N

är enligt MacDonald en cancer-förhindrande faktor i hjärna.

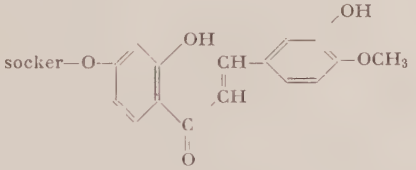
Vitamin P

permeabilitetsvitaminet, kallas också *citrin* på grund av sin förekomst i citroner och sin gula färg. Det är, trots kristallstrukturen, intet enhetligt ämne utan en isomorf blandning av två flavanonglykosider, *hesperidin* och *eriodiktin*; dessutom förekommer sanno-

likt i små mängder en flavanol-glykosid, quercitrin. Hesperidin, $C_{28}H_{34}O_{15}$, är en hesperetin-rutinosid (hesperetin-/l-ramnosido-d-glykos/). Eriodiktin, $C_{21}H_{22}O_{10}$, är till skillnad från hesperidin en lättlöslig glykosid av eriodiktyol (demetylerad hesperetin), vars glykosidrest enligt senaste forskningar är blott ramnos.



Även vitamin P ingår som prostetisk grupp i ett enzym, ett oxidationsreduktionsenzym. Den verksamma delen av vitaminet anses vara hesperidinchalkon. Chalkoner äro föreningar karakteriserade av gruppen: $C_6H_5—CO—CH=CH—C_6H_5$. Hesperidinchalkonen kan reversibelt överföras i flavanonglykosiden genom reduktion och ringslutning.



hesperidinchalkon

Faktor R

är en i jäst förekommande tillväxtfaktor för kyckling, som är nära besläktad med vitamin B_{10}.

Co-enzym R är, som nämnts, identiskt med biotin (vitamin H).

Faktor S

är också en tillväxtfaktor för kyckling, varom vi icke veta mycket mer. Den är till skillnad från faktor R fällbar med alkohol. För övrigt liknar den vitamin B_{11} och faktor U.

Vitamin T

är en i sesamolja och äggula förekommande faktor, vars avitaminossymptom är en minskning av antalet blodplättar (trombocyter; trombocytopeni).

Faktor U

är en tillväxtfaktor för kyckling, som förekommer i jäst och alfalfa. Den är eventuellt identisk med vitamin B_{11} och liknar mycket »folic acid», vitamin B_c och »eluat-faktorn» (Lactobacillus casei-faktorn).

Faktor V

är nödvändig för tillväxten av Hemophilus parainfluenzae, en influensabakterie. Det är en pyridinnukleotid, som kan syntetiseras ur nikotinsyra med hjälp av röda blodkroppar. Faktor V-verkan ha co-enzym I och II.

Faktor W

är identisk med vitamin B_w, som ingår i vitamin B_2-komplexet.

Vitamin X

har Evans kallat ett vitamin, som senare visade sig vara identiskt med vitamin E. Chicks och Coppings faktor X är sannolikt identisk med vitamin B_6.

Faktor Y

är vitamin B_6.

Faktor Z_1 och Z_2

äro två tillväxtstimulerande ämnen för Phycomycetes (algsvampar). De förekomma i jäst. Faktor Z_1 är identisk med biotin (vitamin H).

»Antistiffness»-faktor

är en för marsvin nödvändig faktor; brist därpå förorsakar »styvhet» i vristen (»wrist stiffness»). Den förekommer bl. a. i mjölk. Dess kemi är icke närmare känd. Molekylvikten anses ligga omkring 200.

Kemiska reaktionsformler. I—II.

Av LARS GUNNAR SILLÉN.

Sättet att uppfatta kemiska förlopp och skriva kemiska reaktionsformler skiftar från läroverk till läroverk i vårt land; den saken får man ett starkt intryck av, när man vid Stockholms Högskola varje år får läsa bortåt 200 inträdesskrivningar i kemi och sedan får följa 45—50 studenter årligen från deras första steg i de akademiska kemistudierna.

Skillnaderna komma särskilt fram, när det gäller reaktioner i lösning, där ju de senaste tre—fyra årtiondenas forskning har fört med sig genomgripande ändringar. Visserligen ha på senare tid dessa ändringar börjat inflyta i gymnasiets läroböcker, men många lärare, särskilt äldre som ha kemi till biämne, ha av helt naturliga skäl tvekat att övergå till begrepp, som de ej känna sig helt behärska. De ha därför föredragit att fasthålla vid det framställningssätt, som de lärde sig i sin ungdom.

Det är en viktig uppgift för universitet och andra högskolor att tillse, att de nya årskullarna av kemister få en såvitt möjligt tidsenlig uppfattning av kemiska förlopp. Samtidigt får man akta sig för att lära ut reaktionsläran som en samling trossatser. Studenterna böra framför allt få lära sig *varför*, på grund av vilka försök, man föredragit de nya begreppen. Då ha de lättare att förstå dem och även att följa med den vidare utveckling, som framtiden kan föra med sig.

Ju tidsenligare kemiundervisningen på gymnasiet blir, desto lättare blir denna högskolornas uppgift. Tyvärr har det hittills ofta varit så, att högskoleundervisningen måst börja med att riva ned en del av den grund, som skolan byggt upp. — De uppsatser, som nu följa, bygga till en del på de »omskolnings»-föreläsningar, som jag varje höst brukat hålla för den nya kemistårskullen på Stockholms Högskola. Kanske kunna de vara till hjälp för någon, som lärt sig kemi på det gamla sättet.

I. Starka elektrolyter.

Svante Arrhenius visade som bekant 1887 (Z. ph. Ch. *1*, 631), att elektrolyter i vattenlösning äro spjälkade i joner i betydligt högre grad än man dittills föreställt sig. Dissociationsgraden i en lösning

av en elektrolyt kunde enligt Arrhenius mätas på två helt skilda sätt: ur dess ledningsförmåga och ur dess »osmotiska» egenskaper (osmotiskt tryck, fryspunktsänkning, kokpunkthöjning m. m.); Arrhenius fann i allmänhet nästan samma värde på båda sätten, vilket föreföll vara ett gott stöd för teorin.

Det visade sig från början, att elektrolyter i allmänhet kunna föras till en av två huvudgrupper: 1) de *svaga* elektrolyterna, såsom CH_3COOH, visade sig vara ofullständigt spjälkade även i ganska utspädd lösning 2) för de *starka* elektrolyterna, såsom NaCl, fann man däremot en hög dissociationsgrad även vid höga halter, och i utspädda lösningar tycktes dissociationen i joner vara så gott som fullständig.

Under de närmaste årtiondena utfördes ett stort antal mätningar för att pröva Arrhenius' teori. Ostwald och Bredig kunde sålunda visa, att massverkans lag kan tillämpas på dissociationen av *svaga* elektrolyter. Ur de funna dissociationsgraderna kunde man nämligen beräkna dissociationskonstanter, t. ex. $\frac{(H^+)(Ac^-)}{(HAc)}$, som verkligen voro konstanta och oberoende av halten. Detta var ett ytterligare stöd för Arrhenius' uppfattning.

De starka elektrolyterna beredde å andra sidan bekymmer. Den »dissociationsgrad» man beräknade ur ledningsförmågan skilde sig ofta med åtskilliga procent från den man beräknat ur osmotiska mätningar; skillnaden bekräftades vid noggrannare mätningar och berodde alltså ej på försöksfel. Det beklagligaste var, att ingendera »dissociationsgraden» stämde med massverkans lag; sökte man t. ex. beräkna »dissociationskonstanten» $\frac{(K^+)(Cl^-)}{(KCl)}$, så fann man att den ändrade sig kraftigt med halten, ja med flera tiopotenser. De starka elektrolyterna blevo sålunda ett olöst problem för den äldre dissociationsteorin.

Från tiden omkring 1900 framfördes från åtskilliga håll, kraftigaste kanske av dansken Bjerrum[1], den tanken, att de *starka elektrolyterna* i själva verket äro *fullständigt spjälkade i joner*, och att de företeelser, som tillskrivits ofullständig dissociation, i verkligheten ha andra orsaker.

I synnerhet framhölls det, att man dittills försummat de starka *elektrostatiska krafter*, som måste råda mellan jonerna i en elektrolytlösning. Flera försök gjordes, det första av finlandssvensken Malmström, att beräkna hur dessa krafter påverka de osmotiska

[1] Bjerrum stödde sig på att optiska egenskaper (absorption, vridförmåga) hos lösningar av starka elektrolyter ofta äro rent proportionella mot halten, till skillnad från ledningsförmåga och osmotiska egenskaper.

egenskaperna och ledningsförmågan. Den första verkligt framgångsrika teorin var den, som 1923 framfördes av Debye och Hückel (Phys. Z. 24, 185, 305); jag skall här söka ge en antydan om dess innebörd.

Debye och Hückel förutsatte, att en lösning av en stark elektrolyt endast innehåller fria joner men inga molekyler. På grund av de elektrostatiska krafterna kommer det närmast omkring varje positiv jon att i medeltal finnas flera negativa än positiva joner, och tvärtom; varje jon är i tidsmedeltal omgiven av ett »moln» av motsatt laddning. Den som har svårt att göra sig en bild av detta tillstånd kan tänka på atomordningen i en kristall av NaCl; där har ju varje Na^+ till närmaste grannar sex Cl^-, och varje Cl^- är omgiven av sex Na^+. Ordningen i en lösning är dock ej på långt när så noggrann som i en kristall; i lösningen knuffas ju jonerna fram och tillbaka av sin egen och vattenmolekylernas värmerörelse.

Ju högre lösningens halt är, desto tätare ligga jonerna, och desto närmare kommer jonmolnet intill varje jon. Om nu ett elfält lägges genom lösningen, komma positiva joner att röra sig med fältet och negativa mot det. Varje jon hindras emellertid i sina rörelser av jonmolnet, som rör sig i motsatt riktning, och detta hinder blir större, ju högre halten är. Detta är orsaken till att ekvivalent*ledningsförmågan* hos starka elektrolyter blir lägre med stigande halt; några odissocierade molekyler bildas däremot ej.

På liknande sätt kan man förklara andra företeelser, som tidigare tillskrevos ofullständig dissociation, t. ex. avvikelser från idealformeln för *elektrodpotentialer* i lösningar av högre halt.

Då en silverstav neddoppas i en silvernitratlösning, inställer sig en sådan potentialskillnad mellan staven och lösningen, att det i genomsnitt är lika många silverjoner som fastna vid silverytan och uppta en elektron: $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$ som det är silveratomer i ytan, som avge en elektron och gå i lösning: $Ag \rightarrow Ag^+ + e^-$. Om silverjonhalten höjes, blir det fler joner som sträva mot stavens yta ur lösningen; jämvikten återställes genom att silverstavens potential blir mer positiv, varigenom Ag^+ från lösningen får svårare att nå fram — jonerna måste ta sig uppför en »potentialbacke» — medan joner lättare avstötas från ytan — de få ju utförsbacke. Ur villkoret för jämvikt kan man härleda Nernsts kända formel för elektrodpotentialen: $e = \text{konst.} + \frac{RT \ln 10}{F} \log(Ag^+)$.

Vid höga halter är emellertid elektrodpotentialen lägre än man beräknar ur Nernsts formel. Detta beror ej, såsom tidigare antogs, på att en del Ag^+-joner bli overksamma genom att de ingå i

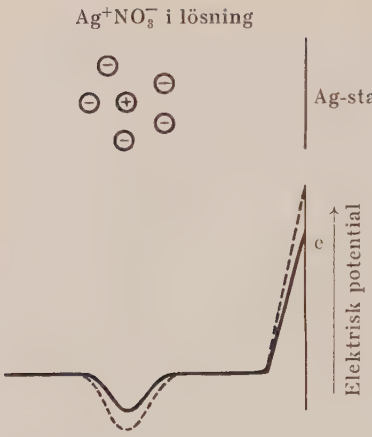


Fig. 1. En silvernitratlösning i beröring med en silverelektrod. Den undre bilden visar schematiskt för två olika halter potential»gropen» i jonmolnet omkring en silverjon och »backen» invid elektrodytan. Den streckade linjen svarar mot den högre halten.

$AgNO_3$-molekyler. Man kunde förklara saken så, att en Ag^+-jon i lösningen är omgiven av ett negativt NO_3^--moln och alltså befinner sig i ett område med lägre elektrisk potential än lösningen i genomsnitt, i en »potentialgrop». Innan en Ag^+ kan urladdas, måste den först taga sig upp ur gropen och sedan uppför backen (se fig.) vid elektroden. Då lösningens halt ökas, komma de negativa motjonerna närmare, och potentialgropen blir djupare; för att jämvikt skall nås, måste visserligen elektrodpotentialen e — backen — höjas, men ej så mycket som om fältet från motjonerna — gropen — ej hade funnits där. Det är denna grop, som försummats i Nernsts formel.

Här är ej platsen att gå in på de förbättringar av Debyes och Hückels teori, som senare försökts, eller på hur den prövats genom försök. Vare nog sagt, att grundtanken, att *starka elektrolyter äro fullständigt spjälkade i joner*, har slagit igenom i alla ledande vetenskapliga skolor. Ingen vederhäftig forskare söker numera finna dissociationsgraden för t. ex. saltsyra ur mätningar av ledningsförmåga och fryspunkt.

Vilka elektrolyter äro nu starka? Dit höra: 1) de flesta oorganiska salter, Na^+Cl^-, $K_2^+SO_4^{2-}$, $Ca^{2+}(NO_3^-)_2$ osv. 2) ett stort antal organiska salter, isynnerhet sådana vars ena jon är oorganisk: $Na^+OCOCH_3^-$, $C_6H_5NH_3^+Cl^-$ osv., 3) hydroxider av alkali- och jordalkalimetaller: Na^+OH^-, $Ca^{2+}(OH^-)_2$ osv.

Dessa ämnen bilda alltså inga oladdade molekyler NaCl osv. i lösning; även de fasta ämnena innehålla, såsom man kan visa med röntgenkristallografiska metoder, inga molekyler utan endast joner, t. ex. Na^+ och Cl^-. Med utgangspunkt från denna egenskap har man definierat ett *salt* såsom ett fast ämne, som är uppbyggt av joner, vilka kunna frigöras genom upplösning. Enligt denna nya definition äro tydligen även hydroxiderna i grupp 3) salter.

(Att de ej äro baser i nutida mening skall klarläggas i den tredje uppsatsen i denna serie).

4) Även starka syror, såsom HCl, H_2SO_4 och $HClO_4$, innehålla praktiskt taget endast joner, om man undantar mycket höga halter, där halten av oladdade molekyler blir märkbar. Vid halter under 1 C kan man i allmänhet med gott samvete bortse från halten av oladdade molekyler. Den positiva jonen är här H^+ med växlande vattenhölje, stundom skriven H_3O^+.

Om man vill ge ett riktigt uttryck för vad som händer vid ett förlopp i vattenlösning, bör man ej skriva starka elektrolyter som oladdade molekyler utan i stället föra in de fria jonerna. Fasta salter brukar man dock teckna med »oladdade» formler, gärna med tillägget (s)[1]: NaCl(s), $BaSO_4$(s). Å andra sidan har man i många fall bland utgångs- eller slutämnena oladdade molekyler såsom H_2O, $HgCl_2$ eller CH_3COOH; dessa böra i så fall ej i onödan delas upp i joner.

När man slår samman lösningar av silvernitrat och natriumklorid, utfaller silverklorid, vilket man tidigare tecknat

$$NaCl + AgNO_3 = NaNO_3 + AgCl.$$

Samtliga salter äro emellertid starka elektrolyter. Man bör alltså hellre skriva

$$Na^+ + Cl^- + Ag^+ + NO_3^- \rightarrow Na^+ + NO_3^- + AgCl(s).$$

(När det gäller kemiska förlopp, som gå i en bestämd riktning, bör en pil $\rightarrow$ föredras framför ett likhetstecken $=$. Det är ju inte alls samma sak som står till höger och till vänster om tecknet).

Man ser genast, att jonerna Na^+ och NO_3^- ej ha ändrats; de äro hela tiden fria och ha blott varit åskådare till den verkliga reaktionen, som är

$$Ag^+ + Cl^- \rightarrow AgCl(s).$$

Den riktiga reaktionsformeln för fällning av bariumsulfat lyder på samma sätt

ej $\quad BaCl_2 + Na_2SO_4 = 2NaCl + BaSO_4$

utan $\quad Ba^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow BaSO_4(s).$

Då man sätter ammoniak i överskott till en kopparsulfatlösning, blir lösningen djupblå. Formeln är

ej $\quad CuSO_4 + 4\,H_4NOH = Cu(NH_3)_4SO_4 + 4\,H_2O$

utan $\quad Cu^{2+} + 4\,NH_3 \rightarrow Cu(NH_3)_4^{2+}$

eller ännu riktigare

$$Cu(H_2O)_4^{2+} + 4NH_3 \rightarrow Cu(NH_3)_4^{2+} + 4H_2O.$$

[1] = solidus, fast. Jämför l = liquidus, flytande; g = gas

En lösning av järn(III)klorid eller ett annat järn(III)salt ger med små mängder rodanid en stark röd färg. Formeln är

ej $\quad FeCl_3 + 3\,NaSCN = 3\,NaCl + Fe(SCN)_3$
ej heller $\quad FeCl_3 + 6\,NaSCN = 3\,NaCl + Na_3Fe(SCN)_6$
utan $\quad Fe^{3+} + SCN^- \rightarrow FeSCN^{2+}$

och vid större rodanjonhalter även

$$FeSCN^{2+} + SCN^- \rightarrow Fe(SCN)_2^+.$$

Man har visat att det i första hand är dessa positiva komplexjoner, som ge den röda färgen.

Även i saltsmältor finnas fria joner. Uppslutning av bariumsulfat med sodasmälta kan alltså skrivas

$$BaSO_4(s) + CO_3^{2-} \rightarrow BaCO_3(s) + SO_4^{2-}.$$

Även redox- och syrabasförlopp böra skrivas i jonform. Här följa några exempel; dylika förlopp behandlas utförligare i senare uppsatser:

Ej $\quad Fe_2(SO_4)_3 + 2\,KJ = 2\,FeSO_4 + K_2SO_4 + J_2$
utan $\quad Fe^{3+} + J^- \rightarrow Fe^{2+} + \frac{1}{2}J_2.$

Ej $\quad NaOH + HCl = NaCl + H_2O$
utan $\quad H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$ eller $H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2\,H_2O.$

Fj $\quad Na_2CO_3 + 2\,H_2O = 2\,NaOH + H_2CO_3$
utan $\quad CO_3^{2-} + H_2O \rightarrow HCO_3^- + OH^-.$

Lägg märke till att vid jonformler högra och vänstra ledet alltid skola innehålla dels lika manga atomer av varje slag, dels samma sammanlagda laddning.

Att skriva lösningsförlopp i jonform är ej något slags teoretiskt snobberi utan beröring med experimentalkemin. Jonformlerna ha två väsentliga fördelar framför de äldre »oladdade» formlerna. För det första äro de i allmänhet *kortare*: de joner, som blott äro »åskådare» ha borttagits. För det andra äro de *riktigare*: de ange vilka molekyl- och jonslag som verkligen försvinna och bildas. De ge därför ett bättre grepp på jämviktsförhållandena. *Massverkans lag kan tillämpas på jonformlerna*, men ej på de äldre oladdade formlerna, när det gäller förlopp med starka elektrolyter. — Det har visat sig, att studenterna ha mycket svårt att reda upp löslighets- och syrabasjämvikter, innan de lärt sig att tänka i jonform.

Nu säger säkert en och annan: Hittills har man lärt sig, att dissociationskonstanten $\frac{(Ag^+)(Cl^-)}{(AgCl)} = \text{konst.}$ i en AgCl-lösning. I en

mättad lösning är vidare (AgCl) = konst., och alltså $(Ag^+)(Cl^-)$ = en konstant, löslighetsprodukten. — Om det nu inte finns några AgCl-molekyler, så är tydligen detta »bevis» meningslöst, men hur skall man då härleda lagen om löslighetsprodukten?

Först och främst bör man lära ut som en allmän minnesregel, att när massverkans lag skall tillämpas på jämvikter med rena fasta ämnen, bortfalla termerna för dessa, t. ex.

$$CO_2 + C = 2\,CO,\ K = \frac{(CO)^2}{(CO_2)};\ CaCO_3 = CaO + CO_2,\ K = (CO_2)$$

$$AgCl(s) = Ag^+ + Cl^-,\ K = (Ag^+)(Cl^-).$$

Den termodynamiska härledningen av denna regel (Elementa 25, 27, 1942) är kanske för besvärlig för skolstadiet. En förenklad kinetisk härledning bör däremot ej vara mycket svårare än den kinetiska behandling av gasjämvikter, som förekommer i gymnasiekursen.

Vi betrakta först »gengasjämvikten» $CO_2 + C = 2\,CO$. En viss yta A cm² av kol(grafit) tänkes stå i beröring med en gas, som innehåller CO och CO_2; dessa molekylslag hamra alltså hela tiden mot ytan. Antalet C-atomer, som på 1 sek reagerar med CO_2-molekyler till CO, bör vara proportionellt mot antalet infallande CO_2-molekyler och alltså mot (CO_2) samt mot ytans storlek A; vi anta att detta antal är $k_1A(CO_2)$. Antalet C-atomer som tillföras ytan på 1 sek genom det omvända förloppet kunna vi anta proportionellt mot sannolikheten för att 2 CO skola sammanstöta på ytan, dvs. mot $(CO)^2$ och mot A; vi anta att det är $k_2A(CO)^2$. Vid jämvikt skall antalet kolatomer i genomsnitt ej ändras, dvs. $k_1A(CO_2) = k_2A(CO)^2$, alltså $\frac{(CO)^2}{(CO_2)} = \frac{k_1}{k_2} = K$.

Detta bevis kan, med vissa ändringar, även tillämpas på förloppet $AgCl(s) = Ag^+ + Cl^-$. Antalet Ag^+ och Cl^--joner, som genom värmerörelsen skaka loss från en yta A cm² av en AgCl-kristall skall i genomsnitt vara lika stort som antalet av de långsamma joner, som kristallen infångar ur lösningen.

Lösningen innehåller i allmänhet ej lika många Ag^+ som Cl^- — det finns ju ofta även andra joner närvarande, varigenom den ändock blir oladdad. Om lösningen t. ex. innehåller fler Cl^- än Ag^+, omger sig kristallen med ett adsorberat skikt av Cl^--joner, som göra dess potential negativ mot lösningen. Härigenom blir det för Cl^--jonerna svårare att nå kristallen från lösningen men lättare att gå från kristall till lösning. För Ag^+-jonerna blir det tvärtom lättare att nå kristallen men svårare att lämna den.

Om intet adsorberat jonskikt funnes, skulle, anta vi, på 1 sek lossna $k_1A\,Ag^+$ och $k_1A\,Cl^-$ från ytan A cm²; å andra sidan skulle

samtidigt $k_2A(Ag^+)$ silverjoner och $k_2A(Cl^-)$ kloridjoner tillföras kristallen från lösningen. Genom hjälpen eller hindret från jonskiktet kommer vart och ett av dessa tal att multipliceras med eller divideras med en och samma faktor, som vi kalla b.[1] På 1 sek lossna alltså $\frac{k_1A}{b}$ Ag^+ och bk_1A Cl^-, medan $bk_2A(Ag^+)$ Ag^+ och $\frac{k_2A}{b}(Cl^-)$ Cl^- fastna på kristallytan A. Jämviktsvillkoret blir

$$\frac{k_1A}{b} = bk_2A(Ag^+) \text{ och } bk_1A = \frac{k_2A}{b}(Cl^-),$$

varur

$$(Ag^+)(Cl^-) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \text{konst.}^2$$

Om även denna förenklade härledning skulle vara för svår för skolstadiet, så är i varje fall en utantillregel utan härledning att föredraga framför den äldre härledningen, som bygger på felaktiga förutsättningar.

De flesta joner ha som bekant i vattenlösning ett hölje av vattenmolekyler. I många fall tar jonen med sig detta hölje in i kristaller, där höljets storlek och form kan fastläggas med röntgenmetoder: $Mg(H_2O)_6^{2+}$, $Cu(H_2O)_4^{2+}$, $Al(H_2O)_6^{3+}$. I andra fall kan man uppskatta höljets storlek ur vissa mätningar av överföring och ledningsförmåga. Höljet kring Na^+ har sålunda med olika metoder uppskattats till 4—8 H_2O. Finbak (Tidsskr. Kjemi Bergves. 3, 40, 1943) har nyligen ur röntgenmätningar på vattenlösningar funnit ytterligare stöd för den uppfattningen att »vätejoner» i vattenlösning finnas som komplex med växlande antal vattenmolekyler: H_3O^+, $H_5O_2^+$, $H_7O_3^+$ osv., och att likaså OH^--joner dra till sig vatten så att $O_2H_3^-$, $O_3H_5^-$ osv. bildas.

Skall man nu taga med detta vattenhölje i formlerna, alltså skriva $Al(H_2O)_6^{3+}$, $Na(H_2O)_{4-8}^+$, $H_{2n+1}O_n^+$, $O_nH_{2n-1}^-$ osv.? I vissa fall är det lämpligt; när man skall förklara, varför en vattenlösning av Al^{3+} är sur, bör sålunda vattenhöljet skrivas ut (se del III). Men i allmänhet har man ingen anledning att släpa med vattenhöljet i formlerna, ehuru man bör känna till att det finns där. Man kan alltså med lugnt samvete skriva de kortare formlerna Al^{3+}, Na^+, H^+, OH^-.

[1] $b = \exp.\left(-\frac{F\Delta\varphi}{RT}\right)$, där $\Delta\varphi$ = potentialhöjningen genom jonskiktet i detta fall är negativ.

[2] Vid högre halter måste jonernas halter i formeln ersättas med deras aktiviteter.

Det sagda gäller för sådana lösningar, där vatten finns i överskott som lösningsmedel. I lösningar, där det är ont om vatten, bör ett eventuellt vattenhölje skrivas ut. Om man till 100 % svavelsyra sätter litet vatten, så reagerar det enligt Hantzschs fryspunktsmätningar (Z. ph. Ch. *61*, 306, 1908) helt och hållet enligt formeln $H_2O + H_2SO_4 \rightarrow H_3O^+ + HSO_4^-$. Här bör man skriva H_3O^+ och ej H^+; jonerna ha förmodligen ett hölje av svavelsyremolekyler, men detta skriver man ej ut.

I mycket höghaltiga lösningar av starka elektrolyter kunna jonerna bilda »paket» eller »flockar» på två, tre eller flera joner. »Molekyler» kan man ej kalla dessa jonflockar, där f. ö. vattenhöljet torde ligga som en kudde mellan jonerna. Flockbildningen har intet samband med de »dissociationsgrader» som mätts med äldre metoder. I andra lösningsmedel än vatten kan flockbildningen vara betydande.

Det bör kanske tilläggas, att komplex bildas i lösningar av vissa tungmetallsalter: Hg^{2+} och Cl^- bilda sålunda $HgCl^+$, $HgCl_2$, $HgCl_3^-$ och $HgCl_4^{2-}$; Cd^{2+} och J^- bilda CdJ^+, CdJ_2, CdJ_3^- och CdJ_4^{2-}. Tidigare ansågs det, att när en CdJ_2-kristall upplöses, frigöras först CdJ_2-molekyler, som sedan reagera enligt formeln $2\,CdJ_2 = Cd^{2+} + + CdJ_4^{2-}$, för vilket förlopp man infört det klingande namnet autokomplexbildning. I själva verket finnas inga CdJ_2-molekyler i kristallen utan blott joner Cd^{2+} och J^-.[1] Det är därför naturligare att tänka sig att när kristallen upplöses, frigöras Cd^{2+} och J^-, som sedan bilda komplexen från CdJ^+ till CdJ_4^{2-} i en omfattning, som beror på lösningens sammansättning. Den oladdade CdJ_2 intar ingen särställning, den är blott ett i raden av komplex.

I många fall uppträder en komplexjon som fast enhet både i kristall och i lösning. Man bör då redan i saltets namn ange, att man har med komplex att göra. (Se 1940 års överenskommelse om namn på oorganiska föreningar, Ber *73 A*, 53, 1940, JACS *63*, 889, 1941, Svensk kem. tidskrift *55*, 55, 1943). Sålunda heter K_2PtCl_6 kalium(hexa)kloroplatinat och ej kaliumplatinaklorid, K_2PbCl_6 kaliumkloroplumbat och ej kaliumbly(IV)klorid, $K_3Co(NO_2)_6$ kaliumnitritokoboltat och ej kaliumkoboltnitrit, $KAg(CN)_2$ kaliumcyanoargentat och ej kaliumsilvercyanid, ty salterna innehålla komplexjonerna $PtCl_6^{2-}$, $PbCl_6^{2-}$, $Co(NO_2)_6^{3-}$ och $Ag(CN)_2^-$ och ej Pt^{4+} och Cl^- osv. Däremot bör man kalla $KMgCl_3$ kaliummagnesiumklorid och $KAl(SO_4)_2$ kaliumaluminiumsulfat, ty i dessa salter finnas tre olika fria jonslag.

[1] Hos $HgCl_2$ kan man däremot i kristallen iakttaga en viss strävan till molekylbildning: varje Hg är omgiven av 6 Cl, av vilka två ligga något närmare än de övriga.

Salterna $K_4Fe(CN)_6$ och $K_3Fe(CN)_6$ böra rätteligen heta kaliumcyanoferrat(II) och kaliumcyanoferrat(III). Den som har svårt för dessa namn bör i varje fall hellre använda formeln eller vardagsnamnen gult och rött blodlutsalt än de oriktigt bildade »systematiska» namnen kaliumferrocyanid och kaliumferricyanid.

II. Redoxförlopp.

Frågan hur man skall ställa upp reaktionsformler för redoxförlopp har behandlats i Elementa av adjunkt Kjell Runquist (*27*, 30) och lektor Bertil Englund (*28*, 74). Båda ha utgått från begreppet *valenstal*, sådant det definieras av t. ex. Nylén och Wigren (femte uppl., s. 12). Runquist visar hur detta begrepp kan tillämpas på några enklare organiska redoxförlopp och ger ett par räkneregler, kallade M- och N-regeln. — Englund påpekar efter vissa smärre anmärkningar, att det ofta är svårt att tilldela atomerna valenstal i föreningar med elektronparsbindning, framför allt i organiska ämnen. Han söker därför efter regler för hur man även i sådana föreningar skall kunna tilldela atomer och atomgrupper bestämda valenstal.

Vid undervisningen vid Stockholms Högskola har jag sedan något år prövat ett sätt att härleda redoxformler, som kan tillämpas även där man är tveksam om valenstalen. Då detta sätt synes vara lätt att inlära och kan tillämpas på snart sagt alla redoxförlopp, kan det kanske vara av intresse för några av Elementas läsare.

Först vill jag påminna om grundbegreppen. Den äldre definitionen (Lavoisier) säger ju att ett ämne oxideras, när syre tillföres och reduceras, när syre bortföres. Denna definition har befunnits vara för trång: den omfattar sålunda ej överförandet av $FeCl_2$ till $FeCl_3$ eller av Cu till $CuCl_2$, ehuru dessa förlopp för den kemiska känslan äro likartade med överförandet av FeO till Fe_2O_3 och Cu till CuO.

Den numera gängse definitionen lyder: *reduktion är tillförsel av elektroner, oxidation är bortförsel av elektroner.* Eftersom fria elektroner ej kunna hopas vid kemiska försök, måste alltid en oxidation försiggå samtidigt med en reduktion. Ett sådant sammankopplat förlopp — ett elektronbyte — kallas ett *redoxförlopp*:

Red	Ox	Redoxförlopp
$Cl_2+2e^- \rightarrow 2Cl^-$	$2(Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+}+e^-)$	$2Fe^{2+}+Cl_2 \rightarrow 2Fe^{3+}+2Cl^-$
$2H^++2e^- \rightarrow H_2$	$Zn \rightarrow Zn^{2+}+2e^-$	$Zn+2H^+ \rightarrow Zn^{2+}+H_2$
$\frac{1}{2}O_2+2e^- \rightarrow O^{2-}$	$Mg \rightarrow Mg^{2+}+2e^-$	$Mg+\frac{1}{2}O_2 \rightarrow MgO$
$2(Fe^{3+}+e^- \rightarrow Fe^{2+})$	$Sn^{2+} \rightarrow Sn^{4+}+2e^-$	$2Fe^{3+}+Sn^{2+} \rightarrow 2Fe^{2+}+Sn^{4+}$
$2(MnO_4^-+8H^++5e^- \rightarrow Mn^{2+}+4H_2O)$	$5(C_2O_4^{2-} \rightarrow 2CO_2+2e^-)$	$2MnO_4^-+5C_2O_4^{2-}+16H^+ \rightarrow 2Mn^{2+}+10CO_2+8H_2O$

Vartdera delförloppet kan skrivas i den allmänna formen

$$\text{oxform} + n\,e^- \underset{\text{ox}}{\overset{\text{red}}{\rightleftharpoons}} \text{redform},$$

där »redform» och »oxform» stå för ett reducerat och ett oxiderat tillstånd av samma atom(er). Redform och oxform (redtillstånd och oxtillstånd) kallas tillsamman ett *redoxpar* (redoxsystem). Redoxpar äro alltså $Cl^- - Cl_2$; $Fe^{2+} - Fe^{3+}$; $Zn - Zn^{2+}$; $H_2 - H^+$; Mn^{2+}, $H_2O - MnO_4^-$, H^+ osv. Vi lägga ovan märke till att ett och samma redoxpar ibland reduceras, ibland oxideras (se $Fe^{2+} - Fe^{3+}$) och att även väte och syre bilda var sitt redoxpar.

När man skall härleda formeln för ett redoxförlopp, är den första regeln, att man skall *dela upp det* i de två delförloppen och *ställa upp formeln för varje delförlopp för sig.* När väl detta är gjort, är det ingen svårighet att förena dem i sådant mängdförhållande, att elektronerna i slutformeln taga ut varandra (se ovanstående exempel).

När delförloppet blott innebär att en atom eller atomgrupp byter laddning, har man blott att tillfoga så många elektroner, att båda sidor av formeln få samma laddning:

$$Sn \rightarrow Sn^{2+} + 2e^-$$
$$Fe(CN)_6^{4-} \rightarrow Fe(CN)_6^{3-} + e^-$$
$$MnO_4^- + e^- \rightarrow MnO_4^{2-} \qquad \text{osv.}$$

Svårare är det att ställa upp formeln, när t. ex. MnO_4^- reduceras till Mn^{2+} i sur lösning. Hur skall man i dylika fall göra formeln fullständig? Regeln för vattenlösningar lyder, att *formeln skall fås att stämma med hjälp av elektroner, vatten och dess joner,* alltså i sur lösning med H_2O, H^+ och e^-, i alkalisk lösning med H_2O, OH^- och e^-.

Sur lösning. Som första exempel betrakta vi reduktion av nitrobensol i sur lösning, varvid aniliniumjon bildas:

$$C_6H_5NO_2 \rightarrow C_6H_5NH_3^+ \qquad \text{(C, N stämmer).}$$

I denna formel stämmer antalet C och N men varken antalet O och H eller laddningen. Den skall nu utfyllas med lämpligt antal H_2O, H^+ och e^-. Vi betrakta först syreatomerna: Till vänster ha vi 2 O för mycket, och det enda av tillsatsämnena, som innehåller O, är H_2O. Vi måste tydligen tillfoga $2\,H_2O$ till höger:

$$C_6H_5NO_2 \rightarrow C_6H_5NH_3^+ + 2H_2O \qquad \text{(O stämmer).}$$

Denna formel innehåller 7 H mer till höger än till vänster; vi tillfoga $7\,H^+$ till vänster:

$$C_6H_5NO_2 + 7H^+ \rightarrow C_6H_5NH_3^+ + 2H_2O \qquad \text{(H stämmer).}$$

Nu är det blott laddningen i de båda leden, som ej stämmer; den utjämnas med 6 e^- till vänster:

$$C_6H_5NO_2 + 7H^+ + 6e^- \rightarrow C_6H_5NH_3^+ + 2H_2O \quad \text{(laddning stämmer).}$$

Detta är den sökta formeln för redförloppet. Om reduktionen skett genom elektrolys, ha verkligen fria elektroner tillförts genom katoden, och formeln anger katodförloppet. Har reduktionen skett med hjälp av Sn, som samtidigt oxideras till Sn^{2+}, får man lägga till oxformeln

$$3(Sn \rightarrow Sn^{2+} + 2e^-).$$

Ytterligare några tillämpningar må anföras.
Etanol oxideras till acetaldehyd:

$C_2H_5OH \rightarrow CH_3CHO$	(C, O stämmer).
$+ 2H^+$	(H »).
$+ 2e^-$	(laddn. »).
$C_2H_5OH \rightarrow CH_3CHO + 2H^+ + 2e^-$	

Oxalat oxideras till koldioxid:

$C_2O_4^{2-} \rightarrow 2CO_2$	(C, O stämmer).
$+ 2e^-$	(laddn. »).
$C_2O_4^{2-} \rightarrow 2CO_2 + 2e^-$	

Salpetersyra reduceras till hydroxylammoniumjon

$HNO_3 \rightarrow NH_3OH^+$	(N stämmer).
$+ 2H_2O$	(O »).
$+ 7H^+$	(H »).
$+ 6e^-$	(laddn. »).
$HNO_3 + 7H^+ + 6e^- \rightarrow NH_3OH^+ + 2H_2O$	

Permanganat reduceras till mangan(II)jon

$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+}$	(Mn stämmer).
$+ 4H_2O$	(O »).
$+ 8H^+$	(H »).
$+ 5e^-$	(laddn. »).
$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$	

Bikromat reduceras till krom(III)jon

$Cr_2O_7^{2-} \rightarrow 2Cr^{3+}$	(Cr stämmer).
$+ 7H_2O$	(O »).
$+ 14H^+$	(H »).
$+ 6e^-$	(laddn. »).
$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$	

I de två sista fallen kunde man även ha utgått från ändringen i valenstal, som omedelbart ger elektronantalet, och sedan fyllt i formeln med H_2O och H^+.

I *alkalisk lösning* skola red- och oxformlerna utfyllas med hjälp av H_2O, OH^- och e^-. I några fall kan man omedelbart skriva ned formeln:

$$Zn + 3OH^- \rightarrow Zn(OH)_3^- + 2e^-$$
$$Al + 4OH^- \rightarrow Al(OH)_4^- + 3e^-$$
$$Fe + 3OH^- \rightarrow Fe(OH)_3 + 3e^-$$

Om valenstalet lätt kan härledas, kan man förfara på följande sätt:

$$\begin{array}{lll} (+7) \quad (+4) & & \\ MnO_4^- \rightarrow MnO_2 & & \text{(Mn stämmer).} \\ + 3e^- & & \text{(valens »).} \\ \quad + 4OH^- & & \text{(laddn. »).} \\ + 2H_2O & & \text{(H, O »).} \\ \hline MnO_4^- + 2H_2O + 3e^- \rightarrow MnO_2 + 4OH^- & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (+3) \quad (+6) & & \\ Cr(OH)_3 \rightarrow CrO_4^{2-} & & \text{(Cr stämmer).} \\ \quad + 3e^- & & \text{(valens »).} \\ + 5OH^- & & \text{(laddn. »).} \\ \quad + 4H_2O & & \text{(H, O »).} \\ \hline Cr(OH)_3 + 5OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e^- & & \end{array}$$

I invecklade fall är kanske den enklaste allmängiltiga metoden att man först skriver formeln *som om* förloppet skedde *i sur lösning* — dvs. utjämnar med H_2O, H^+ och e^- — och sedan överför den till alkalisk form.

Toluol oxideras till bensoat:

$$\begin{array}{lll} C_6H_5CH_3 \rightarrow C_6H_5COO^- & & \text{(C stämmer).} \\ + 2H_2O & & \text{(O »).} \\ \quad + 7H^+ & & \text{(H »).} \\ \quad + 6e^- & & \text{(laddn. »).} \\ \hline C_6H_5CH_3 + 2H_2O \rightarrow C_6H_5COO^- + 7H^+ + 6e^- & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7H^+ + 7OH^- \rightarrow 7H_2O & \text{(H}^+\text{ bort).} \\ \hline C_6H_5CH_3 + 7OH^- \rightarrow C_6H_5COO^- + 5H_2O + 6e^- & \end{array}$$

redformel t. ex. $2(MnO_4^- + 2H_2O + 3e^- \rightarrow MnO_2 + 4OH^-)$.

Vätejonerna avlägsnas alltså ur formeln genom att man tillfogar motsvarande mängd OH^-joner.

Nitrobensol reduceras till hydrazobensol:

$$2C_6H_5NO_2 \rightarrow C_6H_5NHNHC_6H_5 \quad \text{(C, N stämmer).}$$
$$+ 4H_2O \quad \text{(O »).}$$
$$+ 10H^+ \quad \text{(H »).}$$
$$+ 10e^- \quad \text{(laddn. »).}$$
$$10H_2O \rightarrow 10H^+ + 10OH^- \quad (H^+ \text{ bort}).$$
$$2C_6H_5NO_2 + 6H_2O + 10e^- \rightarrow C_6H_5NHNHC_6H_5 + 10OH^-$$

oxformel t. ex. $5(Zn + 3OH^- \rightarrow Zn(OH)_3^- + 2e^-)$.

Nitrat reduceras till ammoniak

$$NO_3^- \rightarrow NH_3 \quad \text{(N stämmer).}$$
$$+ 3H_2O \quad \text{(O »).}$$
$$+ 9H^+ \quad \text{(H »).}$$
$$+ 8e^- \quad \text{(laddn. »).}$$
$$9H_2O \rightarrow 9H^+ + 9OH^- \quad (H^+ \text{ bort}).$$
$$3(NO_3^- + 6H_2O + 8e^- \rightarrow NH_3 + 9OH^-)$$

oxformel t. ex. $8(Al + 4OH^- \rightarrow Al(OH)_4^- + 3e^-)$.

Ofta är det enklast att bortskaffa H ur formeln först sedan man sammanslagit red- och ox-förloppen:
Etanol och hypojodit ge jodoform, formiat och jodidjon

ox: $C_2H_5OH + 3J^- \rightarrow HCOO^- + CHJ_3$ (C, J stämmer).
$+ H_2O$ (O »).
$+ 6H^+$ (H »).
$+ 8e^-$ (laddn. »).

4×red: $4JO^- + 8H^+ + 8e^- \rightarrow 4J^- + 4H_2O$
$2H_2O \rightarrow 2H^+ + 2OH^-$ (H^+ bort).

$$C_2H_5OH + 4JO^- \rightarrow CHJ_3 + HCOO^- + H_2O + 2OH^- + J^-$$

Det sätt att härleda redoxformler, som här beskrivits, kan tydligen tillämpas oberoende av alla antaganden om valenstal. Därmed vill jag emellertid på intet sätt söka minska användningen av begreppet valenstal, som är ett utmärkt hjälpmedel för det kemiska tänkandet i stora delar av den oorganiska kemin.

Läsaren kan själv öva sig på att ställa upp formler för överföring av NO_3^- till NO i sur lösning, av Cl_2 till ClO_3^- i alkalisk lösning och av SO_2 till SO_4^{2-} i sur och alkalisk lösning.

Väte och syre. Man har tidigare i regel skrivit redoxformler som om fritt syre eller väte deltoge i förloppen, och man har i vissa fall antagit, att dessa grundämnen förekomme som mellanled i en särskilt aktiv, »nascerande» form. Vid reduktion av nitro-

bensol med tenn i sur lösning antog man sålunda, att »nascerande väte» eller väteatomer inginge som mellanled. Man vet emellertid så litet om vilka mellanled som verkligen uppträda, att det alltid är säkrast att hålla sig till de ganska hypotesfria formler som ovan givits; de innehålla blott utgångs- och slutämnen, som verkligen kunna påvisas, i det nämnda fallet Sn och Sn^{2+}.

I de fall, när verkligen vätgas eller syrgas uppträder vid redoxförlopp i lösning, lyda redformlerna:

Sur lösning: $H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2$; $\frac{1}{2}O_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2O$.
Alkalisk lösning: $H_2O + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2 + OH^-$; $\frac{1}{2}O_2 + H_2O + 2e^- \rightarrow 2OH^-$.

Oxformlerna fås som vanligt genom omvändning av redformlerna.

Elektrodförlopp. Vid elektrolys ske red- och oxförlopp visserligen samtidigt men på olika ställen: reduktion vid katoden, oxidation vid anoden. (I galvaniska celler, där poltecknen räknas efter den *yttre* strömmens riktning, sker red vid pluspolen, ox vid minuspolen).

I många fall innebär elektrodförloppet, att en jon, såsom Cu^{2+}, Ag^+ eller Cl^- urladdas. Man har tidigare trott (och tror på många håll ännu) att ett elektrolysförlopp alltid »primärt» börjar med urladdning av joner: anjoner vid anoden och katjoner vid katoden. I många fall fann man emellertid, att de joner, som skulle ha urladdats, kvarstannade i lösningen, medan man kunde påvisa en nybildning av joner: av katjoner vid anoden och anjoner vid katoden. Detta tillskrev man »sekundära» elektrodförlopp. Nedan skall visas, att detta tänkesätt ofta leder till onödigt invecklade formler.

Då kopparsulfat elektrolyseras mellan kopparelektroder, urladdas Cu^{2+} vid katoden

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu.$$

Om anodförloppet har man föreställt sig, att SO_4^{2-} urladdas och bildar en oladdad förening SO_4, som sedan »sekundärt» angriper kopparn under bildning av $CuSO_4$; slutligen joniseras detta salt:

$$SO_4^{2-} = SO_4 + 2e^-;\ SO_4 + Cu = CuSO_4;\ CuSO_4 = Cu^{2+} + SO_4^{2-}$$

Förloppet kan emellertid skrivas mycket enklare. Om man stryker de ämnen, som komma tillbaka, så återstår blott

$$Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^-.$$

Koppar går alltså i lösning, vilket är omvändningen av katodförloppet. Sulfatjonerna torde i själva verket aldrig delta i elektrodförloppet; deras uppgift är blott att leda ström genom lösningen.

Motsvarande gäller för elektrolys av silvernitratlösning med silveranod. Förloppet är

ej $NO_3^- = NO_3 + e^-$; $NO_3 + Ag = AgNO_3$;
$AgNO_3 = Ag^+ + NO_3^-$

utan $Ag \rightarrow Ag^+ + e^-$.

När ett Na^+-salt elektrolyseras med Pt-katod, har man antagit att natriummetall först utfaller på katoden och sedan angriper vattnet. Väteutvecklingen börjar emellertid redan vid betydligt lägre potential än som skulle behövas för att frigöra Na. Sannolikare är, att vattnet direkt sönderdelas vid katoden. Förloppet är alltså

ej $Na^+ + e^- = Na$; $Na + H_2O = NaOH + \frac{1}{2}H_2$;
$NaOH = Na^+ + OH^-$

utan $H_2O + e^- \rightarrow OH^- + \frac{1}{2}H_2$

eller i sur lösning $H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2$.

Detsamma gäller för vattensönderdelning vid en Pt-anod i t. ex. svavelsyra. Förloppet är där

ej $SO_4^{2-} = SO_4 + 2e^-$; $SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + \frac{1}{2}O_2$;
$H_2SO_4 = 2H^+ + SO_4^{2-}$

utan $H_2O \rightarrow 2H^+ + \frac{1}{2}O_2 + 2e^-$,

eller i alkalisk lösning $2OH^- \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2 + 2e^-$.

Enligt LeBlanc (Z. ph. Ch. *8*, 299, 1891), ha utspädda lösningar av H_2SO_4, HNO_3, H_3PO_4, $HClO_4$, NaOH och KOH så gott som samma sönderdelningsspänning, omkring 1,68 V. Detta vore ytterst osannolikt, om sönderdelningen skulle ske på sex helt olika vägar, nämligen över de oladdade grupperna SO_4, NO_3, PO_4, ClO_4 och över metallerna Na och K. Däremot är det helt naturligt att sönderdelningsspänningen är lika, om förloppet i alla fallen är likartat, dvs. en omedelbar sönderdelning av vattnet, medan elektrolyterna blott tjäna till att göra lösningen ledande.

De formler för elektrodförlopp som här givits innehålla — liksom övriga redoxformler — blott utgångsämnen och slutämnen men säga ingenting om vilka mellanled som förekommit. Det är visserligen svårt att uttala sig om mellanleden, men man kan nog anse det mycket osannolikt att Na-metall eller oladdad SO_4 uppträder på ett Pt-bleck vid låga strömstyrkor. Däremot kan man som bekant få Na-amalgam vid elektrolys av en Na^+-lösning med Hg-katod; kvicksilvret sänker urladdningsspänningen för Na^+ och höjer den för H^+. (Forts.)

Skåpinredning i kemilaboratorier.

Av JOHN LUNDBERG.

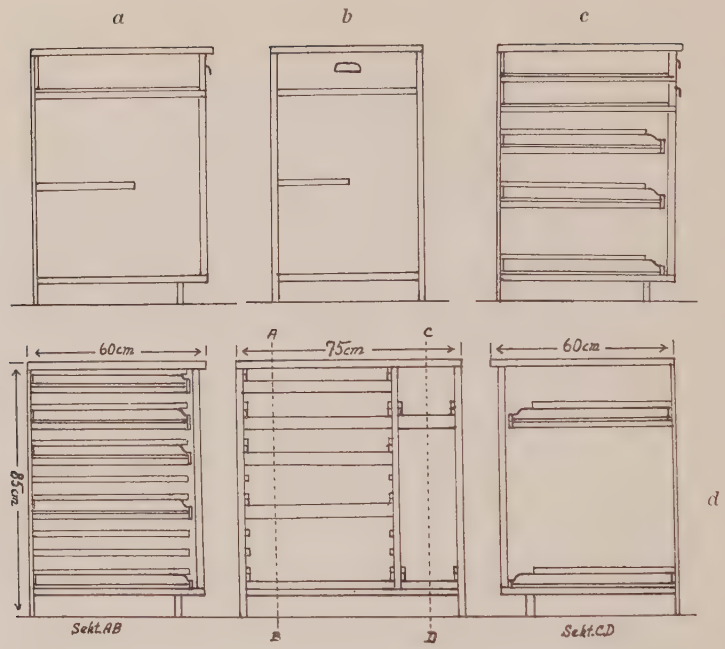
Kemilaboratorierna i många skolor torde alltjämt i laborationsborden ha skåp av följande typ: Närmast under bordskivan finnes en — ofta onödigt hög — låda, därunder ett skåp med en ända fram till dörren nående hylla på mitten samt själva golvet som hylla nr 2. Hyllornas, i synnerhet den undres, inre delar bli med denna anordning mycket svåråtkomliga. I regel blir det nog efter en tid så, att längst in kommer att finnas en del saker, som småningom bli bortglömda, kolvar och bägare med något i, om vilket man ej längre vet, vad det är. Dessa kärl bli på så sätt under långa tider till ingen nytta, de försvinna ur den allmänna cirkulationen. Härtill kommer, att man i skåp med denna inredning ej kan sätta in höga saker (mätcylindrar, kolvar med säkerhetsrör o. dyl.).

Anordningen i fig. *a* innebär en förbättring. Det är här lättare att komma åt såväl hyllans som bottnens inre delar, och även höga saker kunna få plats i skåpet. En olägenhet är dock, att dessa höga saker i så fall stå hindrande i vägen, om man vill komma åt något på hyllan.

Placeras hyllan såsom i fig. *b* (vilken visar skåpet sett *framifrån*) på ena sidoväggen, undvikes den sistnämnda olägenheten. De höga sakerna på skåpets golv hindra en nu ej att komma åt sådant, som står på hyllan. Denna kan här nå ända fram till skåpdörren utan att vålla olägenhet.

Inredningarna *a* och *b* ha alltså givna fördelar framför den ursprungliga typen. Men hyllutrymmet i dem är mindre än i denna, och trots allt är inre delen av skåpets botten alltjämt ganska besvärlig att komma åt.

Man ernår både ökat utrymme och bekvämare tillgång till de längst in placerade sakerna genom anordningen *c*. Hyllorna ha givits formen av lådor med mycket låga sidostycken (»backar») och kunna *dragas fram* ur skåpet. Detta har därjämte överst två lådor i st. f. endast en, vilket möjliggjorts genom att lådorna givits en mindre höjd. Då lådorna i dessa skåp väl mest användas till förvaring av papper, böcker, porslinsskålar, glasrör o. dyl., torde en



Skisser till skåpinredningar. I övre raden typerna *a*, *b*, *c* och i den undre typ *d*.

höjd av 7 cm vara fullt tillräcklig. I ett skåp av denna typ räcker det emellertid ej med sidofalsar, *på* vilka hyllorna glida. Hyllan måste löpa *mellan* en undre och en övre fals, vilken senare hindrar den från att stjälpa över, när den drages ut. Det är därjämte viktigt, att hyllorna löpa mycket lätt. I annat fall riskerar man, att en del saker falla omkull, om hyllan fastnat och man får loss den med ett ryck genom att dra mycket kraftigt.

Arrangemanget i *c* tillåter ej insättande i skåpet av höga saker; *d* visar en variation, som möjliggör detta. Här har också den ändringen vidtagits, att inga särskilda lådor finnas, utan de översta hyllorna tjänstgöra som sådana. Skåpet har dessutom, såsom sektion *AB* visar, försetts med anordningar, genom vilka hyllorna efter behag kunna anbringas på vilken höjd man önskar efter ungefär samma princip, som användes i bokhyllor. Man kan då också variera *antalet* hyllor i skåpet. Vill man ha plats för mycket höga saker i den högra avdelningen, kan den övre hyllan där tagas bort.

Skåpdörrarna böra helst vara skjutdörrar. Detta går dock ej bra, om mer än två intill varandra gränsande skåp ofta skola vara öppna samtidigt. I sådant fall måste man ha dörrar med gångjärn. Härvid får man dock ha dessa anbragta så, att den öppnade dörren ej hindrar, att hyllorna dragas ut.

Skåpinredena *c* och *d* torde särskilt kunna komma till användning i skåp, som äro avsedda för lärarna och för lärjungar, som utföra enskilt arbete. Men icke endast i bord-skåp utan även i en del andra skåp, t. ex. för förvaring av förråd av glasvaror eller av geologiska och tekniska samlingar, äro de vida att föredraga framför den nu vanligen använda typen med fasta hyllor.

Skåp av typerna *c* och *d* ha under de senare åren börjat komma i bruk i köks- och matsalsmöbler och man finner dem i en och annan reklambroschyr och på någon utställning. De synas mig böra ha en given framtid även vid laboratorieinredningar.

Bokanmälningar.

C. E. Sjöstedt, *Icke-euklidisk geometri.* Natur och Kultur, Stockholm 1945, 90 s., kr. 3: —.

Vår populärvetenskapliga litteratur i matematik utöver den rena lärobokslitteraturen är ganska sparsam. Det är därför med stor tillfredsställelse man hälsar ett nytt tillskott till denna, särskilt då det rör sig om ett så tilldragande ämne, som det förf. behandlar. Författarens mål är att ge en framställning, som förutsätter mycket ringa förkunskaper hos läsaren — var och en som besitter vanliga skolkunskaper i geometri torde med god behållning kunna taga del av arbetet.

Förf. ger först en historisk belysning av den mödosamma väg, som förde till upptäckten av andra geometriska system jämställda med det euklidiska och framställer sedan de grundläggande satserna i dessa system. Bevisföringen är mönstergill och gjord med den utförlighet, som ämnets natur nödvändiggör. Figurmaterialet förtjänar en särskild elöge. Sats 47 kunde måhända erhållit den skarpare formuleringen, att parallella linjer *obegränsat* närma sig varandra. I fråga om den elliptiska geometrien hade den elliptiska geometri — den sfäriska — där alla linjer råka varandra i två punkter, åtminstone parentetiskt förtjänat ett omnämnande.

I ett särskilt kapitel redogör förf. för den viktiga åskådliga representationen av de icke-euklideiska geometrierna i det euklidiska rummet, i ett annat diskuteras de olika geometriernas för-

hållande till verkligheten. Slutligen ägnas ett kapitel åt den logiska innebörden av de olika geometrierna. Beträffande innehållet i detta kapitel ställer sig anmälaren en smula frågande. Vad menas med att den euklidiska geometrien har den »evidens, som sammanhänger med att den synes anknyta till vissa fundamentala fakta beträffande rummet»? Det förefaller som om förf., trots allt vad som förut utretts, ville förse den euklidiska geometrien med trumf på hand. Pekar dock icke problemets utveckling på omöjligheten att erhålla kunskap om det absoluta rummet?

Trots reservationen beträffande sist berörda fråga vill anmälaren varmt rekommendera arbetet. Förf. uttalar i förordet den förhoppningen, att boken skall vara till nytta för de lärare, som undervisa i geometri, samt som litteratur för enskilt arbete. Anmälaren är övertygad om att så skall bli fallet och utvidgar kretsen till alla andra matematikintresserade.

Arvid Uhler.

G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, Cambridge University Press 1944. Pp. 804, 60 s. net.

Den vetenskapliga litteratur, som trots de senaste årens avspärrning västerifrån letat sig över till vårt land, har både haft en strykande åtgång och rönt en allt livligare uppskattning. Det är med tillfredsställelse man noterar, att Watsons Bessel Functions, detta imponerande standardverk, kunnat komma ut i en andra upplaga under pågående krig och trots rådande pappersknapphet. En aning besviken blir man emellertid vid läsningen av förordet, där förf. beklagar sig över att han icke på grund av annan verksamhet kunnat omarbeta sitt verk med hänsynstagande till de framsteg och upptäckter, som gjorts sedan första upplagan utkom år 1922. I stället för att skriva om hela senare hälften av boken, vilket i så fall hade varit nödvändigt, har förf. endast rättat tryckfel och andra felaktigheter. Innehållet är väl från den rena matematikens ståndpunkt av ganska litet intresse, men på grund av de Besselska funktionernas oerhörda betydelse inom skilda grenar av fysiken och tekniken är detta verk genom sin rikedom på formler och satser ett omistligt hjälpmedel vid allt teoretiskt arbete inom dessa områden. Det man icke finner i detta arbete eller i Nielsens Cylinderfunktionen (1904) får man söka i nyare originalavhandlingar. De avslutande tabellerna över de Besselska funktionerna överträffas numera av andra, utgivna av British Association for the Advancement of Science.

N. Svartholm.

W. M. Smart, *Text-Book on Spherical Astronomy.* Fourth Edition. Cambridge University Press 1944, Pp. 430, 21 s. net.

Professor Smarts lärobok i sfärisk astronomi, som nu utgivits i ny upplaga, avviker betydligt från de flesta andra läroböcker i samma ämne ifråga om de olika kapitlens innehåll. Den sfäriska astronomien omfattar läran om koordinatsystemen på himmelssfären, de olika fenomen (refraktion, aberration, parallax, precession, nutation), som påverka stjärnornas observerade orter, tidsbegrepp samt även ortsbestämningar till sjöss och förmörkelser. Allt detta finner man i Smarts lärobok i god framställning. Det kan t. ex. särskilt framhållas, att kapitlet om precession och nutation är synnerligen överskådligt och lättfattligt, vilket icke alltid är fallet i andra läroböcker. Till den sfäriska astronomien brukar man väl vanligen också räkna de astronomiska instrumentens teori, men i Smarts bok genomgås blott meridiancirkeln samt (i ett tillägg i slutet av boken) celostaten. I stället har Smart i sin bok medtagit åtskilligt, som kan räknas till celest mekanik eller stellarastronomi. Sålunda finner man ett par omfattande kapitel om planetrörelse. Andra kapitel behandla egenrörelser, astronomisk fotografi (d. v. s. uppmätningar av koordinater och egenrörelser på fotografiska plåtar) samt dubbelstjärnbanor. Ordningen mellan kapitlen är rätt egendomlig. Efter refraktion (kap. 3) behandlas meridiancirkeln, därefter komma kapitel, som behandla planetrörelse och tid och först därefter behandlas aberration, parallax och precession-nutation i 8:e—10:e kapitlen. Kapitlet om dubbelstjärnbanor (kap. 14) finner man mellan kapitlen om positionsbestämningar till sjöss och förmörkelser.

Efter varje kapitel förekommer ett rätt stort antal problem av olika svårighetsgrad. I slutet av boken finner man ett antal tabeller bl. a. upptagande astronomiska konstanter samt data över planetsystemet.

C. Schalén.

E. Pollard and W. L. Davidson, Jr., *Applied Nuclear Physics.* John Wiley and Sons, New York. 1942. 249 s., kr. 18: —.

Under det rådande kriget ha monografier i kärnfysik varit sparsamma företeelser. Arbetena med atombomben ha tydligen förbjudit utgivandet av dylika. Helt nyligen har emellertid ovanstående bok kommit till Sverige. Den är mycket lättläst, utan tyngande teorier. Enligt företalet vända sig författarna till kemister, biologer, läkare och ingenjörer.

Boken omfattar 11 kapitel. De första behandla kärnornas beståndsdelar och natur. Den först upptäckta grundämnesomvand-

lingen — Rutherfords välkända försök, då kväve bombarderat av alfapartiklar gav syre och protoner — beskrives ingående. Vidare behandlas metoder att upptäcka kärnpartiklar med elektroskop, räknerör och Wilsonkammare. Fjärde kapitlet sysslar med alstrandet av snabba partiklar, bl. a. beskrives cyklotronen och betatronen. I femte kap. redogöres för olika kärnomvandlingar erhållna medelst partikalbeskjutning. De följande kapitlen ägnas den naturliga och den konstgjorda radioaktiviteten. Dess biologiska effekter skildras, likaså dess användning i terapien. Kap. 9 avhandlar stabila isotoper och deras användning. Olika typer av masspektrografer beskrivas. Förf. dröja även vid de vanligaste sätten att separera isotoper, bl. a. genom termisk diffusion. Kap. 10 är ägnat åt kärnklyvningen, och här gives hela förhistorien till atombomben. Förf. skildra hur Hahn, den nye nobelpristagaren, tillsammans med Strassman första gången (1938) spjälkade uran och den oerhörda uppmärksamhet detta väckte i den vetenskapliga världen. Förf. behandla även uranisotopen U_{235}, den vid spjälkningen verksamma. Bokens sista kap. innehåller en kort redogörelse för kärnornas teori.

Läsningen underlättas av många åskådliga figurer och tabeller. En del räkneuppgifter finnes, likaså en kronologisk översikt över kärnhistoriska data. Boken rekommenderas varmt till dem, som vilja ta del av kärnfysikens senaste rön.

Albin Lagerqvist.

Harry Stockman, *Modern televisionsteknik, del III.* Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1945, 85 s., kr. 1: 50.

Arbetet ingår i Populär Radios handböcker. De två föregående delarna, som utkommo 1940 och då recenserades i Elementa, behandlade huvudsakligen televisionsteknikens ställning och metoder i England omedelbart före det andra världskriget. Engelsmännen lågo då på detta gebit före amerikanarna. Med världskrigets utbrott upphörde emellertid televisionssändningarna i England, och forskningsarbetet fick en annan inriktning. I Amerika kunde man däremot arbeta vidare på televisionen, och redan efter ett par år var England distanserat. Författaren har såsom »Instructor in Physics and Communication Engineering» vid Harvard-universitetet haft möjlighet att få personlig kontakt med de vetenskapsmän och ingenjörer, som i Amerika äro aktivt verksamma inom televisionsteknik och -industri. Den rikt illustrerade boken är således skriven med största sakkunskap och därför av värde för envar, som önskar följa med utvecklingen på detta område av radiotekniken.

Ernst Herlin.

Helge Tyrén, *På väg mot atomåldern.* Lindfors Bokförlag, Stockholm 1945. 118 s., kr. 4: 25.

Med berömvärd snabbhet har förf. åstadkommit en bok, som behandlar ett synnerligen aktuellt ämne. Men då boken icke är något hastverk, får man kanske förmoda, att förf. har haft tur genom att råka ha boken nästan färdig just när bomberna föllo över Hiroshima och Nagasaki? Hur som helst. Boken är skickligt upplagd och författaren har gått sin egen väg, när han disponerat innehållet. Han har icke (som brukligt är) lånat illustrationsmaterial från andra böcker, som i sin tur lånat — — —. Han har skaffat *nytt* illustrationsmaterial till alla kapitel. Endast några enstaka porträtt har han ej mäktat variera, och det må vara ursäktligt.

Boken inledes med ett förord av The Svedberg. Sedan följer en skickligt gjord snabbteckning av atombegreppet under antiken, medeltiden och nyare tid. Det periodiska systemet och Mendelejeff äro givetvis behandlade — och härvid hinner förf. även att giva några glimtar ur Mendelejeffs liv, något som man är tacksam för. Huvudparten av boken ägnas det moderna atombegreppet, Rutherford och Bohr, vidare Moseley, Aston, Dirac, Curie-Joliot, Fermi, Chadwick, Hahn — — — fram till uranreaktionerna och atombomben. Man får under vägen veta att isotopidén framställts icke allenast av Soddy utan även av Daniel Strömholm och The Svedberg i Uppsala (1909). Citat ur de senare forskarnas publikationer ger belägg för påståendet.

Boken är visserligen populär men fullt saklig, och den är så underhållande, att den gärna läses i ett sammanhang. Den är mycket lämplig som premiebok. Därmed skulle helt säkert sörjas för återväxten av atomforskare i vårt land. (Kanske en samvetsgrann pedagog anser sig böra viska i sin lovande lärjunges öra, att man t. v. i skolan ej bör kommatera i enlighet med bokens förord, att deuterium och helium ha atomnummer resp. 1 och 2, ej 2 och 4 som i fig. 33 eller som i fig. 43, där helium försetts med atomnumret 1).

J. Tandberg.

J. Grant, *Quantitative Chemical Analysis.* Churchill Ltd, London 1944, 557 s., kr. 24: 35.

Femtonde upplagan av Clowes och Coolemans analysbok utges här av Grant i utvidgad och moderniserad form. Den lämnar en lättläst, överskådlig och rikt illustrerad framställning av den kvantitativa analysens olika områden, inklusive mikrokemiska, nefelometriska, konduktometriska och kolorimetriska metoder, tekniska

analyser av mineralämnen, vatten och några organiska substanser samt gasanalys och molekylviktbestämning.

En utomordentligt förtjänstfull bok, som livligt rekommenderas till tekniska gymnasier och högre läroverk, där den vid enskilt arbete i kemi ger goda uppslag och klar ledning. Även för universitet och högskolor torde boken vara av stort värde.

E. Nordefeldt.

J. Knox, *Physico-Chemical Calculations.* Methuen, London 1913, 192 s., kr. 6: 30.

Föreliggande trettonde upplaga av fysikalisk-kemiska räkneuppgifter utgör en väsentlig utvidgning av Abegg-Sackurs exempelsamling i Sammlung Göschen. Olika områden behandlas i de 365 uppgifterna, varav många äro försedda med utförliga lösningar. Åtskilliga av dem kunna användas vid gymnasiets räkneövningar och vid prövning av studentkomplettanter, medan de övriga äro avsedda för högre studier.

E. Nordefeldt.

W. Haynes, *This Chemical Age.* Secker and Warburg, London 1945, 288 s., kr. 14: 50.

Som en spännande roman läser man denna dramatiska bok om den moderna kemiens underverk, skriven av den förstklassige och kunnige författaren till ett flertal högt skattade populärvetenskapliga arbeten. Den lämnar en ytterst livfull framställning av kemiens andel i vår nutida materiella kultur inom vitt skilda områden: färger, parfymer, läkemedel, sprängämnen, gummi, konstfibrer, konstmassor, gödselämnen etc.

Boken är ett fynd för varje kemilärare som vill stimulera sin undervisning, en eggande läsning för naturvetenskapligt intresserade gymnasister och ett utmärkt underlag vid föredrag inom skolornas naturvetenskapliga föreningar. Bör finnas i varje välförsett läroverksbibliotek.

E. Nordefeldt.

C. M. Beadnell, *Dictionary of Scientific Terms as Used in the Various Sciences.* Revised Edition, Watts & Co., London 1945, Pp. 232, 6 s.

Ur nyare litteratur, böcker och tidskrifter har förf. samlat termer och uppgifter, avsedda att vara alla dem till tjänst, som vill tillägna sig modern naturvetenskaplig litteratur. Det är ingalunda fråga om ytligt-populära antydningar, utan uppgifterna ha saklig

tyngd. Den som t. ex. läser litteratur om modern atomforskning finner här hela raden benämningar och lagar, oftast åtföljda av utförliga kvantitativa upplysningar. Även för den som väl känner fakta inom sitt gebit men som ej är så väl orienterad beträffande engelsk terminologi är boken av stort värde som språkligt hjälpmedel.

C. E. Blom.

Morgondagens teknik, Aktuella problem och framtidsperspektiv inom teknik och ingenjörsvetenskap. Teknisk Tidskrifts förlag, Stockholm 1945, 227 s., kr. 12: —.

Denna bok är utgiven till celebrerandet av Teknisk Tidskrifts sjuttiofemte årgång. I stället för att ge en tillbakablick på de gångna åren har man velat blicka framåt mot kommande år. Ett antal kända fackmän ha i mer än ett fyrtiotal artiklar behandlat aktuella problem och framtidsperspektiv inom teknik och ingenjörsvetenskap. Författarnas syfte har varit »att ge såväl de stora utvecklingslinjerna, till orientering för icke-fackmannen, som sådana detaljer, vilka kunna vara av intresse för specialisten».

För sakinnehållet borga författarna, var och en expert inom sitt område. Recensenten-lekmannen kan endast vittna om att orienteringarna fångat hans intresse i hög grad. De äro synnerligen läsvärda.

Artiklarna äro fördelade på följ. avdelningar: Bergsvetenskap, Mekanik och motorteknik, Skeppsteknik, Flygteknik, Elektroteknik, Kemiteknik, Byggnadsteknik. Se här några rubriker: Moderna malmgeologiska problem i Sverige, Utvecklingslinjer inom nutida svensk järnhantering, Aktuella problem på lättmetallområdet, Utvecklingen inom turbintekniken, Dieselmotorteknikens ståndpunkt och nuvarande utveckling, Forskningar och aktuella problem vid Statens skeppsprovningsanstalt, Motorbåten i framtiden, Reaktions- eller propellerdrift för flygplan, De stora flyghöjdernas problem, Elektrofysiken som grundval för elektroteknikens vidareutveckling, Televisionens utveckling, Ekoradion och dess framtida användning, Konsthartser, Cellulosa, Problem inom Sveriges läkemedelsindustri, Några problem inom geotekniken, Fotogrammetrins användningsområden.

C. E. Blom.

Gradualavhandlingar.[1]

Olof Nial, *X-Ray Studies on Binary Alloys of Tin with Transition Metals*, Stockholm 1945, 103 s. Disp. vid Stockholms Högskola den 25 maj 1945. Opponenter: docent Lars-Gunnar Sillén och fil. lic. Bengt Aurivillius.

Omkring 1920 införde svenskarna Westgren och Phragmén den röntgenkristallografiska metoden vid studiet av metaller och legeringar. De ha här utfört banbrytande arbeten. Man kan med denna metod många gånger bestämma icke blott sammansättnings- och temperaturgränserna för de intermediära faserna (förr »föreningarna») utan också atomernas inbördes läge (den s. k. kristallstrukturen) i dessa.

I föreliggande fall ha tenns binära legeringar med Fe, Co, Ni, Cr, Mn, Ru, Rh, Pd, Re, Os, Ir och Pt undersökts. Huvudvikten har lagts vid systemet Fe—Sn. Undersökningen av legeringarna med Pt och närstående metaller har varit mera av orienterande art, i synnerhet som alla önskade sammansättningar av flera skäl ej kunnat erhållas.

Intermediära faser ha påträffats vid följande sammansättningar. I *Fe—Sn*: Fe_3Sn, Fe_3Sn_2, 44 at% Sn, FeSn och $FeSn_2$; *Co—Sn*: 41—42 at% Sn (2 st), CoSn och $CoSn_2$; *Ni—Sn*: Ni_3Sn, 38—43 at% Sn (2 st), 54 at% Sn och Ni_3Sn_4; *Mn—Sn*: Mn_3Sn, 35—40 at% Sn och $MnSn_2$; *Ru—Sn*: Ru_3Sn_7; *Rh—Sn*: 40 at% Sn, RhSn och $RhSn_2$ (2 st?); *Pd—Sn*: Pd_2Sn(?), 36—42 at% Sn, PdSn och $PdSn_2$; *Ir—Sn*: $IrSn_2$ och Ir_3Sn_7; *Pt—Sn*: 47 at% Sn, Pt_2Sn_3(?) och $PtSn_2$ (2 st?). I *Cr—Sn*, *Re—Sn* och *Os—Sn* förekomma inga intermediära faser.

En intermediär fas med atomerna i samma läge som i nickelarseniden tycks uppträda i alla systemen (nära 40 at% Sn) med undantag av de tre sistnämnda. Fe_3Sn, Ni_3Sn och Mn_3Sn ha samma kristallstruktur. Detta gäller också FeSn och CoSn, $IrSn_2$ och $PtSn_2$, Ru_3Sn_7 och Ir_3Sn_7 samt slutligen $FeSn_2$, $CoSn_2$, $MnSn_2$ och $RhSn_2$. I avhandlingens senare del diskuteras de nämnda strukturtyperna och teorier om deras uppkomst. Det skulle kunna tilläggas, att atomernas inbördes läge är intimt förknippat med en del fysikaliska egenskaper, och många gånger kunna viktiga slutsatser om hållfastheten m. m. dragas. Legeringar med NiAs-struktur äro t. ex. hårda men mycket spröda, legeringar med Ni_3Sn-struktur däremot mycket hårda och stabila.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

NILS SVARTHOLM, *The Binding Energies of the Lightest Atomic Nuclei, with an Application of the Theory of Integral Equations to the Eigenvalue Problems.* Lund 1945. Disp. vid Uppsala universitet den 26 maj 1945. Opponenter: docent ADOLF ERIKSSON och ingenjör NJÅL HOLE.

Ett av de mest centrala problemen inom den teoretiska kärnfysiken är frågan om kärnkrafternas natur. Man har sökt angripa detta problem från två olika utgångspunkter, en fenomenologisk och en fältteoretisk. Enligt den förra väljes för kraften mellan två nukleoner — den gemensamma benämningen på protoner och neutroner — ett matematiskt uttryck, som bl. a. beror på nukleonernas inbördes avstånd. Uttrycket på kraften skall dessutom vara beroende av en eller flera parametrar, som skola bestämmas så, att man efter lösningen av de dynamiska problemen för kärnornas tillstånd och reaktioner kan redogöra för ett så stort antal experimentella fakta som möjligt. Det är väl värt att lägga märke till att den nuvarande situationen ifråga om atomkärnorna är en helt annan än den vid atomfysikens kvantteoretiska genombrott. *Då* gällde det en utvidgning av de Newtonska rörelselagarna; kraftlagarna voro de kända elektriska och magnetiska. *Nu* antar man, att kvantmekanikens rörelselagar gälla för kärnorna och deras beståndsdelar men söker efter krafternas natur. Då de elektromagnetiska lagarna ej förmådde förklara kraftverkningarna mellan kärnorna och deras beståndsdelar, framträdde det historiskt sett välmotiverade försöket att utvidga och förnya fältföreställningarna för förklaring av kärnkrafterna. Dominerande intresset knöts till den i den kosmiska strålningen upptäckta mesonen, vilken i den nya fältteorien skulle utgöra en motsvarighet till fotonen i den elektromagnetiska teorien. Mesonteorien som en förklaringsgrund för kärnkrafterna syntes till en början mycket lovande, men bland den mångfald av generaliserade och modifierade teorier, som framförts på senare år, synes för närvarande ingen särskilt framgångsrik. Samtliga mesonteorier ge dock åt kärnkrafterna vissa karakteristiska egenskaper, bland dessa framför allt krafternas korta räckvidd. I uttrycket för kraftverkan mellan två nukleoner ingår här ofta som avståndsfunktion $\frac{1}{r}e^{-r/a}$, där r är avståndet mellan nukleonerna och a är en universell konstant, den s. k. räckvidden, som är av storleksordningen 10^{-13} cm. Uttrycket ger för $r \gg a$ en försvinnande liten kraft. För att uttrycka kärnkrafternas korta räckvidd hade man redan tidigare i de fenomenologiska teorierna infört avståndsfunktioner sådana som $e^{-r/a}$, e^{-r^2/a^2} m. fl.

I vilken form kärnkrafterna än införas i teorien beror deras prövning på möjligheterna att lösa de kvantmekaniska flerkroppparproblemen. För beräkningen av grundtillståndet hos kärnor bestående av 2, 3 eller 4 nukleoner, d. v. s. kärnorna H^2, H^3, He^3 och He^4, har förf. försökt tillämpa en ny metod, som här skall kort skisseras i ett exempel: två nukleoner under inverkan av en kraft med avståndsfunktionen e^{-r^2/a^2}. Schrödingerekvationen för detta problem skrives vanligen som en differentialekvation men kan genom en Fourier-transformation överföras i en integralekvation, som efter förenkling kan skrivas

$$\left(\frac{p^2}{M} - E\right)\varphi(p) = A\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{-a^2(p-p')^2}\varphi(p')dp'_x dp'_y dp'_z.$$

Vågfunktionen $\varphi(p)$ beror här av impulskoordinaterna $p = (p_x, p_y, p_z)$, vilka uttrycka nukleonernas relativa impulskomponenter i de tre riktningarna x, y, z. Här är M massan av en nukleon och E kärnans totala energi. Den s. k. kraftkonstanten A kan uppfattas som egenvärdesparameter till integralekvationen. Denna löses genom en kombination av variationsmetoden, känd från såväl differential- som integralekvationernas teori, och en iterationsmetod, känd endast i den senare teorien. För beräkningen av det minsta värdet på A, då totala energien E har ett givet värde — denna uppgift motsvarar beräkningen av det numeriskt största värdet på E, d. v. s. energien i grundtillståndet, då A har ett givet positivt värde — ger denna kombinerade metod mycket tillfredsställande resultat. Detta förhållande beror på att man genom iterationsförfarandet uppnår en bättre approximation av vågfunktionen $\varphi(p)$ än medelst andra metoder. Motsvarande gäller om övriga problem, som behandlats, särskilt de rörande kärnor med 3 eller 4 nukleoner. I en del fall har äldre resultat kunnat bekräftas och preciseras och i andra fall har nya resultat uppnåtts. Det numeriska räknearbetet blir enligt den nya metoden betydligt reducerat i jämförelse med det som erfordras enligt äldre metoder. Härigenom kunna flera och mer komplicerade problem göras lönsamma för numerisk behandling.

De slutsatser förf. drar på grundvalen av de utförda beräkningarna, äro närmast av negativ karaktär. Tidigare antagna ganska allmänna uttryck på kraften mellan två nukleoner, innehållande avståndsfunktioner av formen e^{-r^2/a^2} och $\frac{1}{r}e^{-r/a}$, visa sig icke hålla måttet vid en jämförande prövning på 3- och 4-kroppar-problemen. — Till sist göres ett helt hypotetiskt försök att möta de uppkomna motsägelserna genom införandet av s. k. flerkroppar-krafter.

Birger Bäcklund, *Några α-haloalkyl-sulfoners reaktion med alkali.* Uppsala 1945, 107 s. — Disp. vid Uppsala Universitet den 24 maj 1945. Opponenter: docent Ingvar Hedlund och fil. mag. Sigvard Wideqvist.

Halogensubstituerade alkylsulfoner förhålla sig i reaktionshänseende högst olika, beroende på om halogenen sitter i α- eller β-ställning till sulfonylgruppen. I senare fallet, t. ex. vid β-bromdietylsulfon, $CH_2Br \cdot CH_2 \cdot SO_2 \cdot C_2H_5$, reagerar halogenatomen ungefär som i en alkylhaloid, varför det är möjligt att utföra dubbla omsättningar med dess hjälp. Vid inverkan av alkali elimineras hastigt bromväte under bildning av etyl-vinylsulfon, $CH_2 : CH \cdot SO_2 \cdot C_2H_5$.

α-Haloalkyl-sulfoner, t. ex. α-brom-dietylsulfon, $CH_3 \cdot CHBr \cdot SO_2 \cdot \cdot C_2H_5$, reagera däremot på helt annat sätt. Sedan länge är det känt, att vid dylika sulfoner dubbel omsättning med hjälp av halogenatomen är praktiskt taget omöjlig att utföra, medan halogenen däremot lätt ersättes av väte. Halogenatomerna ha alltså genom α-ställningen i förhållande till sulfonylgruppen fått en positiv karaktär, om ock av annat slag än den, som förekommer vid vissa α-halo-ketoner. Gentemot utspädda lösningar av alkali äro α-haloalkyl-sulfonerna tämligen resistenta vid rumstemperatur. Ramberg och författaren ha emellertid funnit, att α-bromdietylsulfon vid 100° mycket livligt reagerar med 2-n kalilut under bildning av buten-2, kaliumsulfit och kaliumbromid. Vid denna egenartade sönderdelningsreaktion spränges alltså den eljest vanligen mycket hållfasta bindningen mellan kol och svavel på ömse sidor om sulfonylgruppen, och dessutom uppkommer ett omättat kolväte, som har dubbelt så många kolatomer som vardera alkylgruppen. Man frågar sig då främst, om butenen bildats av etylgrupperna på ömse sidor om sulfonylgruppen, alltså intramolekylärt, eller om den t. ex. bildats genom sammanslutning av radikaler från två molekyler. Med hänsyn till α-brom-dietylsulfonens symmetriska byggnad synas båda dessa mekanismer möjliga. I avhandlingen har författaren genom studiet av ett antal (mestadels osymmetriska) α-haloalkylsulfoners reaktionssätt påvisat, att den omtalade sönderdelningsreaktionen synes vara generell för α-haloalkylsulfoner med sammansättningen $R' \cdot CHHlg \cdot SO_2 \cdot CH_2 \cdot R''$. Reaktionens bruttoförlopp kan i huvudsak beskrivas av reaktionsformeln

$$R' \cdot CHHlg \cdot SO_2 \cdot CH_2 \cdot R'' + 3\,HO^{-1} \rightarrow R' \cdot CH : CH \cdot R'' + Hlg^{-1} + + SO_3^{-2} + 2\,H_2O.$$

Ett nödvändigt villkor för att denna reaktion skall komma till stånd är att en α-väteatom finnes på den sida om sulfonylgruppen, som är motsatt den halogenbärande kolatomen. Vid α-brom-etyl-

fenylsulfon, $CH_3CHBr \cdot SO_2 \cdot C_6H_5$, saknas en sådan väteatom, vilket har till följd, att kol-svavelbindningarna icke sprängas vid behandling med alkali. I stället uppkommer (märkligt nog) β-oxi-etyl-fenylsulfon, vilken i sin tur sannolikt bildats genom anlagring av vatten till primärt bildad vinyl-fenyl-sulfon. Sistnämnda förening, vilken i likhet med ett antal andra av författaren framställda sulfoner icke synes vara beskriven tidigare, visade sig f. ö. vara hudretande.

Frågan rörande mekanism vid den under olefinbildning förlöpande och för α-haloalkyl-sulfoner karakteristiska reaktionen har diskuterats i avhandlingen och även ägnats ett särskilt experiment. Nämnda experiment bestod i alkalisk sönderdelning av en ekvimolekylär blandning av α-brom-etyl-propylsulfon och α-brom-propyl-etyl-sulfon, vilka var för sig ge penten-2. Om olefinen bildas intramolekylärt, kan man vänta sig att erhålla enbart penten-2 vid försöket. Skulle däremot den halogenbärande radikalen från en molekyl normalt sammanslås med en icke halogenbärande radikal från en annan molekyl, måste man förmoda, att även buten och hexen skola bildas vid nämnda blandnings reaktion med alkali. Försöket gav till resultat, att enbart penten-2 uppkommer, och bevisade sålunda, att olefinbildningen sker intramolekylärt. Hur förloppet utspelas i detalj kan icke med säkerhet sägas. Författaren är dock böjd att antaga uppkomsten av en trering av etylensulfonkaraktär

i samband med att halogenväte elimineras ur molekylen; genom sprängning av denna trering uppkommer sedan olefin och sulfit.

F. Malmquist, *A Mathematical Theory of Life Insurance Based on the Assumption of a Decreasing Force of Interest.* Stockholm 1945, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 31 A, N:o 24, 106 s. Disp. vid Stockholms Högskola den 21 april 1945. Opponenter: fil. dr K. G. Hagstrœm och fil. lic. E. Berg.

Avhandlingen bygger på de erfarenheter, livförsäkringsbolagen gjort under den räntekris, som rått i vårt land under det sista decenniet. På grund av den starka nedgången av den allmänna räntefoten under denna period blevo bolagen nödsakade att företaga en del drastiska åtgärder. Premienivån för nya försäkringar måste sålunda höjas i flera etapper, innan man stannade vid den nu gällande, som bygger på antagandet om en låg förräntning

(2,25 %). Ifråga om tidigare avslutade försäkringar, för vilka premierna icke kunde höjas, måste premiereserverna avsevärt förstärkas, vilket medförde att vinsten till de försäkrade helt indrogs under en viss period.

I avhandlingen göres gällande att man — utan att försumma säkerhetssynpunkten — kommer fram till en mera rimlig och mera stabil premienivå, om man, i stället för att räkna med konstant ränta, låter ränteintensiteten framställas av en icke växande funktion $\delta_{(t)}$, som är verkligt avtagande i ett positivt intervall $0 \leqq t < \varepsilon$. De för premieberäkningen under detta antagande nödvändiga formlerna angivas.

Om den initiala intensiteten $\delta_{(0)}$kan upprätthållas under försäkringstidens lopp, kan man vid premiereservberäkningen successivt förskjuta räntekurvan, vilket innebär, att avtalen i varje ögonblick omvärderas. Härigenom uppstår även i varje ögonblick vinst, benämnd grundvinst (eng. »basic profit»), som delvis har en annan karaktär än den traditionella vinsten i form av överränta, och som i allmänhet utlöses tidigare än denna. Grundvinsten undersökes för olika försäkringsformer, och det visas, att den generellt framställes genom formeln $\delta_{(0)}\{V_{(t)} - V^{\mathrm{I}}_{(t)}\}$ där $V_{(t)}$, resp. $V^{\mathrm{I}}_{(t)}$ äro två under olika ränteantaganden beräknade premiereserver. Grundvinsten är positiv, om de ingående reserverna avtaga, när ränteintensiteten ökas. Det nödvändiga och tillräckliga villkoret härför angives.

För den praktiska tillämpningen anvisas tvenne metoder. Enligt den första antages ränteintensiteten avtaga nära nog lineärt för $0 \leqq t < \nu$ från $\delta_{(0)}$ till ett värde $\delta < \delta_{(0)}$ för $t = \nu$. För $t > \nu$ sättes $\delta_{(t)} = \delta$. Detta ernås genom att i intervallet $(0,\nu)$ antaga diskonteringsfunktionen framställd av ett andra grads polynom med vissa egenskaper. Beräkningarna kunna i detta fall genomföras med hjälp av de vanliga tabellerna för slutintensiteten δ, sedan dessa kompletterats med två kommutationskolumner. Enligt den andra metoden framställes diskonteringsfunktionen av ett uttryck av formen $\varrho e^{-\sigma_1 t} + (1-\varrho)e^{-\sigma_2 t}$; $0 < \varrho < 1$. $\delta_{(t)}$ blir då en logistisk funktion, och beräkningarna kunna genomföras med hjälp av de vanliga tabellerna för de två konstanta intensiteterna σ_1 resp. σ_2.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1945: 7—10.

Ur innehållet: H. v. Euler und L. Hahn, Über die Bindungsarten zwischen Nukleinsäuren und Proteinen; G. Sjöström and E. Emilsson, The Determination of Citric Acid in Milk and Cheese; G.-A. Holmberg, Some Experiments with Triphenylmethyl Chloride &c.; F. Steckel, Dampf-Flüssigkeits-Gleichgewichte einiger binärer Schwefelwasserstoff-

haltiger Systeme unter Druck; H. v. Euler m. fl. Studies on the Isolation and Characterization of Cell Nuclei from Calf Thymus, Hog Liver &c.; R. Dahlbom and T. Ekstrand, Sulphides and Sulphoner Containing an Aminothiazole Group; A. Hanson, L'Examen michrochimique des taches d'urine en criminalistique; L. Smith, Definitioner och namn på syror och baser.

Populär radio, 1945: 7—11.

Ur innehållet: Bruset som gräns för mottagarkänsligheten; Radiostyrda modellflygplan; Bandspridningsproblemet; Något om framtidens elektronik; Ny amerikansk våglängdsplan; Ekoradio; Tekniker bakom fronten; En trerörssuper; Televisionens transmissionsproblem; Signalgenerator för växelström.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København, 1945: 2—3.

Ur innehållet: B. Strömgren, De astronomiske Kikkerters Udviklingshistorie III: 1, 2; K. A. Wingårdh, Planetariet vid Falu högre allmänna läroverk; E. Strömgren, Den internationale astronomiske Nyhedstjeneste under og mellem de to Verdenskrige (1914—1945); J. A. Odelberg, Från glasögonkikare till 7 tums-teleskopet vid Åkesta »stjärnstuga» (Västerås); Oversigt over Astronomisk Selskabs Observationer af foranderlige Stjerner 1. Aug. 1943—31 Juli 1945; Finlands geodetiska instituts expeditioner till solförmörkelsen 9 juli 1945.

Matematisk Tidsskrift, København 1944: 3—4, 1945: 1—2.

Ur innehållet i avd. **A**: B. Jessen, Om Konstruktion med Passer og Lineal; S. Bundgaard, Sigurd Duerlund; J. Hjemslev, En Forelæsning over ikke-euklidisk Geometri; B. Jessen, Om Kræfternes Parallellogram; E. Rasmussen, Et andet elementært Eksistensbevis for Trekantens Nipunktscirkel; Danske Eksamensopgaver.

Ur innehållet i **B**: E. S. Andersen, Indhold og Maal i Produktmængder; E. Følner, Bemærkning om Næstenperiodicitetens Definition; B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori; Opgaver til Løsning.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1945: 3.

Häftet är tillägnat professor Niels Bohr med anledning av hans 60-årsdag den 7 okt. 1945. Ur innehållet: V. Bjerknes, Litt fra den klassiske del av feltfysikken; E. K. Broch, Spørsmålet om gyldigheten av vannstoffatomets finstruktur-formel; Chr. Finbak og H. Viervoll, Strukturen av væsker; L. Harang, Zeeman-effekten ved radiobølger; O. Hassel, Om ikke-plane seks-ringers atomkonfigurasjon; J. Hotsmark, Resonansteorien for hørselen; E. A. Hylleraas, Om formuleringen av variasjonsproblemer for kontinuerlige egenverdispektra; C. Størmer, 10 000 nordlyshøider målt fra det sydlige Norge 1923—1944; R. Tangen, Resonansfenomener i kjernereaksjoner; B. Trumpy, Matastabile tilstander i atomene frembragt av høivolt-røntgenstråling; L. Vegard, Atomteorien i nordlysforskningens tjeneste; H. Wergeland, Noen bemerkninger til fordelningslovene i den statistiske mekanikk; S. Westin, Elektronspredning og elektronresonans.

Naturen, Bergen 1945: 5—10.

Ur innehållet: W. Werenskiold, Havstrømmer; O. Netteland, Det fri elektron og dets anvendelse; A. Åmot, Sjotermograftjenesten og den praktiske værvarsling; T. Braarud, Forurensning og selvrensning av sjøvann; B. Trumpy, Atomsprengning og frigjøring av atomenergien.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1420) *Ett obegränsat utdraget prismas normalsnitt har formen av en liksidig triangel. Prismat kan på två olika sätt skäras med plan, så att likbenta trianglar uppkomma. Två sådana trianglar antagas ha lika stora ytor. Undersök, hur vinklarna mellan två sådana plan variera.* *B. Svenonius.*

1421) *Visa, att* $\sum_{n=1}^{\infty} arc\,tg\,\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}$. *Per Olof Fröman.*

1422) *En rymdpolygons sidor delas av ett plan i segmenten* a_1, b_1; ...; a_n, b_n *i ordning tagna. Vilken relation består mellan dessa segment, om segmenten räknas med samma tecken vid inre, med motsatta tecken vid yttre delning.* *N. Juringius.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1423) Vilken är summan av alla positiva egentliga bråk med täljaren 1, vilka kunna skrivas som ändliga decimalbråk?

Svar: 1,5.

1424) Vilken är summan av alla decimalbråk mellan 0 och 1, vilkas period börjar med första decimalen och omfattar ett antal siffror, som går jämnt upp i n?

Svar: $5\cdot 10^{n-1}-1$.

1425) Bevisa formlerna $\sin(a-b)\sin(c-d)+\sin(a-c)\sin(d-b)+\sin(a-d)\sin(b-c)=0$ och $\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d)+\sin(a+c)\sin(a-c)\sin(d+b)\sin(d-b)+\sin(a+d)\sin(a-d)\sin(b+c)\sin(b-c)=0$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1423—1429 äro insända av *N. J.*, 1430—1434 av *T. Edqvist.*

1426) Lös ekvationerna: a) $\cos 3x = \cos^2 2x \cos x$, b) $\cos 5x = \cos 3x \cos 4x$, c) $\cos^2 5x = \cos 7x \cos x$, d) $\cos(a+b)x \cdot \cos(a-b)x = \cos^2 ax \cos^2 bx$.

Svar: a) $n \cdot 90°$ b) $n \cdot 60°$; $n \cdot 90°$ c) $n \cdot 45°$; $n \cdot 60°$ d) $\frac{n\pi}{a}$; $\frac{n\pi}{b}$.

1427) Visa, att i en kub varje hörn är centrum för en vidskriven sfär till en tetraeder, som till hörn har fyra andra av kubens hörn.

1428) I romben $ABCD$ äro hörnet A och den inskrivna cirkelns kontaktpunkt E med sidan AB fasta. Sök orten för B, C och D.

Svar: Orten är för D en parabel med A som fokus och E som vertex, för C parabelns styrlinje och för B dess axel.

1429) Sök orten för hörnen i ett likbent parallelltrapets, omskrivet kring en cirkel, som tangerar benen i givna punkter.

Svar: Hörnen på samma ben beskriva en och samma parabel med punkten på benet som fokus och de givna punkternas mittpunktsnormal som styrlinje.

1430) Genom en godtycklig punkt P på kurvan $2y = x^2$ drager man en normal och avsätter på denna inåt kurvan en sträcka PQ, som är 8 längdenheter. Hur nära x-axeln kan punkten Q komma?

Svar: Minsta avståndet är 5.5.

1431) Genom punkten $(-1; 1)$ drages en normal till kurvan $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{9}{8}\right)$. Avståndet mellan denna normal och en med densamma parallell parabelkorda är $\sqrt{5}$. Angiv kordans ekvation.

Svar: $x + 2y = 6$.

1432) Man ritar ett antal ellipser E_1, E_2, E_3 ... Samtliga ellipser ha origo till medelpunkt och sina axlar utefter koordinataxlarna. För en godtycklig ellips E_n gäller, att den går genom brännpunkterna för E_{n-1} och tangerar E_{n-1} i två punkter. Hur många sådan ellipser finnas, om ekv. för E_1 är $16x^2 + 9y^2 = 144$?

Svar: Antalet ellipser är 6 (E_1 t. o. m. E_6); E_7 är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

1433) Två punkter A och B med utgångslägena (8; 0) och (0; 2) resp börja i ett visst ögonblick röra sig med samma hastighet, 2 längdenheter pr sek. A rör sig genom första kvadranten utefter linjen $x \quad 8$ och B genom andra och tredje kvadranterna utefter linjen $4x \quad 3y \mid 6 \quad 0$. Efter hur lång tid ligga de båda punkterna i rät linje med origo?

Svar: Efter 2 sek och $3\frac{1}{3}$ sek.

1434) En liksidig triangel ABC var given. I ett visst ögonblick började sidan BC växa likformigt, så att den för varje sekund ökades med 30 % av sin ursprungliga längd. Samtidigt började även sidorna AB och AC växa, så att var och en ökades pr sekund med 10 % av den ursprungliga längden. Sträckorna hängde härunder ihop och bildade en likbent triangel, så länge detta var möjligt. Hur länge existerade triangeln, och efter hur lång tid hade den uppnått sitt maximala ytinnehåll?

Svar: Triangeln existerade i 10 sek. Maximal yta uppnåddes efter $\frac{1}{3}(\sqrt{304}+2) = 6{,}48$ sek.

Lösn. till uppg. 1390—1392.

1390) *I en rät stympad kon med basradierna R och r samt höjden h tänkas generatriserna vara elastiska trådar. Vrides den ena bascirkeln vinkeln $v < 180°$ omkring konens axel, tänjas trådarna och bilda en hyperboloidmantel. Beräkna volymen som inneslutes mellan denna och konmanteln.* *X.*

Med O (och o) beteckna vi både centrum i en bascirkel och dess plan. I den kropp, vars volym sökes, utskär ett godtyckligt plan π mellan O och o — som är parallellt med dessa plan — en cirkelring, vars yta inses vara ett polynom av andra graden i avståndet mellan exempelvis O och π. Har medelsnittets inre cirkel radien m, blir dess yta $b_m = \pi\left[\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - m^2\right]$. Enligt Simpsons regel (Elementa *20*, sid. 99) är $V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_m + b_2)$. I vårt fall är $b_1 = b_2 = 0$ och således $V = \frac{\pi h}{6}[(R+r)^2 - 4m^2]$. Betrakta nu en hyperboloidgeneratris AMa med mittpunkten M och projektionen AM_1a_1 i planet O. Då är $OM_1 = m$, $Oa_1 = r$ och $\angle AOa_1 = v$. Fullbordas parallellogrammen OAM_2a_1, får man (ur triangeln OAM_2) $4m^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos v$, så att $V = \frac{2\pi}{3} \cdot Rrh \sin^2\frac{v}{2}$.

B. Hjortzberg.

Även löst av *N. Juringius.*

Satsen gäller för en parallellt stympad cirkulär kon i allmänhet, då ena bascirkeln vrides vinkeln v kring sin medelpunkt i sitt plan, varvid även kontraktion av trådar kan förekomma. *X.*

1391) *Om serien* $\sum_1^\infty a_r^2$ *är konvergent, så är* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_1^n a_r = 0$.

(Talen $a_1, a_2 \ldots$ *äro reella).* *Hg.*

Man kan antaga, att alla a_r äro positiva och att $n \to \infty$ genom de jämna heltalskvadraternas rad. Har man nämligen visat, att $\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 : n = 0$, följer satsen allmänt så: Antag att $(m-1)^2 < n < m^2$, så är $\sum_1^{(m-1)^2} a_r : m < \sum_1^n a_r : \sqrt{n} < \sum_1^{m^2} a_r : (m-1)$ och om de yttersta leden bägge ha gränsvärdet 0 när m (och n) $\to \infty$, måste detsamma gälla för det mellersta ledet. Nu har ekvationen $(x-b_1)^2 + (x-b_2)^2 + \ldots + (x-b_n)^2 = 0$ i allmänhet komplexa rötter, då $b_1, b_2 \ldots, b_n$ äro reella tal. Endast om $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, uppträder en reell dubbelrot. Alltså är diskriminanten $\leqq 0$, d. v. s. $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 \leqq n(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$. Vi tillämpa detta på vår serie och få, om $s_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, $\sum_1^{n^2} a_r = \sum_1^n a_r + \sum_{n+1}^{n^2} a_r \leqq \sqrt{n s_n} + \sqrt{(n^2 - n)(s_{n^2} - s_n)}$. Divideras båda leden med n, följer på grund av konvergensen $\lim \sum_1^{n^2} a_r : n = 0$.

Anm.: För komplexa serier $a_r = \alpha_r + i\beta_r$ gäller satsen fortfarande, om $\Sigma|a_r|^2$ är konvergent, enär $|\alpha_r| \leqq |a_r|$, $|\beta_r| \leqq |a_r|$. Problemförfattarens ursprungliga formulering avsåg detta allmännare fall. Däremot räcker det ej, om Σa_r^2 är endast betingat konvergent.

X.

Även löst av *N. Juringius* och av *V. Stenström* med generalisering.

1392) *a) Att bestämma maximum för volymen av en cylinder, vars bascirklar ligga en på vardera av två givna koncentriska sfärer.*

b) Att bestämma maximum för volymen av den öppna låda, som erhålles av en given rektangulär platta, om kvadrater utskäras ur hörnen och kanterna sedan vikas upp.

Vilket enkelt samband finnes mellan a) och b)?

Gösta Danielsson.

Rektangelns sidor äro a och b, där $a < b$; hörnkvadratsidan är x, där $0 < x < \frac{a}{2}$. Askens volym är då $x(a-2x)(b-2x)$; den har sitt max. M_1 för ett x-värde mellan 0 och $\frac{a}{2}$[1]. Vi sätta $a = a^2$,

[1] $54\, M_1 = (a+b)^3 - 3(a^3+b^3) + 2(a^2-ab+b^2)^{\frac{3}{2}}$.

$b=\beta^2$ och $2x=t^2$ samt betrakta tetraedern $ABCD$ med $AC=BC=\alpha$, $AD=BD=\beta$, $AB=2t$ samt rät kantvinkel längs AB. Dess volym är $\frac{t}{3}\sqrt{\alpha^2-t^2}\cdot\sqrt{\beta^2-t^2}$. (Lägg normalplanet mot AB genom CD.) Jämföras funktionerna $9v_2^2=t^2(\alpha^2-t^2)(\beta^2-t^2)$ och $2v_1=2x(a-2x)(b-2x)$ med varandra, inses att maximivolymen M_2 för en sådan tetraeder, då t varierar, är bestämd av $9M_2^2=2M_1$. Nu är M_2 maximivolym för alla tetraedrar med $AC=BC=\alpha$, $AD=BD=\beta$, ty är i en sådan tetraeder kantvinkeln längs AB icke rät, kan man genom att vrida ABC kring AB, tills kantvinkeln ifråga blir rät, få en konkurrerande tetraeder med större volym. I maximitetraedern är av samma skäl även kantvinkeln längs CD rät.

Betrakta nu en dubbelpyramid, där de 4-sidiga delpyramiderna ligga på var sin sida om den gemensamma, inskrivbara basytan och där alla sidokanter $=\alpha$, resp. $=\beta$. Det är då klart, att $4M_2$ är maximivolym för en sådan pyramid och att max. nås, när basytan är en kvadrat och kantvinkeln i dubbelpyramiden längs en baskant är rät. Vi beteckna denna oktaeder med $C(PQRS)D$. Man behöver nu endast parallellförflytta delpyramiden $D(PQRS)$ längs CD, tills D faller i C, P i P_1, Q i Q_1 o. s. v. för att finna maximum $M_3=12M_2$ för volymen av ett fyrsidigt (rakt) prisma, vars basytor äro inskrivna en i vartdera av två koncentriska klot med radierna α och β (centrum C). Är slutligen M_4 maximivolymen för en i kloten på samma sätt inskriven rotationscylinder, får man det önskade sambandet $M_4=\frac{\pi}{2}\cdot M_3=6\pi M_2=2\pi\sqrt{2M_1}$. Det kan tilläggas, att planen PQC och P_1Q_1C äro vinkelräta i analogi med en känd egenskap hos den i två koncentriska cirklar inskrivna maximirektangeln. *X.*

Även löst av *A. Sandelin* och *E. Smn.*

Uppg. 7 specialkurs nov. 1945.

Uppgiften (se detta häfte s. 249) torde lösas enklast på följ. sätt. Sätt $MN=z$, $AM=h$, $MP=k$. Då blir $NP=\sqrt{z^2+k^2}$ och $DE=\frac{h-z}{h}\cdot BC$ samt det sökta förhållandet $=\frac{(h-z)\sqrt{z^2+k^2}}{hk}$. Vi studera funktionen $y=(h-z)^2(z^2+k^2)$. Rötterna till ekv. $y'=0$ befinnas — efter införandet av $k=h\cot v$ — vara $4z=h\pm h\sqrt{1-8\cot^2 v}$ (samt $z=h$). För $1>8\cot^2 v$ eller $\operatorname{tg} v>\sqrt{8}$ erhålles såväl max. som min.; det större z-värdet ger max., det mindre min. Om $\operatorname{tg} v=\sqrt{8}$, erhålles inflexion.

S. B.

En generaliserad studentuppgift.

Under denna rubrik har signaturen *X.* i Elementas marsh. 1945, s. 32 meddelat en uppgift, som är en generalisering av uppgift 7 i specialkurs jan. 1945 (se Elementas marsh. 1945 s. 62).

I sin generaliserade form lyder uppgiften:

Från en punkt gå tre normaler till en parabel. Visa, att cirkeln genom deras fotpunkter på parabeln går genom parabelns vertex.

Ett bevis lämnas även för satsen; ett annat är följande.

Äro X, Y de löpande koordinaterna för normalen till parabeln $y^2 = 2px$, så är normalens ekvation

$$y - Y + \frac{y}{p}(x - X) = 0.$$

Då $\frac{y}{p} = \frac{2x}{y}$, erhålles

$$y^2 - Yy + 2x(x - X) = 0.$$

Utbytes y^2 mot $2y^2 - 2px$, erhålles

$$x^2 + y^2 - (X + p)x - \tfrac{1}{2}Yy = 0.$$

För fixa X och Y är detta en ekv. i x, y, som representerar cirkeln genom fotpunkterna till normalerna från punkten (X, Y) och visar, att den går genom vertex.

Nils Juringius.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1945

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie förhåller sig summan av de två första termerna till summan av alla de följande som 5 : 4. Om andra termen ökas med kvoten, erhålles ett tal, som är aritmetiska mediet till första och tredje termen. Bestäm seriens första term och kvot.
2. I en likbent triangel drages en transversal parallellt med basen genom den inskrivna cirkelns medelpunkt. Transversalen delar triangelns yta mitt itu. Beräkna triangelns vinklar.
3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 - 4xy, \\ 6x - 9y = 14 - 9xy. \end{cases}$$

4. I en punkt A på en cirkel med radien 20 cm drages tangenten AT samt kordorna AB och AC, så att vinkeln TAB blir 45° och

vinkeln TAC 75°. Förlängningen av BC skär tangenten i punkten T. Beräkna längden av AT.

5. En fyrhörning $ABCD$ omskrives kring en cirkel. Vinkeln ABC är 120°. Vidare är $AB : CD = 1 : 3$ och $BC : DA = 5 : 3$. Beräkna fyrhörningens övriga vinklar.
6. I en cirkel, vars diameter är d, dragas två mot varandra vinkelräta kordor, vilkas längder äro a och b. De skära varandra i en punkt P inom cirkeln. Visa, att längden x av den korda, vars mittpunkt är P, kan beräknas ur formeln

$$x^2 + d^2 = a^2 + b^2.$$

7. I en triangel ABC är sidan BC 8 cm. Punkterna D och E äro mittpunkter på sidorna AB och AC respektive. Medianen CD är 7,5 cm och vinkeln CBE 30°. Beräkna i de båda fall, som äro möjliga, längden av medianen BE samt den vinkel, som de båda medianerna bilda med varandra.
8. Upprita kurvan $y = x^2 + 2x + 3$. Ekvationen $3x - y + a = 0$ betyder en rät linje, som skär kurvan i två punkter, om värdet på konstanten a väljes på lämpligt sätt. För ett visst värde på a sammanfalla skärningspunkterna, d. v. s. den räta linjen tangerar kurvan. Bestäm medelst grafisk metod eller på annat sätt detta värde på a och tangeringspunktens koordinater. Undersök vidare, för vilka värden på a linjen skär kurvan i två punkter och för vilka värden den icke har någon punkt gemensam med kurvan.

Resultat: **1.** Första termen 12 eller $-0{,}48$, kvoten resp. $\frac{2}{3}$ och $-\frac{2}{3}$. **2.** 65,53°; 65,53°; 48,94°. **3.** $x_1 = \frac{5}{3}$, $y_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{11}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}$, $y_3 = y_4 = -\frac{4}{3}$. **4.** $20 + \frac{10\sqrt{12}}{3} = 31{,}55$ cm. **5.** $A = 115{,}21°$; $C = 44{,}38°$; $D = 80{,}41°$. **7.** $6\sqrt{3} - 4{,}5 = 5{,}892$ cm och $6\sqrt{3} + 4{,}5 = 14{,}89$ cm; vinkeln 53,13°. **8.** För $a = 2\frac{3}{4}$ tangering i $(\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4})$; för $a < 2\frac{3}{4}$ inga och för $a > 2\frac{3}{4}$ två skärningspunkter.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. O är origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, A en punkt på negativa x-axeln och B en punkt på negativa y-axeln. På hypotenusan AB och kateten AO i den rätvinkliga triangeln ABO uppritas utåt kvadraterna $ABCD$ och $AOPQ$. Bevisa, att de räta linjerna DO och BQ skära varandra under räta vinklar.

2. En rektangulär dörr $ABCD$, där AB är 90 cm och AD 216 cm, kan vridas kring AD. Om dörren öppnas 40°, hur stor vinkel har diagonalen AC vridits?
3. I en geometrisk serie med fem olika stora termer är skillnaden mellan första och tredje termen $\operatorname{tg}^2 x$ och skillnaden mellan tredje och femte termen $\sin^2 x$. För vilka värden på x är summan av de tre mellersta termerna $3\frac{1}{2}$?
4. Bestäm ekvationen för den gemensamma normalen till de båda kurvorna $y = x^2 - 2x + 1$ och $y = x^2 + 2x - 1$.
5. Summan av termerna i en aritmetisk serie med första termen 2 är 90. Mellan första och andra termen i serien inskjutas tre nya termer, mellan andra och tredje likaså tre nya termer o. s. v., så att en ny aritmetisk serie erhålles, bestående av de ursprungliga och de inskjutna termerna. Denna senare series summa blir 342. Beräkna den ursprungliga seriens differens och termantal.
6. En skål har formen av ett sfäriskt segment, vars höjd är lika med halva radien i sfären. I skålen nedläggas fyra lika stora klot, av vilka vart och ett tangerar två av de övriga. Skålens plana lock tangerar alla fyra kloten. Hur stor del av skålens volym upptages av de fyra kloten?
7. På sidorna i den rätvinkliga triangeln ABC uppritas utåt de likformiga, likbenta trianglarna AP_1B, BP_2C och CP_3A, vilkas toppvinklar P_1, P_2 och P_3 alla äro 120°. Visa, att triangeln $P_1P_2P_3$ är liksidig.
8. Ekvationerna för en triangels sidor äro $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$ och $x + y = 6$. I denna triangel inskrives en triangel ABC, så att dess medianer gå genom origo. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av triangeln ABC varierar, samt ange det största och minsta värdet av denna yta.

Resultat: **1.** Om DO skär BQ i R och AB i S, blir $\triangle ABQ \cong \triangle ADO$, varför $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ADO$; trianglarna ASD och RSB äro alltså likvinkliga. **2.** 15,12°. **3.** $\pm 60° + n \cdot 180°$. **4.** $4x - 4y - 1 = 0$. **5.** Diff. och termantal resp. $\frac{4}{7}$ och 15. **6.** $0{,}4(\sqrt{15} - 3)^3 = 0{,}266$. **7.** Se dec.h. 1945, s. 198. **8.** Om T är ytan av $\triangle ABC$ och x är x-koord. för det på hypotenusan belägna hörnet, blir $T = 1{,}5(x^2 - 5x + 18)$, varav $T_{\min.} = 17\frac{5}{8}$ ytenh. för $x = 2{,}5$. Villkoret för att alla hörn skola ligga *på* triangelns sidor är $-2 \leqq x \leqq 6$. De värden på T, som svara mot gränserna, äro resp. 48 och 36 ytenh., varför $T = 48$ är det största värdet.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Två kongruenta ellipser ha samma medelpunkt, och deras storaxlar äro vinkelräta mot varandra. Kurvorna skära varandra under 60° vinkel. Bestäm deras excentricitet.
2. Till hyperbeln $x^2 - 4y^2 = 60$ drages en tangent vinkelrätt mot ena asymptoten, och i tangeringspunkten drages normalen till hyperbeln. Visa, att en cirkel kan inskrivas i den fyrhörning, som bildas av asymptoterna, tangenten och normalen.
3. Genom sambanden $x = 2t + \sin 2t$, $y = 2\sin^2 t$ bestämmes y som funktion av x. Angiv andra derivatan av y med avseende på x i en form, där variabeln t icke ingår.
4. Angiv i huvuddrag utseendet av kurvan $y = \left(\frac{x-a}{x}\right)^2$ för $a > 0$ och $a < 0$. Kurvan skär sin ena asymptot i en punkt P på ändligt avstånd, och kurvans tangent i P skär kurvan i ytterligare en punkt Q och den andra asymptoten i en punkt R. Visa, att R är mittpunkten på PQ.
5. I en halvcirkel är O medelpunkten och A diameterns ena ändpunkt. AB är en korda och OC den med AB parallella radien. När antar ytan av figuren $OABC$ sitt största värde?
6. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln i ett koordinatsystem, tangerar den räta linjen $x + y = 0$. Sök och konstruera orten för parabelns brännpunkt, då dess vertex genomlöper båda grenarna av kurvan $xy = 1$.
7. En parallelltransversal i triangeln ABC skär sidorna AB och AC i D och E och höjden AM i N. Punkten P är belägen på normalen till triangelns plan i höjdens fotpunkt M. Sträckorna MA och MN synas från P under vinklarna v respektive x. Uttryck förhållandet mellan ytorna av trianglarna PDE och PBC som funktion av x, och bestäm villkoret för att denna funktion skall ha ett maximum eller minimum, då x varierar mellan 0 och v.

Resultat: **1.** Exc. $= \sqrt{\sqrt{3} - 1}$. Av symmetrin följer, att kurvornas skärningspunkter ligga på axelvinklarnas bissektriser och att tangenterna i dessa punkter med axlarna bilda vinklarna 15° resp. 75°. **2.** Den av tangenten och asymptoterna bildade triangeln är »egyptisk». Hyperbelnormalen är mittpunktsnormal till den större kateten och tangerar därför inskrivna cirkeln. **3.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(2-y)^2}$. **4.** Asymptoter: $x = 0$ och $y = 1$; den senare skär kurvan i $P\left(\frac{a}{2}; 1\right)$.

Om $a > 0$, växer y (med från $-\infty$ växande x) från $+1$ till $+\infty$ (för $x = 0$) och avtar sedan till $y_{\min} = 0$ (för $x = a$) för att sedan växa mot $+1$. Spegling i y-axeln ger den till $a_1 = -a$ hörande kurvan. — Kombineras $y = kx + l$ med kurvans ekv., fås en 3:e-gradsekv. med avseende på $\frac{1}{x}$, i vilken $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{a}$; då $x_1 = x_2 = x_P = \frac{a}{2}$, blir $x_Q = -\frac{a}{2}$. Inflexionspunkt för $x = 1{,}5\,a$ ($x_1 = x_2 = x_3$). **5.** $\sphericalangle OAB = 60°$. **6.** En parabeltangent, som bildar 45° med parabelns axel, råkar denna i en punkt P, så belägen att vertex V delar PF mitt itu, där F är fokus. Om V har koord. $\left(x; \frac{1}{x}\right)$, $P(x; -x)$ och $F(x; y)$, blir $\frac{1}{x} = \frac{y - x}{2}$, d. v. s. $y = x + \frac{2}{x}$, som är orten. Den är en hyperbel med asymptoterna $y = x$ och $x = 0$. **7.** Förhållandet $= \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} v \cos x}$, som har max. och min. för $\operatorname{tg} v > \sqrt{8}$. (Se även dec.h. 1945, s. 245).

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 2 och 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. I kurvorna brukar vägarnas ytterkant läggas något högre än innerkanten. Uraktlåtes detta, sladda åkdonen vid högre hastigheter. Beräkna den största hastighet, med vilken en vagn kan framföras i en kurva på en fullt horisontell väg, om kurvan har formen av en cirkelbåge med radien 120 m och friktionskoefficienten mellan hjulen och vägbanan vid sladdning antages vara 0,30.
2. Två likadana raka smala stavar av omkring 50 cm längd äro utan friktion vridbara i ett och samma vertikalplan kring var sin axel, gående genom stavens övre ända. Axlarna befinna sig i jämnhöjd på 40 cm inbördes avstånd. Stavarnas tyngdpunkter äro förenade med ett 50 cm långt snöre; vid snörets mitt är en vikt p fastgjord. Vardera staven väger 500 g; avståndet mellan stavens vridningsaxel och tyngdpunkt är 25 cm. Hur stor bör vikten p vara, för att vid jämvikt snörets båda hälfter skola bilda 90° vinkel med varandra?
3. Vid en laboration ville man bestämma specifika värmet för bensol. För försöket begagnades en termosflaska, genom vars propp en termometer var nedstucken i flaskan. Först ihälldes

omkring 200 g varmt vatten, och flaskan omskakades någon minut. Termometern visade sedan 39,0° C. Därpå tillsattes 100 g vatten av temperaturen 18,0° C, och efter ny omskakning avlästes åter temperaturen, denna gång 32,4° C. Så avhälldes en vattenmängd, som sedan uppmättes till 95 g, och temperaturen i flaskan kontrollerades; den befanns nu vara 32,2° C. Slutligen tillsattes i stället för det avhällda vattnet 100 g bensol av 18,0° C, och efter omskakning avlästes temperaturen en sista gång; den var nu 30,0° C. Beräkna spec. värmet för bensol.

4. Ett likbent glasprisma har brytande vinkeln 40°. För att bestämma glasets brytningsindex ritar man på ett papper två parallella räta linjer *A* och *B* på lagom inbördes avstånd och ställer prismat på papperet så, att *A* träffar basen och *B* en av sidorna. Hålles ögat på passande sätt, ser man *A* speglad mot basen och *B* bruten genom den andra sidoytan. Man vrider slutligen prismat så, att *A* efter reflexionen och *B* efter brytningen synas parallella med varandra, vilket kan utföras med tillräcklig noggrannhet. Vinkeln mellan linjen *A* och basytan befinnes då vara 17°. Beräkna glasets brytningsindex.
5. På en optisk bänk uppställes i ordning en ljuskälla, en skärm med en liten rund öppning, som är övertäckt med tunt vitt silkespapper, en lins av styrkan + 4,0 dioptrier och en plan spegel. Skärmen befinner sig i linsens fokalplan, spegeln står någon dm bakom linsen. Ett strålknippe, som utgår från det belysta silkespapperet, brytes av linsen och träffar därefter spegeln, som reflekterar knippet tillbaka genom linsen till skärmen. Om spegeln vrides litet, ser man en skarp bild av den belysta öppningen på skärmen strax intill öppningen. Ersätter man linsen med en svagare samlingslins, vars styrka man inte känner exakt, finner man, att linshållaren måste skjutas 8,3 cm närmare spegeln, för att bilden på skärmen åter skall bli skarp. Hur stark är den senare linsen?
6. Ett batteri av 16 likadana seriekopplade nifeackumulatorer är slutet genom en yttre ledning, bestående av 3 likadana seriekopplade billampor och en ampèremeter. Man vill veta, huru stor effekt varje lampa vid denna koppling förbrukar. Man har till hands en voltmeter för maximalt 5 V. Denna inkopplar man mellan negativa polen av andra ackumulatorn och positiva polen av femte ackumulatorn, räknat från batteriets negativa pol. Voltmetern visar då 4,72 V och ampèremetern 4,50 A. Hur stor effekt tager var och en av billamporna? Voltmeterns motstånd antages vara stort, ampèremeterns och ledningarnas försvinnande litet.

7. Spolen hos ett vridspolinstrument är lindad av koppartråd. Man använder vid ett tillfälle en shunt av manganintråd till instrumentet och avläser ett utslag av 75 skaldelar på vridspolinstrumentets skala. Man vet, att detta vid den rådande temperaturen, + 15,0° C, betyder, att strömmen i huvudledningen är 75 mA. Om temperaturen stiger, växer emellertid motståndet hos koppar med 0,4 % för varje grads temperaturförhöjning, medan motståndet hos manganin inte nämnvärt ändras. Om man vid ett annat tillfälle, då rumstemperaturen är + 22,5° C, åter avläser ett utslag av 75 skaldelar på vridspolinstrumentet, kan man därför inte utan vidare antaga, att strömstyrkan i huvudledningen även nu skall vara 75 mA. Huru stor är den i detta fall? Shuntens motstånd är vid + 15,0° C 1/99 av vridspolens motstånd. Man antager, att ledningarna alltid hava samma temperatur som omgivningen.

8. En platinatråd är överdragen med ett tunt silverskikt. Om den upphettas starkt med elektrisk ström, avdunstar silvret. Befinner sig tråden i vakuum, rusa därvid silvermolekylerna i praktiskt taget rätliniga banor bort från tråden åt alla håll. Man vill bestämma deras hastighet. För ändamålet anbringas tråden i axeln av en vertikal cylindrisk metallskärm med radien 2,0 cm. I metallskärmen är en smal lodrät springa upptagen. Vidare är utanför skärmen en vertikal glasplatta anbragt, orubbligt förenad med skärmen. Dess avstånd från tråden är 12,0 cm. Hela apparaten befinner sig i vakuum och kan sättas i snabb rotation kring tråden. Apparaten är först i vila, och de silvermolekyler, som slungas ut genom springan, träffa då glasplattan vinkelrätt, fastna där och bilda ett med springan parallellt »silverstreck». Roterar apparaten, träffa de inte plattan på exakt samma ställe som då den står stilla. Vid ett tillfälle, när man först haft apparaten stillastående och sedan låtit den rotera en stund med hastigheten 25 varv/sek, fick man på glasplattan två parallella, något oskarpa silverstreck. Avståndet mellan deras mittlinjer uppmättes och befanns vara 3,0 mm. Vilken hastighet hade de silvermolekyler, som avsatt sig vid mitten av det under rotationen bildade silverstrecket? Vid räkningarna antagas molekylernas banor horisontella.

Resultat: **1.** 67,7 km/tim. **2.** 103 g. **3.** 0,409 cal/g.grad. **4.** 1,76; den brutna strålen är i prismat parallell med basen. **5.** 3,0 dioptrier. **6.** 28,3 W. **7.** 77,2 mA. **8.** $6{,}28 \cdot 10^4$ cm/sek.

Realexamen H. T. 1945.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $\dfrac{\frac{x}{4}+6}{\frac{x}{4}+1}-\dfrac{4}{3x}=\dfrac{2-\frac{x}{2}}{2+\frac{x}{2}}$.
2. För att inlösa ett lån på 2 500 kr jämte sex månaders ränta efter 5 % sålde en person till 102 % kurs 5 st 3 % obligationer à 500 kr med fyra månaders upplupen ränta. Hur mycket återstod av försäljningssumman, sedan skulden betalats?
3. Pyreneiska halvön har tillnärmelsevis formen av ett parallelltrapets. På en karta i skalan 1 : 5 000 000 äro trapetsets parallella sidor 20 cm och 12 cm samt dess höjd 14,5 cm. Beräkna med tillhjälp av dessa uppgifter Pyreneiska halvöns yta i mil².
4. En svensk affärsman, som importerade en vara från New York, brukade för att täcka kostnaderna för frakt, tull m. m. beräkna ett försäljningspris för varan, vilket översteg dess pris i New York med 12 %. Vid ett tillfälle höjdes priset på denna vara i New York med 3,5 cents per pound. Vilken höjning av priset kom detta att motsvara i Sverige, uttryckt i öre per kg? 1 dollar = 100 cents = 4,05 kr. 1 pound = 0,4536 kg.
5. Kopparkis innehåller 34 % järn och $33\frac{1}{3}$ % koppar. Svavelkis innehåller 47 % järn men icke någon koppar. Av en blandning av dessa mineral, vägande 18 ton, erhålles 6,9 ton järn. Hur mycket koppar erhålles av blandningen?
6. Mellan två orter går en väg, som trafikeras av en buss. Vägen rätas och bygges om, varigenom vägsträckan blir 10 % kortare än förut. Samtidigt ökas bussens medelhastighet med 20 %. Med hur många procent minskas härigenom bussens körtid mellan de båda orterna?
7. En rät cirkulär kon av järn har 1,2 dm höjd och 8 cm bottendiameter. Genom konen borras ett cylindriskt hål, vars axel sammanfaller med konens och vars radie är 5 mm. Hur mycket minskar härigenom konen i vikt? Järnets specifika vikt = 7,7. $\pi = 3\frac{1}{7}$.
8. I en rätvinklig triangel med kateterna 2 cm och 14 cm drages en mot hypotenusan vinkelrät linje, som delar triangelns yta mitt itu. Kring den därvid bildade fyrhörningen kan en cirkel omskrivas. Beräkna denna cirkels radie.

Resultat: **1.** $x = 0{,}2$. **2.** 12,50 kr. **3.** 5 800 mil². **4.** 35 öre/kg. **5.** 4 ton. **6.** 25 %. **7.** 66,6 g. **8.** $\sqrt{5} = 2{,}236$ cm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 2, 4, 6 och 7 böra åtföljas av enkla figurer.

1. I en volymbägare (bägare med sidorör) hälles så mycket vatten, att en del rinner ut genom sidoröret. Därpå nedsänkes ett metallstycke i bägaren. Det vatten som då rinner ut, väger 8,17 g. Metallstycket tages upp och fastgöres vid en kork, som väger 2,16 g. Volymbägaren fylles ånyo, varpå den av metallstycket och korken sammansatta kroppen nedsänkes. Det rinner då ut 17,19 g vatten. Beräkna härur specifika vikten för kork.
2. Tvärs över två kantställda parallella plankor ligger en bjälke *AB*, som berör plankorna i *C* och *D*. Plankorna äro vågräta och avståndet mellan dem 2 m. Bjälken väger 80 kg, är 4 m lång och bildar rät vinkel med plankorna. De båda utskjutande bjälkändarna *AC* och *BD* äro lika långa. Friktionskoefficienten mellan bjälken och plankorna är 0,2. En vågrät kraft anbringas i *A*, vinkelrätt mot *AB*, och ökas, tills bjälken just rubbas ur sitt läge. På grund av friktionen blir rörelsen en vridning kring någondera av beröringsytorna *C* och *D*. Undersök, om det blir vridning kring *C* eller *D*, och angiv det minsta värde kraften kan ha, om bjälken skall rubbas. Bjälken och plankorna kunna behandlas som smala, raka, homogena stavar.
3. På ett horisontellt spår står en järnvägsvagn, som väger 6 ton, och fem pojkar roa sig med att sätta den i gång. Om tre av dem hjälpas åt, kunna de precis hålla vagnen i gång med jämn hastighet. Sedan vagnen fått stanna igen, skjuta de på alla fem. Vilken hastighet får då vagnen på 30 sek? Varje pojke antages skjuta på med en kraft av 25 kgf. $g = 9{,}8$ m/sek^2.
4. I ett cylindriskt kärl, som är tillslutet med en förskjutbar kolv, finnes en torr luftmassa, vars volym är 1,0 liter och tryck 69 mm kvicksilver. Volymen minskas långsamt genom att kolven skjutes in. Beräkna luftmassans tryck för några olika värden på volymen och rita en kurva, som visar, huru trycket beror av volymen. Temperaturen hos luftmassan antages konstant.
5. När man inom byggnadstekniken behandlar väggars egenskap att leda värme, brukar man använda ett s. k. *k*-värde, ur vilket man genom multiplikation med väggens yta i m^2 och temperaturdifferensen mellan dess inner- och ytteryta i grader erhåller den per timme genomsläppta värmemängden i kcal. Ett i många sammanhang normalt genomsnittsvärde är $k = 0{,}80$. Undersök med användande av detta *k*-värde, huruvida en elektrisk värmekamin med 500 W effekt räcker för att täcka värmeförlusterna

genom ytterväggen i ett rum, där den utåt vettande väggytan är 32 m² och rumstemperaturen är 18° högre än yttertemperaturen. 1 wattsekund motsvarar 0,24 cal.

6. En julgransbelysning, som består av 20 likadana seriekopplade lampor, är avsedd för 220 V och förbrukar totalt 40 W. Hur stort motstånd har varje lampa, då den lyser?
7. Man vill kontrollera en galvanometer, om vilken det uppgives, att dess motstånd är 60 Ω och att varje skaldel betyder 0,10 mA. Man tänker använda en ackumulator, vars inre motstånd kan försummas, en kontrollerad voltmeter och en kontrollerad proppreostat. Eftersom ackumulatorn icke får kopplas direkt till galvanometern, begagnar man proppreostaten som förkopplingsmotstånd. Med voltmetern finner man, att ackumulatorns polspänning är 1,38 V. Hur många ohm skall man koppla in i reostaten, för att galvanometern skall göra 30 skaldelars utslag, om den är som den enligt uppgift skall vara?
8. En elmotor för 120 V skall vid ett tillfälle drivas med ett batteri av seriekopplade ackumulatorer, var och en med elektromotoriska kraften 1,25 V och inre motståndet 0,03 Ω. Hur många ackumulatorer bör batteriet innehålla, om 1 hk skall uttagas från motorn? Motorns verkningsgrad är 0,84. 1 hk = 736 W.

Resultat: **1.** 0,24. **2.** Vridning kring D; minsta kraften $5\frac{1}{3}$ kgf. **3.** 2,45 m/sek. **5.** Det tillföres 120 cal/sek, men förlusterna äro 128 cal/sek. **6.** 60,5 Ω. **7.** 400 Ω. **8.** 106 ackum. (106,1).

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Det runda järnet i en kätting har 20 mm diameter och materialets brotthållfasthet är 50 kgf/mm². Beräkna den totala dragbelastning vid vilken någon av kättinglänkarna brister.
2. Mellan dubbarna i en svarv är en stålbult inspänd. Då bulten nedsvarvats till 20 mm diameter, har dess temperatur höjts från 20° C till 40° C. Hur stort tryck kan på grund av denna temperaturhöjning uppkomma mellan arbetsstycket och dubbarna, om pinoldockan är fastlåst, så att en längdförändring av bulten ej är möjlig? Längdutvidgningskoefficienten = 0,000012. E = 2000000 kgf/cm².
3. Beräkna bensinförbrukningen per timme för en förbränningsmotor på 5 effektiva hästkrafter, om bensinens förbränningsvärme är 10000 kcal per kg och totalverkningsgraden 20 %.

4. En elektriskt driven vinsch skall kunna lyfta en last av högst 2 ton. Vinschen drives av en motor med varvantalet 1000 över en snäckväxel med dubbelgängad skruv. Snäckhjulet har 80 kuggar. Lintrummans diameter är 400 mm. a) Hur stor är lyfthastigheten? b) Hur många hk utvecklar motorn, då maximilasten lyftes? c) Hur stor blir motorns effektförbrukning i kW? Motorns verkningsgrad är 80 %, det övriga hissmaskineriets 70 %.
5. En golvbjälke har ett tvärsnitt av $8 \cdot 20$ cm. Hur många procent ökas bjälkens bärförmåga, om dess höjd ökas till 23 cm?
6. I ett 4-skivigt blocktyg, bestående av 2 st 2-skiviga block, skall användas en kranlina, tillverkad av 114 st 0,5 mm ståltrådar med brottgränsen 13000 kgf/cm². Hur stor last kan lyftas, om 10-faldig säkerhet kräves? Blocktygets totala verkningsgrad är 90 %.
7. Hur bestämmes effekten på en ångmaskin eller förbränningsmotor genom indikering?
8. En liten enrums sportstuga med ett plan av $4 \cdot 5$ m skall byggas på åtta betongplintar i en tämligen hård sandbacke. Rita skisser med utsatta dimensionsbeteckningar
   a) över en färdiggjuten plint, hur den placeras i marken samt upptill uppbär syllen och golvbjälkarna,
   b) över en av träformarna till plintarna.
9. I ett bjälklag med en fri spännvidd av 6 m och ett centrumavstånd mellan bjälkarna av 55 cm användas bjälkar med tvärsnittet $17{,}5 \cdot 24{,}5$ cm. Golvplanken är 37 mm, blindbottnen 25 mm och underpanelen 25 mm tjock. Ett 18 cm högt lager trossfyllning har inlagts. Beräkna böjpåkänningen i bjälkarna, då bjälklaget belastas med 200 kg/m². Trävirkets specifika vikt är 0,64, fyllningens 0,9. Skissera ett tvärsnitt av bjälklaget.

Resultat: **1.** 31,4 tonf. **2.** 1510 kgf. **3.** 1,58 kg/tim. **4.** a) 0,524 m/s b) 20,0 hk c) 18,4 kW. **5.** 32,2 %. **6.** 1040 kg. **7.** 59,4 kgf/cm².

4W

3 8198 313 596 510
THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO